

Η ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΠΟΙΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Η παρούσα έρευνα μελετά την εξέλιξη της αισθητικής διερεύνησης εστιάζοντας κυρίως στον παραγωγικό της ρόλο. Οι συμμετέχοντες ήταν δύο μαθητές της Γ' Λυκείου με άριστη επίδοση στα μαθηματικά. Στους μαθητές ζητήθηκε να συσχετίσουν δύο ποιήματα με τρεις γνωστές μαθηματικές αποδείξεις. Τα ερευνητικά δεδομένα ήταν τα φύλλα εργασίας των μαθητών, οι απομαγνητοφωνήσεις της παρέμβασης, καθώς και οι σημειώσεις πεδίου. Η ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων συνδέθηκε με τα τρία στάδια του παραγωγικού ρόλου της αισθητικής, την αναγνωριστική επαφή με το ερέθισμα, την απόκτηση οικειότητας και την αξιοποίηση των γνώριμων εργαλείων. Στο τρίτο στάδιο ο ένας από τους δύο μαθητές ανέπτυξε πρωτότυπες συνδέσεις ανάμεσα στα μαθηματικά και την ποίηση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αισθητική εντοπίζεται στη μαθηματική επιστήμη ήδη ακόμη από τις πρώτες προσπάθειες του ανθρώπου για την οργανωμένη λογική σκέψη και αιτιολόγηση (Reiss, 2008). Ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι τα μαθηματικά αντικείμενα και οι σχέσεις μεταξύ τους περιέχουν την ύψιστη ομορφιά και ότι η αναζήτηση της μαθηματικής αλήθειας ως διαδικασία αποτελεί αισθητική εμπειρία. Ο Descartes στη φιλοσοφία του ως προς τις τέχνες και ιδιαίτερα τη μουσική και τη ζωγραφική είχε την πεποίθηση ότι η ομορφιά εξασφαλίζεται μέσω των μαθηματικών και της αρμονίας (Reiss, 2008). Ανά τις ιστορικές περιόδους και τις κοινωνικές και φιλοσοφικές συνθήκες και ανάγκες διαμορφώθηκαν διαφορετικές αντιλήψεις για την αισθητική στα μαθηματικά. Η παραδοσιακή αντίληψη θεωρούσε ότι η αισθητική αποτελούσε ποιοτικό χαρακτηριστικό του μαθηματικού αντικειμένου και ότι η αξία της ήταν ανεξάρτητη από την ανθρώπινη ύπαρξη και εμπειρία.

Στις σύγχρονες αντιλήψεις, η παραπάνω προσέγγιση άρχισε να διαφοροποιείται και να επικρατεί η οπτική η οποία θεωρεί την αισθητική ως χαρακτηριστικό της δράσης και όχι του μαθηματικού αντικειμένου αυτού κάθε αυτού (Sinclair, 2004; 2008). Η Sinclair (2004) περιγράφει ότι η αισθητική εμπειρία λειτουργεί με παραγωγικό τρόπο στον μαθητή όταν αυτός αισθάνεται ότι τα αντικείμενα ή οι δράσεις που προκύπτουν κατά τη μαθηματική διαδικασία έχουν κάποιο νόημα για τον ίδιο και έτσι ωθείται στην περαιτέρω διερεύνησή τους. Η αισθητική επιδρά παραγωγικά, κυρίως ενστικτωδώς ή υποσυνείδητα κατά τη διαδικασία της διερεύνησης και της ανακάλυψης λύσεων ή ιδεών. Είναι αυτή που καθοδηγεί τις πράξεις

και τις επιλογές των εμπλεκόμενων κατά τη διαδικασία της νοηματοδότησης αντικειμένων ή σχέσεων.

Στην παρούσα έρευνα θα μελετηθεί η εξέλιξη της αισθητικής διερεύνησης κατά τη διαδικασία επίλυσης ανοιχτών μαθηματικών προβλημάτων. Το πρόβλημα αφορά στη δημιουργία συνδέσεων ανάμεσα σε δύο ποιήματα με τρεις πολύ γνωστές μαθηματικές αποδείξεις. Συγκεκριμένα, μελετάται πώς δύο μαθητές Γ' Λυκείου προσπαθούν να συνδέσουν τις μαθηματικές αποδείξεις με τα ποιήματα και πώς αιτιολογούν τις συνδέσεις τους. Η δραστηριότητα αυτή των μαθητών διατηρεί στοιχεία διερεύνησης, μιας δράσης που συνδέεται άμεσα με την αισθητική των μαθηματικών και ειδικά τον παραγωγικό (generative) ρόλο της (Sinclair, 2004). Η εργασία μελετά: Πώς εξελίσσεται η αισθητική διερεύνηση κατά την προσπάθεια των δύο μαθητών να συνδέσουν ποιήματα με μαθηματικές αποδείξεις;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Αντιλήψεις για την αισθητική των μαθηματικών

Σύμφωνα με τους Cupchik και Winston (1996), η αισθητική εμπειρία είναι μια ψυχολογική διαδικασία κατά την οποία η προσοχή είναι επικεντρωμένη σε ένα αντικείμενο, ενώ παράλληλα τα άλλα αντικείμενα, γεγονότα και καθημερινές ανησυχίες αναστέλλονται. Η βασική συνθήκη ώστε ένα αντικείμενο να χαρακτηριστεί αισθητικό είναι η υπέρβαση από το συμβολικό επίπεδο σε ένα νόημα (Marcovic, 2012). Ο Dewey (1934) εντοπίζει την αισθητική στην καθημερινή ανθρώπινη δραστηριότητα, δίνει προσοχή όχι στα αισθητικά κριτήρια αλλά αντιθέτως στην τομή μεταξύ συναισθημάτων και σκέψεων που συμβαίνουν κατά την εμπειρία (Stroud, 2014). Από τη στιγμή που οι αισθητικές ποιότητες είναι υποκειμενικές και συνυφασμένες με το περιεχόμενο, είναι κατά συνέπεια εξελίξιμες και μοιράζονται μέσω της κοινωνικής διάδρασης (Sinclair, 2004). Είναι οι καθιερωμένες πρακτικές σε επίπεδο τάξης αυτές που θα ωθήσουν ή όχι τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τις αισθητικές ποιότητες (Sinclair, 2008). Η Sinclair (2004; 2008) υποστηρίζει ότι η αισθητική των μαθηματικών ικανοποιεί τρεις ρόλους στην εκπαίδευση: τον αξιολογητικό (evaluative), τον παραγωγικό (generative) και τον παρακινητικό (motivational).

Ο παραγωγικός ρόλος (generative role) της αισθητικής εντοπίζεται στους τρόπους συλλογισμού που συναντώνται στη διαδικασία διερεύνησης. Ο όρος «generative» που χρησιμοποιεί ο Poincaré (1908/1956) περιγράφει το γεγονός ότι είναι υπεύθυνος για τη γέννηση νέων ιδεών, οι οποίες δε θα μπορούσαν να έχουν προκληθεί μόνο από λογικά βήματα. Η δημιουργική πτυχή της μαθηματικής διερεύνησης πραγματοποιείται όταν τα μέλη της μαθηματικής κοινότητας συμβαίνει να σκέφτονται ή να δρουν μαθηματικά, χρησιμοποιώντας νέους τρόπους οι οποίοι δεν ήταν

προσβάσιμοι (Riling, 2022). Ερευνητές που μελετούν τον παραγωγικό ρόλο της αισθητικής ορίζουν τρία στάδια διερεύνησης: την *αναγνωριστική επαφή* (getting a feel) με το ερέθισμα, την *απόκτηση οικειότητας* (establishing intimacy) με την νέα κατάσταση και την *απόλαυση* (enjoying the craft) *αξιοποίησης γνώριμων εργαλείων* (mastered tools) (Hanazono, 2018).

Τα ανοικτά προβλήματα και η δημιουργική σκέψη

Σε αντίθεση με τα κλειστά προβλήματα, όπου η αξιολόγηση περιλαμβάνει τη δυαδικότητα της σωστής ή λανθασμένης απάντησης, έρευνες έδειξαν ότι η δημιουργική σκέψη είναι ισχυρά συνδεδεμένη με την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων (Kwon et al., 2006). Ο Pehkonen (1997) ορίζει τα προβλήματα ως ανοικτά, όταν η αφετηρία τους ή ο στόχος τους δεν είναι σαφώς διατυπωμένος ή έχουν πολλαπλές λύσεις ή πολλαπλές απαντήσεις. Μια ειδική περίπτωση ανοιχτών προβλημάτων είναι η δημιουργία συνδέσεων ανάμεσα στα μαθηματικά και τις τέχνες (Schoevers, Leseman & Kroesbergen, 2020). Φαίνεται ότι τα μαθηματικά είναι η γλώσσα στην οποία οι δομές, τα μοτίβα και οι σχέσεις χρησιμοποιούνται για την επικοινωνία αισθητικών φαινομένων (Bjorklund & Ahlskog-Bjorkman, 2017). Οι δραστηριότητες που συνδυάζουν μαθηματικά και τέχνες φαίνεται να εγείρουν θετικά συναισθήματα για τη μάθηση των μαθηματικών τα οποία μπορούν να υποστηρίξουν τους μαθητές να εμβαθύνουν στο αντικείμενο, να ενισχύσουν την ικανότητά τους στην επίλυση προβλημάτων και να εξελίσσουν τη μαθηματική διαίσθηση (Nuton, 2018). Οι συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών και τέχνης συνεπάγονται την ενίσχυση της δημιουργικότητας και εντείνουν την αισθητική εμπειρία (Lingke & Chang, 2019).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πλαίσιο της έρευνας

Μελετήθηκαν οι απαντήσεις δύο μαθητών Γ' Λυκείου, θετικής κατεύθυνσης. Η επιλογή των μαθητών έγινε κυρίως με βάση την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Ο λόγος της επιλογής ήταν η ενίσχυση της πιθανότητας να αξιοποιήσουν οι συμμετέχοντες γνωστά μαθηματικά εργαλεία. Τα ερευνητικά δεδομένα ήταν οι *γραπτές απαντήσεις των μαθητών στο φύλλο εργασίας*, καθώς επίσης, *οι ηχογραφήσεις και οι σημειώσεις πεδίου* που καταγράφηκαν από την ερευνήτρια κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Ο χρόνος της δραστηριότητας ήταν δύο ώρες. Η ερευνήτρια ενημέρωσε τους μαθητές ότι οι απαντήσεις δεν είναι σωστές ή λάθος και ότι η ποιότητα των απαντήσεών τους θα αξιολογηθεί ως προς την αιτιολόγηση της σκέψης τους. Δόθηκε επίσης το περιθώριο οι μαθητές να αναζητήσουν στο διαδίκτυο οποιαδήποτε μαθηματική πληροφορία ήταν απαραίτητη.

Το ανοιχτό πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές

Δίνονται στους μαθητές αρχικά δύο ποιήματα: Το *παιδί και οι ληστές* και το *ποίημα ντίλι-ντίλι το καντήλι*. Το πρώτο νοηματικά φαίνεται να διατρέχει μία άπειρη κυκλική πορεία. Το δεύτερο έχει περισσότερο τη μορφή ακολουθίας, η οποία σταθερά εξελίσσεται.

Πίνακας 1: Τα δύο ποιήματα και οι τρεις μαθηματικές αποδείξεις

ΤΟ ΠΑΙΔΙ ΚΑΙ ΟΙ ΛΗΣΤΕΣ Ήταν ένα παιδί και κάτω απ’ το κρεβάτι του πλαγιάζανε τη νύχτα δυο ληστές. Άκουγε κάθε νύχτα τα μαχαίρια τους, άκουγε τα σκοτεινά τους λόγια κι έλεγε ο ένας ‘Να τον πάμε στα θουνά, να τον κάνουμε ληστή’ κι έλεγε ο άλλος ‘Να του θγάλουμε τα μάτια να τον κάνουμε ζητιάνο βιολιστή’. Κάθε νύχτα το παιδί, τρελό από το φόβο του, μέσα από κάμαρες και σκάλες και διαδρόμους τους ξέφευγε για να χωθεί στην αγκαλιά της και εκείνη το έπαιρνε και το ‘παίρνε και το χάιδευε, το κοιμίζει πάντα με το ίδιο παραμύθι: Ήταν ένα παιδί και κάτω απ’ το κρεβάτι του πλαγιάζανε τη νύχτα δυο ληστές. Άκουγε κάθε νύχτα τα μαχαίρια τους, άκουγε τα σκοτεινά τους λόγια κι έλεγε ο ένας ‘Να τον πάμε στα θουνά, να τον κάνουμε ληστή’ κι έλεγε ο άλλος ‘Να του θγάλουμε τα μάτια να τον κάνουμε ζητιάνο βιολιστή’. Κάθε νύχτα το παιδί, τρελό από το φόβο του, μέσα από κάμαρες και σκάλες και διαδρόμους τους ξέφευγε για να χωθεί στην αγκαλιά της κι εκείνη το ‘παίρνε και το χάιδευε, το κοιμίζει πάντα με το ίδιο παραμύθι: ...	ΝΤΙΛΙ ΝΤΙΛΙ ΤΟ ΚΑΝΤΗΛΙ Ντίλι <u>ντίλι ντίλι</u>, <u>ντίλι</u> το καντήλι Που έφεγγε και κένταγε, η κόρη το μαντίλι. Πήγε και ο ποντικός, και πήρε το φυτίλι Μέσ’ από το καντήλι Που έφεγγε και κένταγε η κόρη το μαντίλι. Ντίλι, <u>ντίλι ντίλι</u>, της κόρης το μαντίλι. Πάει και η γάτα που έφαγε τον ποντικό Που πήρε το φυτίλι μέσ’ από το καντήλι Που έφεγγε και κένταγε η κόρη το μαντίλι Ντίλι, <u>ντίλι ντίλι</u>, της κόρης το μαντίλι Πάει και ο σκύλος που έφαγε τη γάτα Που έφαγε τον ποντικό Που πήρε το φυτίλι μέσ’ από το καντήλι Που έφεγγε και κένταγε η κόρη το μαντίλι Ντίλι, <u>ντίλι ντίλι</u>, της κόρης το μαντίλι
Ποίημα 1: Το παιδί και οι ληστές	Ποίημα 2: Ντίλι... το καντήλι.
Fausthaber: Geometric proof of a Faulstich formula The sum of consecutive odd numbers always adds up to a square number: $1 = 1^2$ $1 + 3 = 2^2$ $1 + 3 + 5 = 3^2$ $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ The reason is explained in the picture below: adding the next odd number creates a suitable layer for the next square.	Geometric: Sum of an infinite geometric series $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1.$ We can see this by cutting a square with total area 1 into little pieces.
Απόδειξη 1: το άθροισμα των διαδοχικών μονών αριθμών	Απόδειξη 2: Το άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου που συγκλίνει στο 1
Gauss: Gauss's summation trick for positive integers A quick way of computing $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = 5050$ is as follows: write the total sum twice and add the columns $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100$ $100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 3 + 2 + 1$ $101 \quad 101 \quad 101 \quad 101 \quad \dots \quad 101 \quad 101 \quad 101$ This yields a total of 100 times 101 (giving 10100) and half of that is exactly 5050.	
Απόδειξη 3: Η απόδειξη του Gauss για το άθροισμα 100 διαδοχικών φυσικών αριθμών	

Στη συνέχεια δόθηκαν τρεις μαθηματικές αποδείξεις (Johnson & Steinerberger, 2017). Η πρώτη είναι σχηματική απόδειξη του αθροίσματος διαδοχικών μονών αριθμών, η δεύτερη αποδεικνύει σχηματικά ότι το άθροισμα άπειρων όρων συγκεκριμένης γεωμετρικής προόδου ισούται με 1 και η τρίτη δείχνει μία απόδειξη του Gauss για το άθροισμα 100 διαδοχικών φυσικών αριθμών (Πίνακας 1). Ζητήθηκε από τους μαθητές:

Διαβάστε κάθε ένα από τα δύο ποιήματα. Τι παρατηρείτε στο καθένα; Στη συνέχεια, μελετήστε τις τρεις αποδείξεις που ακολουθούν. Προσπαθήστε να αντιστοιχίσετε κάθε ποίημα με μία απόδειξη. Αιτιολογήστε τις επιλογές σας.

Το παραπάνω έργο στο οποίο κλήθηκαν οι μαθητές να απαντήσουν θεωρείται ανοικτό διότι δε δίνει ενδείξεις για την κατεύθυνση εργασίας των μαθητών. Οι μαθητές έτυχε να έχουν διδαχθεί τις μαθηματικές αποδείξεις, κάτι που δεν είχε προβλεφθεί ερευνητικά.

Ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων

Η ανάλυση ακολούθησε τα παρακάτω βήματα, 1^ο βήμα: αναζητήσαμε τα 3 στάδια διερεύνησης, όπως αυτά παρουσιάζονται στον Hanazono (2018), στα ερευνητικά δεδομένα και για τους δύο μαθητές, 2^ο βήμα: αναζητήθηκαν αποσπάσματα, ειδικά στα φύλλα εργασίας των συμμετεχόντων, στα οποία να αναγνωρίζουμε συνδέσεις ανάμεσα στα ποιήματα και στα μαθηματικά ανά στάδιο διερεύνησης, 3^ο βήμα: οι συνδέσεις αυτές κωδικοποιήθηκαν ανά μαθητή, 4^ο βήμα: απαντάμε στο ερευνητικό μας ερώτημα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ακολουθούν τα τρία στάδια εξέλιξης του παραγωγικού ρόλου της αισθητικής, όπως αυτά αναγνωρίστηκαν στη διαδικασία διερεύνησης του προβλήματος από τους δύο μαθητές.

Αναγνωριστική επαφή με το ερέθισμα

Στο στάδιο αυτό οι μαθητές αποκτούν μία πρώτη αίσθηση της κατάστασης οργανώνοντας και κατηγοριοποιώντας τα δεδομένα. Η επίλυση της δραστηριότητας διήρκεσε 2 ώρες. Στα πρώτα 40 - 45 λεπτά οι μαθητές απλώς διάβαζαν επανειλημμένα τα ποιήματα, χωρίς να γράψουν τίποτα στο φύλλο εργασίας [Ερευνήτρια, Σημειώσεις πεδίου]. Όσον αφορά τις μαθηματικές αποδείξεις, οι συμμετέχοντες δεν αφιέρωσαν ιδιαίτερο χρόνο γιατί ήταν ήδη γνωστές σε αυτούς. Συγκεκριμένα, όταν ρωτήθηκε ο Κ.: *θέλεις να σου εξηγήσω κάτι στα μαθηματικά;* Αποκρίθηκε ο Κ.: *όχι, γιατί αυτό μας το κάνανε στην Α' Λυκείου*. Συνεπώς, η διερεύνηση σε αυτό το στάδιο αφιερώθηκε αποκλειστικά στην κατανόηση των ποιημάτων, ίσως και των χαρακτηριστικών τους που θα μπορούσαν να συνδεθούν με τα μαθηματικά.

Απόκτηση οικειότητας με το αντικείμενο

Σε αυτό το στάδιο οι μαθητές αρχίζουν να αναγνωρίζουν συνδέσεις ανάμεσα στα μαθηματικά και τα δύο ποιήματα. Συγκεκριμένα, ο Κ. προσπαθεί να αποκωδικοποιήσει τα δύο ποιήματα *αναζητώντας τα δομικά τους χαρακτηριστικά λαμβάνοντας υπόψιν τα νοήματα που περιγράφονται σε κάθε ποίημα*. Οι αρχικές παρατηρήσεις του Κ. για το ποίημα 1 είναι ότι

αναγνωρίζει α) νοηματικές στροφές στο ποίημα, η πρώτη στροφή περιλαμβάνει τους στίχους 1 με 7 (από «ήταν ένα παιδί» μέχρι «το ίδιο παραμύθι») και τη νοηματική συνέχεια ανάμεσα στις στροφές και β) αναγνωρίζει την επ' άπειρο επανάληψη του νοήματος κάθε στροφής. Τα παραπάνω φαίνονται στο χαρακτηριστικό απόσπασμα 1.

Χαρακτηριστικό απόσπασμα 1

Στο ποίημα 1 παρατηρείται η επανάληψη της ίδιας στροφής [...] Θα μπορούσαμε να πούμε πως η δεύτερη στροφή αποτελεί συνέχεια της πρώτης [...] Δηλαδή υπάρχει μία σύνδεση των δύο στροφών η οποία θα μπορούσε να συνεχιστεί επ' άπειρον χωρίς να τελειώσει ποτέ καθώς η αρχή της στροφής αποτελεί απάντηση στον τελευταίο στίχο». [Φύλλο εργασίας, Κ.]

Στο ποίημα 2 ο Κ. αναγνωρίζει επίσης επαναλήψεις: «ο συγγραφέας κάθε φορά επιλέγει να επαναλαμβάνει τους προηγούμενους στίχους», και την απειρία της διαδικασίας: «θα μπορούσε εδώ η διαδικασία να συνεχιζόταν επ' άπειρον». Ταυτόχρονα, στο ποίημα 2 παρατηρεί κάποια άλλα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, όπως ότι α) κάθε φορά προστίθεται ένα καινούριο γεγονός «σε κάθε νέα στροφή παρουσιάζεται και ένα καινούριο γεγονός», β) το γεγονός αυτό αποτελεί λογική συνέχεια του προηγούμενου, γ) τα ρήματα που χρησιμοποιεί ο ποιητής συνδέονται με τον θάνατο: «επιπλέον, σε κάθε νέο στίχο το ρήμα ενέργειας που αναγράφεται σχετίζεται με τον θάνατο» και δ) την αποδοχή λογικών παραδοχών: «δεν θα μπορούσαμε να πούμε ότι πάει και ο Σούπερμαν που διαμέλισε τον χασάπη, καθώς δεν αποτελεί λογική κατασκευή».

Ο Σ. συνδέει τα ποιήματα αναγνωρίζοντας και στα δύο την επανάληψη: «Διαβάζοντας τα δύο ποιήματα, το πρώτο χαρακτηριστικό που εντοπίζεται και στα δύο είναι η επανάληψη». Στη συνέχεια, προσπαθεί να αναγνωρίσει διαφορές ανάμεσα στη δομή τους σε επίπεδο νοηματικού περιεχομένου. Στο ποίημα 1 αναγνωρίζει μια *άπειρη επανάληψη* του ίδιου θέματος ενώ στο ποίημα 2 παρατηρεί τη *χρονική παράθεση γεγονότων* από το πιο πρόσφατο στο πιο παλιό. Τα παραπάνω φαίνονται στο χαρακτηριστικό απόσπασμα 2.

Χαρακτηριστικό απόσπασμα 2

Στο πρώτο παρουσιάζεται ένας φαύλος κύκλος. Πρόκειται δηλαδή για μία επαναλαμβανόμενη επ' άπειρον παράθεση μίας ιστορίας, χωρίς ωστόσο να αποδίδεται το τέλος της [...] Στο δεύτερο ποίημα παρουσιάζεται μία σειρά γεγονότων από το πιο πρόσφατο στο πιο παλιό, στην οποία όμως κάθε φορά προστίθεται ένα ακόμη πρόσφατο γεγονός στην αφήγηση, γυρνώντας ωστόσο στο ίδιο αρχικό γεγονός». [Φύλλο εργασίας, Σ.]

Συνεπώς, και οι δύο μαθητές αρχίζουν να αναγνωρίζουν μαθηματικά χαρακτηριστικά στη δομή των δύο ποιημάτων, όπως επαναλήψεις, άπειρες διαδικασίες και χρονική εξέλιξη γεγονότων.

Αξιοποίηση γνώριμων εργαλείων

Το στάδιο αυτό αφορά στην αξιοποίηση συνδέσεων ανάμεσα στη νοηματική δομή των ποιημάτων και στις μαθηματικές αποδείξεις. Στην απάντησή τους στο πρόβλημα, και οι δύο μαθητές αντιστοίχισαν το ίδιο ποίημα με την ίδια μαθηματική απόδειξη, αλλά με διαφορετική αιτιολόγηση.

Συγκεκριμένα, ο Κ. αντιστοίχισε το ποίημα 1 «*το παιδί και οι ληστές*» με την απόδειξη 2 (άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου). Για να αιτιολογήσει χρησιμοποιεί επιχειρήματα που στηρίζονται στις διαπιστώσεις του στο προηγούμενο στάδιο διερεύνησης, όπως «*θα αντιστοιχίζα την απόδειξη 2 με το ποίημα 1, καθώς και οι δύο μπορούν να συνεχιστούν ατελείωτα*». Ταυτόχρονα, αναγνωρίζει το εξής κοινό χαρακτηριστικό της απόδειξης 2 και του ποιήματος 1: αναφέρει ότι όπως στην απόδειξη «*κάθε όρος είναι ο μισός του προηγούμενου ($1/2, 1/4, 1/8 \dots$) έτσι και στο ποίημα κάθε επόμενη στροφή είναι απάντηση στον τελευταίο στίχο της προηγούμενης*» [Φύλλο εργασίας, Κ.].

Ο Σ., όπως και ο Κ., αντιστοιχίζει επίσης το ίδιο ποίημα με την ίδια απόδειξη παρόλα αυτά αιτιολογεί διαφορετικά την επιλογή του. Συγκεκριμένα, αναγνωρίζει στο ποίημα και στην απόδειξη «*μικρές πραγματικότητες*» που διατηρούν μια *χωρική διάσταση* και που στη συνέχεια «*φθίνουν*» έχοντας όμως μια «*σταθερή βάση*». Η βάση αυτή είναι το όριο του αθροίσματος που είναι το 1 ενώ στο ποίημα είναι η αρχική πραγματικότητα που περιγράφεται στην πρώτη στροφή. Τα παραπάνω φαίνονται στο χαρακτηριστικό απόσπασμα 3.

Χαρακτηριστικό απόσπασμα 3

Όπως στην απόδειξη, όπου προσθέτουμε συνεχώς μικρότερα (άπειρα) κομμάτια ενός τετραγώνου με εμβαδόν 1 και το άθροισμά τους είναι σταθερό έτσι και στο ποίημα με την επανάληψη της ιστορίας εισχωρούμε σε ολόένα και μικρότερες «*πραγματικότητες*», η κάθε μία από τις οποίες αποτελεί κάποιο μέρος της αμέσως προηγούμενης, έχοντας όμως σταθερή βάση. Η ομοιότητα ανάμεσα στο ποίημα και την απόδειξη αυτή είναι ότι όσο προχωράμε στη «*λούπα*» του ποιήματος ο «*χώρος*» της ιστορίας γίνεται σταδιακά μικρότερος, καθώς εξιστορούνται τα γεγονότα μέσα από την αρχική ιστορία όπως σταδιακά μικρότερα γίνονται και τα κλάσματα που προσθέτουμε στην απόδειξη [Φύλλο εργασίας, Σ.].

Δηλαδή, ο Σ. αναπτύσσει έναν πρωτότυπο και ευρηματικό τρόπο σύνδεσης ανάμεσα στο ποίημα 1 και την απόδειξη 2. Συγκεκριμένα,

αποδομεί το νοηματικό περιεχόμενο του ποιήματος σε «μικρές πραγματικότητες» που «συνέχεια φθίνουν». Ταυτόχρονα, αναγνωρίζει ανάλογη εξέλιξη στους όρους του αθροίσματος της απόδειξης 2.

Οι δύο μαθητές συνέδεσαν το ποίημα 2 (*ντίλι ντίλι το καντήλι*) με την απόδειξη 1 (*το άθροισμα των συνεχόμενων μονών αριθμών*). Οι αιτιολογήσεις τους ανέφεραν ότι και στα δυο προστίθεται ένα νέο στοιχείο (στίχος ή αριθμός) διατηρώντας πάντα τα προηγούμενα «όσο προχωράμε στη μαθηματική απόδειξη επαναλαμβάνουμε και προηγούμενους μονούς αριθμούς όπως και στο ποίημα επαναλαμβάνουμε τους παραπάνω στίχους». Ο Κ. εστιάζει στην επίτευξη της συνοχής της διαδικασίας, ενώ ο Σ. στη συμπλήρωση της ιστορίας (ποίημα) και του τετραγώνου (απόδειξη). Ο Σ. αναφέρει «τα γεγονότα συμπληρώνουν την ιστορία, με παρόμοιο τρόπο με τον οποίο συμπληρώνουν οι προστιθέμενοι περιττοί αριθμοί τα επόμενα τετράγωνα στην απόδειξη».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το ανοιχτό πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές τους βοήθησε να εμπλακούν με διάφορα στάδια αισθητικής διερεύνησης. Οι μαθητές αναζητώντας συνδέσεις ανάμεσα στα ποιήματα και στις μαθηματικές αποδείξεις ανέπτυξαν στοιχεία αισθητικής διερεύνησης και ιδιαίτερα του παραγωγικού ρόλου της αισθητικής (Hanazono, 2008; Sinclair, 2004).

Η πορεία διερεύνησης των 2 μαθητών ακολούθησε τα στάδια εξέλιξης του παραγωγικού ρόλου της αισθητικής, όπως αυτά αναφέρονται στη βιβλιογραφία με κάποιες μικρές διαφοροποιήσεις και με τις απαραίτητες προσαρμογές στο συγκεκριμένο πλαίσιο μελέτης. Συγκεκριμένα, στο πρώτο στάδιο οι μαθητές εστίασαν στο μη οικείο σε αυτούς μέρος του έργου (διάβάζαν και ξαναδιάβάζαν τα δύο ποιήματα) με σκοπό την απόδοση νοήματος (Marcovic, 2012) σε αυτά στο πλαίσιο του έργου που τους είχε ζητηθεί. Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές ανέπτυξαν οικειότητα με τη νοηματική δομή των ποιημάτων αναγνωρίζοντας σε αυτά μοτίβα, επαναλήψεις και άπειρες διαδικασίες. Στο τρίτο στάδιο, οι μαθητές αξιοποίησαν εργαλεία που είχαν αναπτύξει από τα προηγούμενα δύο στάδια διερεύνησης αλλά και από τη μαθηματική τους εκπαίδευση με σκοπό τη σύνδεση ποιημάτων και μαθηματικών αποδείξεων. Συνεπώς, η αισθητική διερεύνηση εξελίσσεται χρονικά και κάθε στάδιο αποτελεί προϋπόθεση για το επόμενο. Παρατηρήθηκε επίσης ότι στο τρίτο στάδιο ο τρόπος σκέψης των δύο μαθητών διαφοροποιήθηκε και ότι αναδείχθηκαν στοιχεία δημιουργικής σκέψης ιδιαίτερα σε έναν από τους δύο μαθητές. Συγκεκριμένα, ο Σ. αποδόμησε τα δεδομένα του ποιήματος και τους έδωσε χώρο-χρονική διάταξη, διακρίνοντας «μεγαλύτερες» και «μικρότερες» πραγματικότητες στα ποιήματα αντίστοιχες με τους κλασματικούς όρους της απόδειξης. Οι απαντήσεις του Σ. διαθέτουν

πρωτοτυπία, φαντασία και ευρηματικότητα. Τα στοιχεία αυτά συνδέονται με την ανάπτυξη της δημιουργικής και αποκλίνουσας σκέψης (Leikin, 2018). Τέλος, η σύγχρονη αντίληψη της αισθητικής που τη βλέπει να εξελίσσεται μέσα από τη μαθηματική διερεύνηση είναι ένας παράγοντας που πρέπει να ληφθεί υπόψιν στη διδασκαλία. Όπως αναφέρει η Sinclair (2004) η αναγνώριση της αισθητικής δομής των μαθηματικών μπορεί να προσφέρει βαθύτερη εμπειρία μάθησης σε επιστήμονες μαθηματικούς και μαθητές στη σχολική τάξη των μαθηματικών. Σε αυτή την κατεύθυνση, οι συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών και τέχνης μπορούν να υποστηρίξουν τη μαθηματική διερεύνηση, την ανάπτυξη δημιουργικής σκέψης και να εντείνουν την αισθητική εμπειρία των εμπλεκομένων σε τέτοιου είδους δραστηριότητες (Lingke & Chang, 2019).

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Björklund, C., & Ahlskog-Björkman, E. (2017). Approaches to teaching in thematic work: early childhood teachers' integration of mathematics and art. *International Journal of Early Years Education*, 25(2), 98-111. doi: <https://doi.org/10.1080/09669760.2017.1287061>
- Cupchik, G. C., & Winston, A. S. (1996). Confluence and divergence in empirical aesthetics, philosophy, and mainstream psychology. In G. G. Berntson & J. T. Cacioppo (Eds.), *Handbook of perception and cognition: Cognitive ecology* (pp. 61-85). Academic Press.
- Dewey, J. (1934). *Art as experience*. New York, NY: Perigree.
- Hanazono, H. (2018). The qualitative differences in generative characteristic of the aesthetic sensibility: Analysis of learners' problem solving. *CERME 10*, Dublin, Ireland. hal-01935964.
- Johnson, S., & Steinerberger, S. (2017). The aesthetic psychology of mathematics. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3062208>.
- Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). *Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach*. Asia Pacific Education Review, 7, 51–61. <https://doi.org/10.1007/BF03036784>.
- Leikin, R. (2018). Openness and Constraints Associated with Creativity-Directed Activities in Mathematics for All Students. In: Amado, N., Carreira, S., Jones, K. (eds) *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving: A focus on technology, creativity and affect*, 387-397. Research in Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_17.
- Lingke, K. O. N. G., & Chang, Y. C. (2019). The effect of teachers' savoring on creative behaviors: Mediating effects of creative self-

- efficacy and aesthetic experience. *International Journal of Educational Methodology*, 5(3), 325-335. <https://doi.org/10.12973/ijem.5.3.325>.
- Markovic, S. (2012). Components of aesthetic experience: Aesthetic fascination, aesthetic appraisal, and aesthetic emotion. *i-Perception*, 3(1), 1–17. <http://dx.doi.org/10.1068/i0450aap>.
- Nutov, L. (2018). When Mathematics Meets Art: How Might Art Contribute to the Understanding of Mathematical Concepts? In *Proceedings of Bridges 2018: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture* (pp. 341-346).
- Pehkonen, E. (1997). Use of problem fields as a method for educational change. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classrooms* (pp. 73-84). Helsinki, Finland: University of Helsinki, Department of Teacher.
- Poincare, H. (1908/1956). Mathematical creation. In J. Newman (Ed.), *The world of mathematics* Vol. 4, (pp. 2041–2050). New York: Simon and Schuster.
- Reiss, T. J. (2008). Early Modern Philosophy and Changing ‘Who - Ness’. *Metascience*, 17(2), 263-267. <https://doi.org/10.1007/s11016-008-9188-z>.
- Riling, M. (2022). Aesthetic Dimensions of Student Mathematical Creativity. In Lischka, A. E., Dyer, E. B., Jones, R. S., Lovett, J. N., Strayer, J., & Drown, S. *Proceedings of the forty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 1869-1877. Middle Tennessee State University.
- Schoevers, E. M., Leseman, P. P., & Kroesbergen, E. H. (2020). Enriching mathematics education with visual arts: Effects on elementary school students’ ability in geometry and visual arts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 1613-1634. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10018-z>
- Sinclair, N. (2004). The roles of the aesthetic in mathematical inquiry. *Mathematical thinking and learning*, 6(3), 261-284. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0603_1
- Sinclair, N. (2008). Attending to the Aesthetic in the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 29–35. <http://www.jstor.org/stable/40248596>.
- Stroud, S. R. (2014). The art of experience: Dewey on the aesthetic. In *Practicing Pragmatist Aesthetics* (pp. 33-46). Brill. https://doi.org/10.1163/9789401210812_004