από τον Απειροστικό Λογισμό. Οι ρίζες της μεθόδου μπορούν να αναζητηθούν ...ματικά της εποχής του Νεύτωνα και του Cauchy, ενώ η πρόσφατη αφηρημένη ... της είναι η μέθοδος συστολής του Banach. Η μέθοδος Picard προσφέρει μόνο ... ύπαρξη. Το εργαλείο για την ολική ύπαρξη, όποτε αυτή είναι δυνατή, είναι η ... του Gronwall. Κλείσαμε το κεφάλαιο με τη συνεχή εξάρτηση της λύσης από ... συνθήκες και το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης, το κατ΄ εξοχήν ... της τοπικής ανάλυσης.

Ασκήσεις

Να μελετηθεί η επιλυσιμότητα του Π.Α.Τ.

$$x' = f(x) \ , \ x(0) = 0,$$

στην κλάση των κατά τμήματα C^1 συναρτήσεων, όπου

$$(a) \qquad f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$(b) \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$(g) \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$$

Να μετατραπούν τα ακόλουθα Π.Α.Τ. σε ολοκληρωτικές εξισώσεις και να προσδιοριστούν οι πρώτες τέσσερεις προσεγγίσεις Picard:

(α) $\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2 \ , \ y(1) = 2,$

(β) $\frac{dy}{dt} = 1 - y^3 \ , \ y(-1) = 3.$

(α) Κάνοντας χρήση της μεθόδου Euler να βρεθούν προσεγγίσεις της λύσης στους χρόνους $t = 0.1$, $t = 0.2$, $t = 0.3$ και $t = 0.4$, με βήμα $h = 0.1$ για τα ακόλουθα Π.Α.Τ.:

(α) $y' = 2y - 1 \ , \ y(0) = 1,$

(β) $y' = 0.5 - t + 2y \ , \ y(0) = 1,$

(γ) $y' = 3\cos t - 2y \ , \ y(0) = 0.$

(β) Να επαναληφθεί το (α) για $h = 0.05$.

Δείξτε ότι αν $\{\varphi_n(t)\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ και $\varphi_n \to \varphi$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$ τότε ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

2.5 Με χρήση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων να δειχ
συνάρτησης $x(t)$ τέτοιας ώστε

$$x(t) = \begin{cases} e^t \ , & -1 \leq t \leq 0, \\ 1 + \int_0^t g(s)[x(s-1) + x(s)]\, ds \ , & 0 < t \end{cases}$$

όπου g συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[0, 2]$.

2.6 Θεωρούμε την εξίσωση $F(x, \lambda) = 0$ για (x, λ) κοντά στο $(0, 0)$

$$F(x, \lambda) = \lambda + (1 + \lambda)x + x^2.$$

Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $x = \psi(\lambda)$, $F\Big(\psi(\lambda), \lambda\Big) = 0$
ύπαρξη εγγυάται το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης.

2.7 Να εφαρμοστεί το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης προκε
ότι υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\lambda + (1 - \lambda)x + x^3 = 0,$$

για (λ, x) κοντά στο $(1, -1)$.

2.8 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = f(t, y),$$

όπου $f(t+1, y) = f(t, y)$ και f όπως στο Θεώρημα 2.1. Έστω
που αντιστοιχεί στην αρχική τιμή y_0 για $t = t_0$. Να δειχθεί ότι

(α) $\quad y(t + 1, t_0 + 1, y_0) = y(t, t_0, y_0),$

(β) $\quad y(t + 1, t_0, y_0) = y\Big(t, t_0, y(t_0 + 1, t_0, y_0$

2.9 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = -y + c(t) \ \ , \ \ c(t + 1) = c(t) \ ,$$

όπου $c(t)$ συνεχής συνάρτηση. Στο παράδειγμα 1.14 δείξαμε ότι
1–περιοδική λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $y(0) =$

$$y_0^* = \frac{c_0}{1 - e^{-1}}.$$

Να δειχθεί ότι η 1–περιοδική λύση είναι ολικά ασυμπτωτικά ευ

$$\Big| y(t, 0, y_0) - y(t, 0, y_0^*) \Big| \to 0,$$

καθώς το $t \to +\infty$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τις συναρτήσεις $\phi_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $k = 0,1,2,\dots$ που ορίζονται από τις

$$\phi_0(t) = y(t,0,y_0)\ ,\ \phi_1(t) = y(t+1,0,y_0)\ ,\ \dots\ ,\ \phi_k(t) = y(t+k,0,y_0),$$

για $t \in [0,1]$ και χρησιμοποιήστε τη σχέση (β) της άσκησης 2.8.

2.10 Έστω $f(t,x)$ συνεχής συνάρτηση στο $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$ και μη φθίνουσα ως προς x για σταθεροποιημένο t. Έστω ακόμη g και h συνεχείς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο $[0,+\infty)$ που ικανοποιούν τις

$$h'(t) \leq f\big(t,h(t)\big)\ ,\ t \geq 0,$$

$$g'(t) = f\big(t,g(t)\big)\ ,\ t \geq 0.$$

(α) Εάν $h(0) < g(0)$ τότε $h(t) < g(t)$ για $t \geq 0$.

(β) Να δειχθεί ότι το συμπέρασμα του (α) δεν είναι κατ' ανάγκη σωστό αν $h(0) \leq g(0)$.

2.11 Θεωρώντας το Π.Α.Τ.

$$x' = 1 + x^{\frac{2}{3}}\ ,\ x(0) = 0,$$

να δειχθεί ότι η συνθήκη Lipschitz δεν είναι αναγκαία για το μονοσήμαντο των λύσεων.

2.12 Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} x' = x^2 + \dfrac{7}{8}e^{t^4} \\ x(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(α) Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη τοπικής λύσης.

(β) Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη ολικής λύσης.

2.13 Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να δειχθεί ότι το Π.Α.Τ. για το σύστημα

$$\begin{cases} x' = g(x) \\ y' = f(x)y \end{cases}$$

έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $[a,b]$.

Υπόδειξη: Κάνοντας χρήση της ιδιότητας Lipschitz να δειχθεί ότι $x_1(t) \equiv x_2(t)$. Εφαρμόστε Gronwall για να δείξετε ότι $y_1(t) \equiv y_2(t)$.

2.14 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{(y^2-4)(\sin^2 y^3 + \cos y - 2)}{2}\ , \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Αν $y = \varphi(t)$ είναι η λύση του Π.Α.Τ., εξηγήστε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) ισχύει ότι $\varphi(t) < 2$, για κάθε t.

2.15 Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{(1+t)^2}{(1+y)^2}.$$

Αν $y = \varphi(t)$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί την α συνθήκη $\varphi(0) = -0.2$, δείξτε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) ότι $\varphi(t) < t$, για t.

2.16 Έστω u συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο $[a, +\infty)$ που ικανοποιεί τη σότητα

$$u(t) \le c + \int_a^t b(s)\ [u(s)]^a\ ds,$$

για $t \ge a$, όπου $c \ge 0$, $0 < a < 1$ και b συνεχής μη αρνητική συνάρτησ $[a, +\infty)$. Να δειχθεί ότι

$$u(t) \le \left[c^{1-a} + (1-a)\int_a^t b(s)\, ds\right]^{\frac{1}{1-a}}\ ,$$

για $t \ge a$.

2.17 Έστω $C > 0$ σταθερά, F συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο $[1, +\infty)$, ώστε

$$tF(t) \le C + \int_1^t F(s)\, ds,$$

για $t \ge 1$. Να δειχθεί ότι

$$F(t) \le C\ , \quad \text{για } t \ge 1.$$

2.18 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x)\ , \quad t \ge 0\ , \quad x(0) = \xi > 0.$$

Υποθέτουμε ότι οι g_1, g_2, h_1, h_2 είναι θετικές συνεχείς συναρτήσεις στο [0 και

$$\int_\xi^{+\infty} \frac{dx}{g_1(x) + g_2(x)} = +\infty.$$

Να δειχθεί ότι η $x(t)$ υπάρχει στο $[0, +\infty)$, δηλαδή δεν εκρήγνυται σε πεπερα χρόνο.

Επωδός

Η ποιοτική θεωρία που παρουσιάσαμε κρατά την κατεύθυνση αλλά αγνοεί το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας. Η έμφαση είναι στη γεωμετρία και στο σύνολο των λύσεων της εξίσωσης. Το βασικό μαθηματικό αντικείμενο εδώ είναι το πεδίο κατευθύνσεων δηλαδή το διανυσματικό πεδίο. Τα διαγράμματα φάσης προσφέρουν εύκολα πληροφορία σχετικά με την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων, αλλά υστερούν σε σχέση με τις αναλυτικές λύσεις στο ότι αγνοούν τις κλίμακες χρόνου. Η γεωμετρική άποψη οδηγεί στην ταξινόμηση των εξισώσεων ανάλογα με το διάγραμμα φάσης.

Η γραμμικοποίηση είναι χρήσιμη κατ' αρχήν σε υπερβολικά σημεία ισορροπίας και δείχνει ότι τοπικά το διάγραμμα φάσης ταυτίζεται με το διάγραμμα της γραμμικής εξίσωσης.

Όταν η εξίσωση εξαρτάται από παράμετρο, το ενδιαφέρον στρέφεται στις τυχόν ποιοτικές αλλαγές των διαγραμμάτων φάσης καθώς η παράμετρος μεταβάλλεται. Η αντίστοιχη θεωρία είναι η θεωρία των διακλαδώσεων. Είδαμε ότι στο σύνορο μεταξύ ποιοτικά διαφορετικών καταστάσεων έχουμε μη υπερβολικά (ή εκφυλισμένα) σημεία ισορροπίας, και ότι η θεωρία των διακλαδώσεων στη μία διάσταση είναι καθαρά τοπικής φύσης. Η κατάσταση είναι διαφορετική στις περισσότερες διαστάσεις.

3.7 Ασκήσεις

3.1 Για καθεμία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας, υπολογίστε τη γραμμικοποιημένη εξίσωση γύρω από τα σημεία ισορροπίας, χαρακτηρίστε τα σημεία ισορροπίας ως υπερβολικά ή μη και μελετήστε την ευστάθειά τους. Τέλος κατασκευάστε τα διαγράμματα φάσης.

(α) $y' = 0$, (β) $y' = 2.1\,y(1-y)$,
(γ) $y' = 1 + y^2$, (δ) $y' = 1 - y^2$,
(ε) $y' = 2y^2 - y^3$, (στ) $y' = y - y^3 + 0.2$,
(ζ) $y' = 2\sin y$, (η) $y' = 1 - 2\sin y$,
(ϑ) $y' = 1 - \sin y$, (ι) $y' = y\sin y$,
(ια) $y' = a - y^3\sin(y^{-1}),\ a > 0$ (ιβ) $y' = y[1 - b(e^y - 1)]$.

Στην (ιβ) θεωρήστε τις ακόλουθες τιμές για το b: -1.1 , -1 , -0.1 , 0 και 0.1

3.2 Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα φάσης και να χαρακτηριστούν τα σημεία ισορροπίας των παρακάτω εξισώσεων.

(α) $y' = 3y(1-y)$.

(β) $y' = y^2 - 6y - 16$.

(γ) $y' = (y-2)\sin y$.

3.3 Να δειχθεί ότι οι ισοκλινείς της ομογενούς εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

δηλαδή οι καμπύλες στάθμης της f, $\{ (x,y) \mid f(x,y) = c \}$, όπου f τέτοια ώστε $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ για $\lambda \geq 0$, είναι στο x, y–επίπεδο ακτίνες διερχόμενες από την αρχή των αξόνων.

3.4 Να δειχθεί ότι οι ισοκλινείς της σχεδόν ομογενούς εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

όπου f τέτοια ώστε

$$f(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^{\beta-\alpha} f(x,y),$$

είναι παραβολοειδείς καμπύλες $y^\alpha = cx^\beta$.

3.5 Θεωρούμε ότι ένας πληθυσμός ψαριών εξελίσσεται σύμφωνα με τη διαφορική εξίσωση

$$y' = ky - cy^2 - h\ , \quad y(0) > 0.$$

Θεωρούμε τις k και c ως φιξαρισμένες θετικές σταθερές, ενώ την $h \in \mathbb{R}^+$ θετική παράμετρο και μελετούμε την επίδραση του ρυθμού αλίευσης h στον πληθυσμό $y(t)$.

(α) Εάν $0 < h \leq \dfrac{k^2}{4c}$ τότε υπάρχει χρίσιμη τιμή y_0 τέτοια ώστε αν $y(0) < y_0$ τότε η αντίστοιχη λύση $y(t)$ μηδενίζεται για κάποιον πεπερασμένο χρόνο. Στην περίπτωση αυτή κάνουμε λόγο για «εξαφάνιση». Αντίθετα αν $y(0) > y_0$ τότε η $y(t)$ τείνει σε σημείο ισορροπίας καθώς το $t \to +\infty$.

(β) Εάν $h > \dfrac{k^2}{4c}$ τότε έχουμε εξαφάνιση ανεξάρτητα από την αρχική τιμή $y(0)$.

3.6 Έστω ότι ένας πληθυσμός ψαριών εξελίσσεται σύμφωνα με το λογιστικό μοντέλο όπως και στην προηγούμενη εξίσωση, με τη διαφορά ότι ο ρυθμός αλίευσης είναι ανάλογος του πληθυσμού,

$$y' = ky - cy^2 - hy,$$

όπου $h > 0$, k και c όπως στην άσκηση 3.5. Να δειχθεί ότι αν $k < h$ τότε ανεξάρτητα από την αρχική συνθήκη $y(0) > 0$, ο πληθυσμός τείνει προς εξαφάνιση καθώς το $t \to +\infty$. Επίσης να αναλυθούν και οι περιπτώσεις $k = h$, $k > h$.

3.7 Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηρισθούν ως προς την ευστάθεια και να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = y(y^2 - \mu)\ , \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Ειδικότερα για $\mu = 1$ και $y(0) = \dfrac{1}{2}$ να βρεθούν τα $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.

3.8 Έστω

$$y' = \mu y(1-y)^2 - y^3 =: f_\mu(y).$$

Να προσδιοριστούν τα σημεία διακλάδωσης και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης, συμπεριλαμβανομένης και της ευστάθειας.

3.9 Να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης για την

$$y' = \mu y^2 + y^4 =: f_\mu(y).$$

3.10 Έστω ότι $f(y) = c + dy - y^3$. Να δειχθεί ότι η αναγκαία συνθήκη για διακλάδωσ είναι $4d^3 = 27c^2$.

3.11 Να ταξινομηθούν οι διακλαδώσεις και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα διακλάδω-σης καθώς και αντιπροσωπευτικά διαγράμματα φάσης για τις διαφορικές εξισώσει

$$(\alpha):\quad y' = c + 2y - y^3, \qquad (\beta):\quad y' = dy - y^3.$$

3.12 Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 2.1 και ειδικά του μονοσήμαντου, δείξτε ότ το σύστημα *Lotka-Voltera*

$$x' = (a - by)x$$
$$y' = (dx - c)y$$

διατηρεί τον κώνο $x \geq 0$, $y \geq 0$, δηλαδή εάν $x(0) = x_o \geq 0$, $y(0) = y_o \geq 0$, τότ $x(t) \geq 0$ εάν $y(t) \geq 0$ για $t > 0$.

3.13 Δείξτε ότι δεν υπάρχει εξίσωση της μορφής $x' = g(x)$ με g *Lipschitz*, $x(t) \in$ I με μη τετριμμένη περιοδική λύση.