(Ασ 1.5 [ΑΚ]) Οκτ. 2017 (1

$x' + \sigma x = f(t)$, $t \geq 0$, $f \in C[0,\infty)$, $\lim_{t\to\infty} f(t) = \rho$

(α) $\sigma > 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \phi(t) = \frac{\rho}{\sigma}$, $\forall$ λυση ϕ

(β) $\sigma < 0 \Rightarrow \exists!$ ϕ, λυση, τ.ω. $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = \frac{\rho}{\sigma}$

Λυση

(α) $\phi(t) = e^{-\sigma t}x_0 + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} f(s)ds =: I(t) + II(t)$

Περιπτωση (Α): $\rho \neq 0$

• $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{\sigma s} f(s)ds$ $= +\infty, \rho > 0$; $= -\infty, \rho < 0$

Πραγματι εστω $\rho > 0$. Δοθεντος $\varepsilon > 0$ $\exists T > 0$ τ.ω. $f(s) \geq \rho - \varepsilon > \frac{\rho}{2}$ $(\varepsilon < \frac{\rho}{2})$, για $t \geq T$

Συνεπως $\int_0^t e^{\sigma s} f(s)ds = \int_0^T e^{\sigma s} f(s)ds + \int_T^t e^{\sigma s} f(s)ds \geq \int_0^T e^{\sigma s} f(s)ds + (\rho - \varepsilon)\int_T^t e^{\sigma s} f(s)ds$

$= \int_0^T e^{\sigma s} f(s)ds + \frac{\rho - \varepsilon}{\sigma}(e^{\sigma t} - e^{\sigma T}) \longrightarrow +\infty$, $t \to +\infty$. Για $\rho < 0$ θετουμε $\hat{\rho} = -\rho$

οπου καταληγουμε). $\lim_{t\to+\infty} II(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t e^{\sigma s} f(s)ds}{e^{\sigma t}} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{(\int_0^t e^{\sigma s} f(s)ds)'}{\sigma e^{\sigma t}} = \frac{\rho}{\sigma}$

Περιπτωση (Β): $\rho = 0$.

Διακρινουμε δυο υποπεριπτωσεις: (α') $\int_0^\infty e^{\sigma s}|f(s)|ds = +\infty$ (β') $\int_0^\infty e^{\sigma s}|f(s)|ds < \infty$.

Στην (α') εχουμε $\lim_{t\to\infty} \frac{(\int_0^t e^{\sigma s}|f(s)|ds)}{e^{\sigma t}} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{(\int_0^t e^{\sigma s}|f(s)|ds)'}{\sigma e^{\sigma t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\cancel{e^{\sigma t}}|f(t)|}{\sigma \cancel{e^{\sigma t}}}$

$= 0$.

Επισης εαν ισχυει η (β') εχουμε $\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t e^{\sigma s}|f(s)|ds}{e^{\sigma t}} = 0$ (διοτι $\sigma > 0$).

Τελος καταληγουμε για $\rho = 0$ κανοντας χρηση $\left|\int_0^t e^{\sigma s} f(s)ds\right| \leq \int_0^t e^{\sigma s}|f(s)|ds$.

(β) $e^{-\sigma t}x_0 + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} f(s)ds = e^{-\sigma t}x_0 + e^{-\sigma t}\int_0^t e^{\sigma s} f(s)ds = e^{-\sigma t}\left[x_0 + \int_0^t e^{\sigma s} f(s)ds\right]$

$= e^{-\sigma t}\left[x_0 + \int_0^\infty e^{\sigma s} f(s)ds - \int_t^\infty e^{\sigma s} f(s)ds\right] = e^{-\sigma t}\left[x_0 + \int_0^\infty e^{\sigma s} f(s)ds\right] - e^{-\sigma t}\int_t^\infty e^{\sigma s} f(s)ds$

Επιλεγουμε: $x_0 = -\int_0^\infty e^{\sigma s} f(s)ds$. Σημ: Το $\int_0^\infty$ συγκλινει απολυτως. Πραγματι επειδη

η $f \in C[0,\infty)$ και $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \rho$, προκυπτει οτι η f ειναι φραγμενη, $|f(t)| < M$.

Κατα συνεπεια $\int_0^t e^{\sigma s}|f(s)|ds \leq \int_0^t e^{\sigma s} M ds = \frac{M}{-\sigma} < +\infty$. Αρα $\left|\int_0^\infty e^{\sigma s} f(s)ds\right| < \infty$

Συνεχιζουμε. Θα δειξουμε οτι $\lim_{t\to\infty} -e^{-\sigma t}\int_t^\infty e^{\sigma s} f(s)ds = \frac{\rho}{\sigma}$

(2

Πράγματι $\lim_{t\to+\infty} -e^{-\sigma t}\int_t^{\infty} e^{\sigma s} f(s)ds = \lim_{t\to\infty} \frac{-\int_t^{\infty} e^{\sigma s} f(s)ds}{e^{\sigma t}} \overset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{e^{\sigma t} f(t)}{\sigma e^{\sigma t}} = \frac{f}{\sigma}$

Θα δείξουμε ότι εάν ϕ τ.ω. $\phi(t)\to \frac{f}{\sigma}$, τότε αναγκαστικά $\phi(t)=e^{-\sigma t}x_0+\int_{t_0}^{t} e^{-\sigma(t-s)} f(s)ds$ με $x_0 = -\int_0^{\infty} e^{\sigma s} f(s)ds$.

Πράγματι

$$\phi(t)=e^{-\sigma t}\left[x_0+\int_0^{\infty} e^{\sigma s} f(s)ds\right]-e^{-\sigma t}\int_t^{\infty} e^{\sigma s} f(s)ds.$$

Υποθέταμε ότι $\phi(t)\to \frac{f}{\sigma}$.

Προκύπτει ότι αναγκαστικά

$$e^{-\sigma t}\left[x_0+\int_0^{\infty} e^{\sigma s} f(s)ds\right]\to 0 \quad \text{όπως} \quad t\to+\infty$$

Όμως $\sigma<0$, άρα αναγκαστικά

$$\left[x_0+\int_0^{\infty} e^{\sigma s} f(s)ds\right]=0.$$

ΟΕΔ.