

x' + sigma x = f(t), t >= 0, f in C[0, infinity), lim_{t -> infinity} f(t) = p

(a) sigma > 0 => lim_{t -> infinity} phi(t) = p/sigma, for all phi

(b) sigma < 0 => exists phi, such that, for all t, lim_{t -> infinity} phi(t) = p/sigma

Λύση

(a) phi(t) = e^{-sigma t} x_0 + integral_0^t e^{-sigma(t-s)} f(s) ds =: I(t) + II(t)

Περίπτωση (A): p != 0

lim_{t -> infinity} integral_0^t e^{sigma s} f(s) ds = +infinity, p > 0; -infinity, p < 0

Πραγματικά, για p > 0. Δοθέντος epsilon > 0 exists T > 0 such that f(s) > p - epsilon > p/2 (epsilon < p/2), για t >= T

Συνεπώς integral_0^t e^{sigma s} f(s) ds = integral_0^T e^{sigma s} f(s) ds + integral_T^t e^{sigma s} f(s) ds >= integral_0^T e^{sigma s} f(s) ds + (p - epsilon) integral_T^t e^{sigma s} ds = integral_0^T e^{sigma s} f(s) ds + (p - epsilon) (e^{sigma t} - e^{sigma T}) / sigma -> +infinity, t -> +infinity. Για p < 0, δοθέντος epsilon > 0, για t >= T, f(s) < -epsilon < -p/2. lim_{t -> infinity} I(t) = lim_{t -> infinity} (integral_0^t e^{sigma s} f(s) ds) / e^{sigma t} = p/sigma (L'Hopital's rule)

Περίπτωση (B): p = 0

Διακρίνουμε δύο υποπεπτώσεις: (a') integral_0^infinity e^{sigma s} |f(s)| ds = +infinity, (beta') integral_0^infinity e^{sigma s} |f(s)| ds < infinity

Στην (a') έχουμε lim_{t -> infinity} (integral_0^t e^{sigma s} |f(s)| ds) / e^{sigma t} = lim_{t -> infinity} (integral_0^t e^{sigma s} |f(s)| ds)' / (e^{sigma t})' = lim_{t -> infinity} e^{sigma t} |f(t)| / sigma e^{sigma t} = 0

Επίσης, ενώ ισχύει η (beta') έχουμε lim_{t -> infinity} integral_0^t e^{sigma s} |f(s)| ds = 0 (για sigma > 0)

Τέλος, καταγράφουμε για p = 0 κάποιες παρατηρήσεις: |integral_0^t e^{sigma s} f(s) ds| <= integral_0^t e^{sigma s} |f(s)| ds

(b) e^{-sigma t} x_0 + integral_0^t e^{-sigma(t-s)} f(s) ds = e^{-sigma t} x_0 + e^{-sigma t} integral_0^t e^{sigma s} f(s) ds = e^{-sigma t} [x_0 + integral_0^t e^{sigma s} f(s) ds] = e^{-sigma t} [x_0 + integral_0^infinity e^{sigma s} f(s) ds - integral_t^infinity e^{sigma s} f(s) ds] = e^{-sigma t} [x_0 + integral_0^infinity e^{sigma s} f(s) ds] - e^{-sigma t} integral_t^infinity e^{sigma s} f(s) ds

Επιπλέον, x_0 = - integral_0^infinity e^{sigma s} f(s) ds. Σημείωση: το integral_0^infinity e^{sigma s} f(s) ds συγκλίνει absolutely. Πραγματικά, επειδή

n f in C[0, infinity) και lim_{t -> infinity} f(t) = p, προκύπτει ότι n f είναι φραγμένη, |f(t)| <= M.

Κατά συνέπεια integral_0^t e^{sigma s} |f(s)| ds <= integral_0^t e^{sigma s} M ds = M/sigma < +infinity. Άρα |integral_0^t e^{sigma s} f(s) ds| < +infinity

Συνεπώς, θα έχουμε ότι lim_{t -> infinity} -e^{-sigma t} integral_0^t e^{sigma s} f(s) ds = p/sigma

$$\text{Προφανώς } \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-\sigma t} \int_t^{\infty} e^{\sigma s} f(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_t^{\infty} e^{\sigma s} f(s) ds}{e^{\sigma t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{\sigma t} f(t)}{\sigma e^{\sigma t}} = \frac{f}{\sigma} \quad (2)$$

Θα δείξουμε ότι αν $\phi \in T\omega$, $\phi(t) \rightarrow \frac{f}{\sigma}$, τότε αναγκαστικά $\phi(t) = e^{-\sigma t} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\sigma(t-s)} f(s) ds$
 $f \in X_0 = \int_0^{\infty} e^{-\sigma s} f(s) ds$.

$$\text{Προφανώς } \phi(t) = e^{-\sigma t} \left[x_0 + \int_0^{\infty} e^{\sigma s} f(s) ds \right] - e^{-\sigma t} \int_t^{\infty} e^{\sigma s} f(s) ds.$$

Ξαναδεικνύμε ότι $\phi(t) \rightarrow \frac{f}{\sigma}$.

Προφανώς ότι αναγκαστικά

$$e^{-\sigma t} \left[x_0 + \int_0^{\infty} e^{\sigma s} f(s) ds \right] \rightarrow 0 \text{ αν και } t \rightarrow \infty$$

Όπως $\sigma < 0$, από αναγκαστικά

$$\left[x_0 + \int_0^{\infty} e^{\sigma s} f(s) ds \right] = 0.$$

ΟΕΔ.