όπου f και g συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x - tx^2 - (t + t^2 x)x' = 0.$$

1.4 Να λυθούν τα Π.Α.Τ.

(α) $y' = (\cos x)(y-1), \ y(0) = 1.$

(β) $y' = 1 + y^2, \ y(0) = 1$, προσδιορίστε το διάστημα ύπαρξης.

(γ) $y' = \dfrac{3t^2 + 4t + 2}{2(y-1)}, \ y(0) = -1.$

(δ) $3\dfrac{dy}{dt} = y \cos t, \ y(1) = 0.$

1.5 Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$x' + \sigma x = f(t) \ \ , \ t \geq 0. \qquad (1.102)$$

Αν $f \in C([0, +\infty])$ και $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \rho \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

(α) αν $\sigma > 0$ τότε κάθε λύση ϕ της εξίσωσης έχει την ιδιότητα

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = \frac{\rho}{\sigma},$$

(β) αν $\sigma < 0$ τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση ψ της εξίσωσης τέτοια ώστε

$$\lim_{t \to +\infty} \psi(t) = \frac{\rho}{\sigma}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον κανόνα De l'Hôpital. Για το (β) δείξτε ότι υπάρχει μοναδική λύση της (1.102) στο $[0, +\infty)$, $x = -\int_t^{+\infty} e^{-\sigma(t-s)} f(s)\, ds.$

1.6 Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$x' = \frac{2t}{1+x^2}, \ \ x(0) = 0$$

και να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της λύσης είναι όλο το $\mathbb{R}$.

1.7 Να δειχτεί ότι αν a και λ είναι θετικές σταθερές και b οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, τότε κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

έχει την ιδιότητα $y \to 0$ καθώς το $t \to +\infty$.

Υπόδειξη: Να θεωρηθούν ξεχωριστά οι περιπτώσεις $a = \lambda$ και $a \neq \lambda$. Άλλος τρόπος: εφαρμογή της άσκησης 1.5.

1.8 Να βρεθεί μία εξίσωση πρώτης τάξης που να έχει την ακόλουθη οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών:

(α) $y = cx$.

(β) $y^2 = 2ax$.

(γ) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

(δ) $xy = c$.

Υπόδειξη: Παραγωγίστε και κάντε απαλοιφή της παραμέτρου.

1.9 Να προσδιοριστεί το α έτσι ώστε το ακόλουθο Π.Α.Τ. να έχει περιοδική λύση:

$$y' - \frac{1}{2}y = 2\sin t \ , \ y(0) = \alpha.$$

1.10 (Αλλαγή κλίμακας) Να βρεθεί αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής τέτοια ώστε η 2π–περιοδική λύση της εξίσωσης

$$x' = -x + \cos t$$

να μετατρέπεται σε 1–περιοδική.

1.11 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = -y + c(t) \ , \ c(t+1) = c(t) \ ,$$

όπου $c(t)$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση έχει μοναδική 1–περιοδική λύση.

1.12 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x'(t) = a(t)x(t),$$

όπου $a(t)$ συνεχής μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με περίοδο ω. Έστω $x(t)$ λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $x(0) = 1$.

(α) Να βρεθεί η σταθερά c έτσι ώστε

(α) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση Poincaré δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(y_0) = e^{-1}(y_0 - 1) + 1.$$

(β) Να βρεθούν τα σταθερά σημεία της απεικόνισης Poincaré και να [illegible] συμπέρασμα για τις 1–περιοδικές λύσεις της εξίσωσης.

Θεωρούμε την 1–περιοδική διαφορική εξίσωση

$$y' = (\cos^2 2\pi t)y.$$

(α) Να δειχθεί ότι η λύση δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = y(0)\exp\Big\{\frac{t}{2} + \frac{\sin 4\pi t}{8\pi}\Big\}.$$

(β) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση Poincaré δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(x_0) = x_0\sqrt{e}$$

και να βρεθούν τα σταθερά της σημεία. Να εξαχθεί συμπέρασμα [illegible] 1–περιοδικές λύσεις της εξίσωσης.

Να εξεταστεί η συμπεριφορά των λύσεων της

$$x' = -(\sin t)x + 1,$$

καθώς το $t \to +\infty$.

Έστω $b(t)$ T–περιοδική συνεχής συνάρτηση και έστω

$$b_0 = \int_0^1 b(s)\,ds.$$

Να δειχθεί ότι όλες οι λύσεις της $x' = b(t)$ είναι T–περιοδικές αν $b_0 = 0$ [illegible]ραγμένες αν $b_0 \neq 0$.

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

1.18 Έστω $b(t)$ συνεχής 1–περιοδική συνάρτηση. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = -\left[a_0 + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t)\right] y + e^{-\cos(2\pi t)} b(t).$$

Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(α) Εάν $a_0 \neq 0$ τότε υπάρχει μοναδική 1–περιοδική λύση.

(β) Εάν $a_0 = 0$ και

$$b_0 = \int_0^1 b(s)\, ds = 0,$$

τότε κάθε λύση είναι 1–περιοδική.

(γ) Εάν $a_0 = 0$ και $b_0 \neq 0$ τότε κάθε λύση είναι μη φραγμένη.

1.19 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = \varepsilon y - \sigma y^3,$$

όπου $\varepsilon > 0$ και $\sigma > 0$ σταθερές.

1.20 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = ry - ky^2,$$

όπου $r > 0$ και $k > 0$ σταθερές.

1.21 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = (ty)^2.$$

1.22 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$ty' - y - (\log t)y^2 = 0\,, \quad t > 0.$$

1.23 Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

(α) $$y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2,$$

(β) $$y' = \frac{2\cos^2 t + \sin^2 t - y^2}{2\cos t},$$

αν είναι γνωστές οι ειδικές λύσεις

$$y_1(t) = -\frac{1}{t}$$

για την (α) και

$$y_1(t) = \sin t$$

1.24 Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

(α) $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0.$

(β) $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0.$

(γ) $x^2y' = 3(x^2 + y^2)\tan^{-1}\dfrac{y}{x} + xy.$

(δ) $x\sin\dfrac{y}{x}\cdot y' = y\sin\dfrac{y}{x} + x.$

(ε) $xy' = y + 2xe^{-\frac{y}{x}}.$

(στ) $(x - y)dx - (x + y)dy = 0.$

(ζ) $(x + y)dx + (x - y)dy = 0.$

(η) $xy' = 2x + 3y.$

(θ) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}.$

(ι) $x^2y' = y^2 + 2xy.$

(ια) $(x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0.$

(ιβ) $(y - 2x)dx + (4y + 3x)dy = 0.$

(ιγ) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

Απάντηση: $y = x\sin\ln cx$ είτε $y = x$ είτε $y = -x$.

(ιδ) $xy' = y + x\cos^2\dfrac{y}{x}.$

(ιε) $x^2dy = (y^2 - xy + x^2)dx.$

Απάντηση: $(x - y)\ln cx = x$.

1.25 Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

(α) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}.$

(β) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y - 1}{x + 4y + 2}.$

(γ) $(2x - 2y)dx + (y - 1)dy = 0.$

(δ) $(2x + 3y - 1)dx - 4(x + 1)dy = 0.$

(ε) $(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0.$

(στ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-7x - 3y - 7}{7y - 3x + 3}.$

(ζ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - x - 4}{y - 3x + 3}.$