

## Ασφάλειες Ζωής

Εξέταση 9 Ιανουαρίου 2019

1. (15 βαθμοί) Ο χρόνος θανάτου ενός ατόμου που γεννιέται σήμερα είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = (3ax^2 - 2x^3)/a^3$$

για  $x \in [0, a]$  με  $a = 120$  (ενώ προφανώς  $F(x) = 0$  για  $x < 0$  και  $F(x) = 1$  για  $x > 120$ ). Να υπολογιστούν η συνάρτηση επιβίωσης  $s$ , η ένταση θνησιμότητας  $\mu_x$  (για  $x \in (0, a)$ ), ο μέσος χρόνος υπολειπόμενης ζωής  $\overset{\circ}{e}_{20}$  για ένα άτομο που είναι τώρα 20 ετών.

2. (10 βαθμοί) Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial}{\partial x} {}_t p_x = -t p_x (\mu_x - \mu_{x+t}).$$

3. (20 βαθμοί) (α) Να δοθούν τύποι για τις ποσότητες  $A_{40}, A_{40:\overline{10}|}, A_{\overline{1}:\overline{40}|}, A_{\overline{1}:\overline{40}|}$  συναρτήσει των  $v, {}_t p_x, {}_t q_x$ .

(β) Να υπολογιστεί η ποσότητα  $A_{50}$  αν είναι γνωστές οι  $A_{40}, A_{40:\overline{10}|}, A_{\overline{1}:\overline{40}|}$ .

$$[\text{Υπόδειξη: Δείξτε ότι } A_{40} = A_{\overline{1}:\overline{40}|} + v^{10} {}_{10} p_{40} A_{50}.]$$

4. (15 βαθμοί) (α) Να δειχθεί ότι  $\bar{A}_x + \delta \bar{a}_x = 1$ .

5. (15 βαθμοί) (α) Ποια η παρούσα αξία μιας ράντας ζωής που καταβάλλει ποσό 1 σε καθέναν από τους χρόνους  $0, 1, \dots, n-1$  κατά τους οποίους το άτομο ( $x$ ) είναι ζωντανό;

(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή,  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ , αυτής της παρούσας αξίας με τη βοήθεια της συνάρτησης  ${}_t p_x$  και της παραμέτρου  $v$ .

(γ) Να υπολογιστεί η

$$\frac{\partial}{\partial x} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

με τη βοήθεια των συναρτήσεων  ${}_t p_x, \mu_x$  και της παραμέτρου  $v$ .

6. (20 βαθμοί) Θεωρούμε ράντα ζωής που έχει παρούσα αξία

$$Y = \begin{cases} v^{T(x)} \bar{a}_{\overline{n-T(x)}} & \text{αν } T(x) \leq n, \\ 0 & \text{αν } T(x) > n. \end{cases}$$

(α) Περιγράψτε μια ροή πληρωμών για αυτή τη ράντα.

(β) Δείξτε ότι  $Y = \bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{\overline{n-T(x)}}|$  και εκφράστε την αναλογιστική παρούσα αξία της ράντας (δηλαδή τη μέση τιμή της  $Y$ ) ως συνάρτηση τιμών άλλων συνηθισμένων ραντών ζωής.

7. (10 βαθμοί) Θεωρούμε άτομο ( $x$ ) που αγοράζει ασφάλεια ζωής η οποία δίνει το ποσό  $R$  τη στιγμή του θανάτου ή στο τέλος του  $n$  έτους από σήμερα, όποιο συμβεί νωρίτερα, και καταβάλλει ποσό  $P$  στην αρχή καθενός από τα  $n$  έτη (ξεκινώντας από τώρα) αν τότε ζει.

(α) Ποια είναι η συνάρτηση απώλειας του ασφαλιστή;

(β) Αν η τιμολόγηση της ασφάλειας γίνεται με την αρχή της ισοδυναμίας, να βρεθεί το  $P$  ως συνάρτηση αναλογιστικών συναρτήσεων.

**Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2.5 ώρες.**

**Καλή επιτυχία!**