Ασφάλειες Ζωής

Τεστ εξάσκησης

1. Ο χρόνος θανάτου ενός ατόμου που γεννιέται σήμερα είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F(x) = (x/100)^2, x \in [0, 100]$. Να υπολογιστούν οι ποσότητες $s(x), {}_tp_{40}, \mu_x, \overset{\circ}{e}_x$ για όλα τα x για τα οποία έχουν νόημα.

2. Δίνονται οι ποσότητες $p_x, p_{x+1}, {}_5p_{x+1}, q_{x+5}$. Να υπολογιστούν με τη βοήθειά τους οι ποσότητες: p_{x+5}, ${}_2p_x$, ${}_4p_{x+1}$, ${}_{1|4}q_x$. Δώστε λεπτομερή δικαιολόγηση.

3. Να δειχθεί ότι για $0 < m < m$ πραγματικούς αριθμούς ισχύει

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{\underset{x:\overline{m}|}{1}} + v^m \, {}_mp_x \, \bar{A}_{x+m:\overline{n-m}|}.$$

4. Να δειχθεί ότι $A_x + d\ddot{a}_x = 1$.

5. Για $m, n \in \mathbb{N}^+$, θεωρούμε ράντα που δίνει ποσό 1 τις στιγμές $n, n+1, \ldots, n+m-1$ κατά τις οποίες το άτομο που τώρα έχει ηλικία x είναι ζωντανό. Να δοθεί μια έκφραση για την παρούσα αξία της ράντας και να εκφραστεί με τη βοήθεια των συναρτήσεων ${}_kp_y$, $\ddot{a}_{z,\overline{j}|}$.

6. Θεωρούμε μια πρόσκαιρη ασφάλιση ζωής 10 ετών που πληρώνει το ποσό $C = 50000$ στο τέλος του έτους θανάτου για ένα άτομο με ηλικία 30. Αυτή αποπληρώνεται με μια διακριτή προκαταβητέα ράντα ζωής 10 ετών. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος $K = [T(30)]$ έχει συνάρτηση πιθανότητας $f(j) = \mathbf{P}(K = j) = (1-r)^j r$ για κάθε $j = 0, 1, \ldots$, όπου $r = 0.02$

(α) Να υπολογιστεί ο e_{30}.

(β) Να γραφτεί η συνάρτηση απώλειας L του ασφαλιστή.

(γ) Να εκφραστεί το μέγεθος P του ετήσιου ασφαλίστρου με τη βοήθεια αναλογιστικών συναρτήσεων.

(δ) Υποθέτουμε ότι $a := \frac{1}{\log v} \log\left(\frac{P}{C(1-v)+P}\right) < 11$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο ασφαλιστής να έχει κέρδος από το συμβόλαιο, δηλαδή η $\mathbf{P}(L < 0)$. Να δειχθεί ότι αυτή είναι τουλάχιστον $(1-r)^{10}$.

1)

$$S(x) = P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$$

$$= \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{100}\right)^2 & \text{για } x \in [0, 100] \\ 1 & \text{για } x < 0 \\ 0 & \text{για } x > 100 \end{cases}$$

$${}_tP_{40} = \frac{S(t+40)}{S(40)}$$

$$\mu_x = -\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{2 \cdot \frac{x}{100} \cdot \frac{1}{100}}{1 - \left(\frac{x}{100}\right)^2} \quad \text{για } x \in [0, 100)$$

$$\mathring{e}_x = E(T(x))$$

Η $T(x)$ έχει συνάρτηση κατανομής

$$F_{T(x)}(t) = P(T(x) \le t) = 1 - {}_tP_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}, \quad x \in (0, 100), \ t \geq 0$$

και πυκνότητα

$$f_{T(x)}(t) = F_{T(x)}'(t) = -\frac{S'(x+t)}{S(x)} = \frac{2\, \frac{x+t}{100} \cdot \frac{1}{100}}{S(x)} \quad \text{για } t > 0, \ x+t < 100$$

($=0$ για $t > 100-x$ γιατί τότε $S(x+t) = 0$ σταθερά)

$$\text{Άρα } \mathring{e}_x = \int_0^\infty t\, f_{T(x)}(t)\, dt = \int_0^{100-x} t\,(x+t)\, \frac{1}{50 \cdot 100 \cdot S(x)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{5000 \cdot S(x)} \left\{ x \frac{(100-x)^2}{2} + \frac{(100-x)^3}{3} \right\}$$

για $x \in [0,100)$

2|

- $p_{x+5} = 1 - q_{x+5}$

- ${}_2p_x = p_x \, p_{x+1}$ με χρήση του κανόνα

$$P(A \cap B \mid \Gamma) = P(A \mid \Gamma) \cdot P(B \mid A \cap \Gamma) \quad (\circledast)$$

για $\Gamma = \{X > x\}$, $A = \{X > x+1\}$, $B = \{X > x+2\}$

Ή επειδή $\frac{S(x+2)}{S(x)} = \frac{S(x+1)}{S(x)} \cdot \frac{S(x+2)}{S(x+1)}$ που ισχύει,

- ${}_5p_{x+1} = {}_4p_{x+1} \, p_{x+5}$ (όπως πριν)

$$\Rightarrow {}_4p_{x+1} = \frac{{}_5p_{x+1}}{p_{x+5}} = \frac{{}_5p_{x+1}}{1 - q_{x+5}}$$

- ${}_{1|4}q_x \underset{\uparrow}{=} p_x \, {}_4q_{x+1} = p_x (1 - {}_4p_{x+1})$

Η ισότητα ισχύει λόγω της $\circledast$ για $\Gamma = \{X > x\}$

$A = \{X - x > 1\}$, $B = \{1 < X - x < 5\}$

3] Έστω $f_{T(x)}$ η πυκνότητα της $T(x)$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t f_{T(x)}(t)\,dt + v^n\, {}_np_x = (1) + (2)$$

$$(1) = \int_0^m v^t f_{T(x)}(t)\,dt + \int_m^n v^t f_{T(x)}(t)\,dt =$$

$$= \bar{A}^{1}_{x:\overline{m}|} + \int_0^{n-m} v^{s+m} f_{T(x)}(s+m)\,ds \qquad s = t-m$$

Ισχύει $f_{T(x)}(m+s) = {}_mp_x\, f_{T(x+m)}(s) \quad \forall s \geq 0$

γιατί ~~[illegible]~~ ισοδυναμεί με

$${}_{m+s}p_x\, \mu_{x+m+s} = {}_mp_x\; {}_sp_{x+m}\, \mu_{x+m+s} \quad \text{δηλαδή}$$

$${}_{m+s}p_x = {}_mp_x\; {}_sp_{x+m}$$ ισχύει (όπως στο Θέμα 2)

Άρα $$(1) = \bar{A}^{1}_{x:\overline{m}|} + v^m \int_0^{n-m} v^s\, {}_mp_x\, f_{T(x+m)}(s)\,ds$$

$$= \quad '' \quad + v^m\, {}_mp_x\, \bar{A}^{1}_{x+m:\overline{n-m}|}$$

$$(2) = v^m v^{n-m}\, {}_mp_x\; {}_{n-m}p_{x+m} = v^m\, {}_mp_x \cdot v^{n-m}\, {}_{n-m}p_{x+m}$$

Άρα $$(1)+(2) = \bar{A}^{1}_{x:\overline{m}|} + v^m\, {}_mp_x \left(\bar{A}^{1}_{x+m:\overline{n-m}|} + v^{n-m}\, {}_{n-m}p_{x+m} \right)$$

$$= \quad '' \quad + v^m\, {}_mp_x\, \bar{A}_{x+m:\overline{n-m}|}$$

4| Έστω f_K η συνάρτηση πιθανότητας της

$K = K(x) = [T(x)]$

Ισχύει ~~$f_K(j) = {}_jp_x - {}_{j+1}p_x = {}_jp_x - {}_jp_x$~~

$$f_K(j) = P(j \le T(x) < j+1) = P(j \le T(x)) - P(j+1 \le T(x))$$

$$= {}_jp_x - {}_{j+1}p_x$$

$$A_x = \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} f_K(j) = \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} ({}_jp_x - {}_{j+1}p_x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} {}_jp_x - \sum_{j=1}^{\infty} v^j {}_jp_x = v + (v-1) \sum_{j=1}^{\infty} v^j {}_jp_x$$

$$= v + \underbrace{(v-1)}_{-d} (\ddot{a}_x - 1) = 1 - d\,\ddot{a}_x$$

5| Κατά τα γνωστά, η αναλογιστική παρούσα αξία της ράντας είναι

$$\sum_{j=n}^{n+m-1} 1 \cdot v^j P(\text{γίνεται παροχή τον χρόνο } j) = \sum_{j=n}^{n+m-1} v^j {}_jp_x$$

$$\overset{k=j-n}{=} v^n \sum_{k=0}^{m-1} v^k {}_{k+n}p_x = v^n {}_np_x \sum_{k=0}^{m-1} v^k {}_kp_{x+n} =$$

$$= v^n {}_np_x \; \ddot{a}_{x+n:\overline{m}|}$$

Χρησιμοποιήσαμε τη σχέση ${}_{k+n}p_x = {}_np_x \cdot {}_kp_{x+n}$

6|

(α) $e_{30} = E(T(30)) = \sum_{j=0}^{\infty} j\,(1-r)^j \cdot r$

Είναι η μέση τιμή του αριθμού ~~[illegible]~~ αποτυχιών ως την πρώτη επιτυχία για ακολουθία ανεξάρτητων πειραμάτων καθένα απο τα οποία έχει πιθανότητα επιτυχίας r. Αυτή η μέση τιμή είναι $\frac{1}{r} - 1$.

Είναι ~~[illegible]~~ μια απο τις δύο κατανομές που λέγονται "Γεωμετρική".

(β) $L = C \cdot v^{K+1} 1_{K<10} - P \cdot \ddot{a}_{\overline{(K+1)\wedge 10|}}$

οπου $K = K(30) = [T(30)]$

(γ) Το P προσδιορίζεται απο τη σχέση $EL = 0$.

$$0 = E(L) = C \cdot E(v^{K+1} 1_{K<10}) - P\, E(\ddot{a}_{\overline{(K+1)\wedge 10|}})$$

$$= C\, A^{1}_{x:\overline{10|}} - P\, \ddot{a}_{x:10}$$

$$\Rightarrow \quad P = C\, \frac{A^{1}_{x:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{x:10}}$$

(δ) Ζητάμε την πιθανότητα $P(L<0)$

Σαφώς $L<0$ όταν $K\geq 10$ ενώ όταν $K<10$

Έχουμε

$$L = Cv^{K+1} - P\cdot \overbrace{\frac{v^{K+1}-1}{v-1}}^{=\ddot{a}_{\overline{K+1|}}} = \left(C - \frac{P}{v-1}\right)v^{K+1} + \frac{P}{v-1}$$

$$= \left(C + \frac{P}{1-v}\right)v^{K+1} - \frac{P}{1-v} = \frac{(C(1-v)+P)v^{K+1} - P}{1-v}$$

Αυτό είναι <0 αν και μόνο αν

$$v^{K+1} < \frac{P}{C(1-v)+P} \quad \text{δηλ.} \quad K+1 > \frac{1}{\log v}\log\frac{P}{C(1-v)+P}$$

γιατί $\log v<0$

Άρα

$$P(L<0) = P(L<0,\ K\geq 10) + P(L<0,\ K<10)$$

$$= P(K\geq 10) + P(K<10,\ K+1>a)$$

$$= P(K\geq 10) + P(K<10,\ K>a-1)$$

$$= P(K>a-1) = P(K\geq [a-1]+1) = (1-r)^{[a-1]+1}$$

γιατί $a-1<10$

Αυτή η πιθανότητα είναι $\geq P(K\geq 10) = (1-r)^{10}$

εναλλακτικά, επειδή $[a-1] \leq 9$ δηλ. $[a-1]+1 \leq 10$

Άρα $(1-r)^{[a-1]+1} \geq (1-r)^{10}$ αφού $1-r\in(0,1)$