Ασφάλειες Ζωής

Εξέταση 29 Μαρτίου 2018

1. (15 βαθμοί) Η συνάρτηση επιβίωσης των ατόμων ενός πληθυσμού είναι $s(x) = (1 - \frac{x}{110})^2$ αν $x \in [0, 110]$. Για $x_0 \in (0, 110)$ δεδομένο, να υπολογιστούν

(α) η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $T(x_0) = X - x_0 \mid X > x_0$.

(β) η μέση τιμή $\mathring{e}_{x_0}$.

2. (15 βαθμοί) Δίνονται οι ποσότητες ${}_5p_{40},\ {}_5p_{45},\ {}_{10}p_{45},\ {}_{10}p_{55}$. Να υπολογιστούν με τη βοήθειά τους οι ποσότητες: ${}_{5|10}q_{40},\ {}_5p_{50}$. Δώστε λεπτομερή δικαιολόγηση.

3. (20 βαθμοί) Να δειχθεί ότι για κάθε $x, n, s \ge 0$ ισχύει

(α) $f_{T(x)}(n+s) = {}_np_x f_{T(x+n)}(s)$ όπου για κάθε $y \ge 0$, $f_{T(y)}$ είναι η πυκνότητα της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής $T(y) = X - y \mid X > y$.

(β) $\bar{A}_x = \bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + v^n\, {}_np_x\, \bar{A}_{x+n}$ με $v = 1/(1+i)$.

4. (20 βαθμοί) Να δειχθεί ότι $a_{x:\overline{n}|} = {}_1E_x\, \ddot{a}_{x+1:\overline{n}|}$.

[Υπόδειξη: Πώς συνδέονται οι συναρτήσεις ${}_kp_x,\ {}_\ell p_{x+1}$;]

5. (20 βαθμοί) Θεωρούμε ράντα ζωής που δίνει ποσό 1 στην αρχή κάθε έτους για 10 έτη και έπειτα ποσό 2 στην αρχή κάθε έτους για άλλα 10 έτη. Η καταβολή γίνεται μόνο αν το άτομο (x) είναι ζωντανό εκείνη τη στιγμή. Να δοθεί μια έκφραση για την αναλογιστική παρούσα αξία της ράντας αν δίνονται οι ποσότητες $\ddot{a}_{x:\overline{10}|}, \ddot{a}_{x+10,\overline{10}|}, {}_{10}p_x, v$.

6. (20 βαθμοί) Θεωρούμε άτομο (x) από πληθυσμό που έχει ένταση θνησιμότητας σταθερή $\mu_t = \mu > 0$ για κάθε $t > 0$. Το άτομο αγοράζει μια ισόβια ασφάλεια ζωής η οποία δίνει $C = 10^4$ ευρώ τη στιγμή του θανάτου. Αυτή την ασφάλεια την αποπληρώνει με μια συνεχή ράντα ζωής που έχει ρυθμό P. Η συνάρτηση απώλειας του ασφαλιστή είναι $L = Cv^T - P\bar{a}_{\overline{T}|}$, όπου $T = T(x) = X - x \mid X > x$. Η ένταση επιτοκίου είναι σταθερή και ίση με $\delta > 0$.

(α) Ποια η συνάρτηση επιβίωσης του ατόμου και ποια η πυκνότητα του χρόνου T;

(β) Αν η τιμολόγηση της ασφάλειας γίνεται με την αρχή της ισοσυναμίας, να βρεθεί το P ως συνάρτηση των C, μ, δ.

(γ) Να δειχθεί ότι $\mathrm{Var}(L) = C^2 \frac{\mu}{2\delta+\mu}$.

(δ) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα ο ασφαλιστής να έχει κέρδος από το συμβόλαιο, δηλαδή η $\mathbf{P}(L < 0)$, ισούται με $(\frac{\mu}{\mu+\delta})^{\mu/\delta}$.

ii) Και επειδή $S(0)=1$ και $S(110)=0$, έχουμε $S(t)=1$ για $t<0$ και $S(t)=0$ για $t>110$.

Αν F η συνάρτηση κατανομής της $T(x_0)$, τότε

$1-F(x)=P(T(x_0)>x)$, αυτό ισούται με 1 για $x\leq 0$ ενώ για $x>0$ ισούται με

$$P(X>x_0+x \mid X>x_0) \overset{x>0}{=} \frac{S(x_0+x)}{S(x_0)} = \begin{cases} \dfrac{(110-x_0-x)^2}{(110-x_0)^2} & \text{αν } x_0+x\leq 110 \\ 0 & \text{αν } x_0+x>110 \end{cases}$$

Άρα η πυκνότητα της $T(x_0)$ είναι

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x<0 \text{ ή } x>110-x_0 \\ \dfrac{2(110-x_0-x)}{(110-x_0)^2} & \text{αν } x\in[0,\,110-x_0] \end{cases}$$

(β) $$\mathring{e}_{x_0} = E(T(x_0)) = \int_0^{\omega} x f(x)\,dx = 2\int_0^{110-x_0} x\,\frac{110-x_0-x}{(110-x_0)^2}\,dx$$

$$\underset{a=110-x_0}{=} \frac{2}{a^2}\int_0^{a} x(a-x)\,dx = \frac{2}{a^2}\left(a\cdot\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{a^2}\,\frac{a^3}{6} = \frac{a}{3}$$

2/

(i) $${}_{5|10}q_{40} = P(5 \le T(40) \le 15) =$$

$$P(45 \le X \le 55 \mid X \ge 40) = P(45 \le X \mid X \ge 40)\cdot$$

$$P(X \le 55 \mid \underbrace{X \ge 40,\ X \ge 45}_{=\{X \ge 45\}}) = {}_5p_{40} \cdot {}_{10}q_{45} =$$

$$= {}_5p_{40} \cdot (1 - {}_{10}p_{45})$$

(ii) όμοια

$${}_{10}p_{45} = {}_5p_{45}\ {}_5p_{50} \quad . \text{ Άρα } \quad {}_5p_{50} = \frac{{}_{10}p_{45}}{{}_5p_{45}}$$

3/

(a) $$f_{T(x)}(u+s) = {}_{u+s}p_x\, \mu_{x+u+s} = {}_up_x\ {}_sp_{x+u}\, \mu_{x+u+s} =$$

$$= {}_up_x\ f_{T(x+u)}(s)$$

(β) $$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t f_{T(x)}(t)\,dt = \int_0^u v^t f_{T(x)}(t)\,dt + \int_u^\infty v^t f_{T(x)}(t)\,dt$$

$$\overset{t=u+s}{=} \bar{A}^{1}_{x:\overline{u}|} + \int_0^\infty v^{u+s} f_{T(x)}(u+s)\,ds \overset{\text{ερώτημα (a)}}{=} \bar{A}^{1}_{x:\overline{u}|} + v^u \int_0^\infty v^s\, {}_up_x\, f_{T(x+u)}(s)\,ds$$

$$= \bar{A}^{1}_{x:\overline{u}|} + v^u\, {}_up_x \int_0^\infty v^s f_{T(x+u)}(s)\,ds = \bar{A}^{1}_{x:\overline{u}|} + v^u\, {}_up_x\, \bar{A}_{x+u}$$

4/

$$a_{x:\overline{4}|} = \sum_{k=1}^{4} v^k \, {}_kp_x \overset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{4-1} v^{j+1} \, {}_{j+1}p_x =$$

$$= v \sum_{j=0}^{4-1} v^j \, p_x \, {}_jp_{x+1} = v\, p_x \sum_{j=0}^{4-1} v^j \, {}_jp_{x+1} =$$

$$= v\, p_x \, \ddot{a}_{x+1:\overline{4}|}$$

5/ Η παρούσα αξία της ράντας είναι

$$Y = \sum_{k=0}^{9} v^k 1_{T(x)>k} + \sum_{k=10}^{19} v^k \, 2 \cdot 1_{T(x)>k}$$

Η αναλογιστική παρούσα αξία είναι

$$EY = \sum_{k=0}^{9} v^k P(T(x)>k) + 2 \sum_{k=10}^{19} v^k P(T(x)>k)$$

$$= \sum_{k=0}^{9} v^k \, {}_kp_x + 2 \sum_{k=10}^{19} v^k \, {}_kp_x$$

Εναλλακτικά, η αναλογιστική παρούσα αξία είναι

$$\sum_{k=0}^{19} v^k \cdot (\text{ποσό πληρωμής του χρόνου } k) \cdot \left(\begin{array}{l}\text{πιθανότητα να γίνει η} \\ \text{πληρωμή του χρόνου } k\end{array}\right)$$

$$\overset{k=j+10}{=} \ddot{a}_{x:\overline{10}|} + 2 \sum_{j=0}^{9} v^{j+10} \, {}_{j+10}p_x = \ddot{a}_{x:\overline{10}|} + 2v^{10} \sum_{j=0}^{9} v^j \, {}_{10}p_x \, {}_jp_{x+10}$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{10}|} + 2 v^{10} {}_{10}p_x \, \ddot{a}_{x+10:\overline{10}|}$$

6 (α) $S(x) = e^{-\int_0^x \mu_s ds} = e^{-\int_0^x \mu ds} = e^{-\mu x} \quad \forall x \geq 0$

Η συνάρτηση κατανομής του T για $t>0$ είναι

$$F_T(t) = 1 - P(T>t) = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} = 1 - e^{-\mu t}$$

Άρα $f_T(t) = F_T'(t) = \mu e^{-\mu t}$ για $t>0$

ενώ $f_T(t) = 0$ για $t \leq 0$. (εκεί $F_T(t) = 0$)

(β) $EL = 0 \Leftrightarrow C E(v^T) - P E(\bar{a}_{\overline{T}|}) = 0 \Leftrightarrow$

$$P = C \cdot \frac{E(v^T)}{E(\bar{a}_{\overline{T}|})}$$

$$E(v^T) = E(e^{-\delta T}) = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_T(t) dt = \mu \int_0^\infty e^{-(\delta+\mu)t} dt$$

$$= \frac{\mu}{\mu+\delta} \left[-e^{-(\delta+\mu)t} \right]_0^\infty = \frac{\mu}{\mu+\delta}$$

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \int_0^T e^{-\delta t} dt = \int_0^T \left(\frac{e^{-\delta t}}{-\delta} \right)' dt = \frac{1-e^{-\delta T}}{\delta}$$

οπότε $E(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} E(v^T) = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\mu}{\mu+\delta} = \frac{1}{\mu+\delta}$

Άρα $P = C\mu$.

(γ) $L = C\cdot v^T - P\cdot\left(\frac{1-v^T}{\delta}\right) = \left(C+\frac{P}{\delta}\right)v^T - \frac{P}{\delta}$ ⊛

$\Rightarrow Var(L) = \left(C+\frac{P}{\delta}\right)^2 Var(v^T) =$

$= \left(C + \frac{C\mu}{\delta}\right)^2 \left\{E(v^{2T}) - (E(v^T))^2\right\}$

$= C^2 \frac{(\mu+\delta)^2}{\delta^2} \left\{ \qquad \right\}$

Τώρα $E(v^{2T}) = E(e^{-2\delta T}) = \frac{\mu}{\mu+2\delta}$

Στον υπολογισμό τα $E(e^{-\delta T})$ πιο πάνω, όπου δ ~~βάζουμε~~ αλλάζαμε 2δ

Άρα $Var(L) = C^2 \frac{(\mu+\delta)^2}{\delta^2}\left\{\frac{\mu}{\mu+2\delta} - \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2\right\}$

$= \ldots = C^2 \frac{\mu}{\mu+2\delta}$

(δ) $L < 0 \overset{⊛}{\Leftrightarrow} v^T < \frac{\frac{P}{\delta}}{C+\frac{P}{\delta}} = \frac{\mu}{\delta+\mu}$ $\overset{v=e^{-\delta}}{\Leftrightarrow}$

$-\delta T < \log\frac{\mu}{\delta+\mu} \Leftrightarrow T > -\frac{1}{\delta}\log\frac{\mu}{\mu+\delta}$ (← αυτό είναι >0)

Για $t>0$

$$P(T>t) = \int_t^{\infty} \mu e^{-\mu s}\, ds = \int_t^{\infty} (-e^{-\mu s})'\, ds =$$

$$0 - (-e^{-\mu t}) = e^{-\mu t}$$

Άρα $P(L<0) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} \log \frac{\mu}{\mu+\delta}\right) =$

$$= e^{\frac{\mu}{\delta} \log \frac{\mu}{\mu+\delta}} = \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^{\mu/\delta}$$