

Μαθηματικά της αγοράς και της παραγωγής-Ασφάλειες Ζωής

Εξέταση 25 Ιουνίου 2020

1. (20 βαθμοί) Η ένταση θνησιμότητας δίνεται από τη σχέση $\mu_x = a/(b+x)$ για κάθε $x > 0$, όπου $b > 0, a > 1$.

(α) Για κάθε $x, t > 0$ να υπολογιστεί η ποσότητα ${}_t p_x$ για κάθε $x, t > 0$.

(β) Να υπολογιστεί η ποσότητα \dot{e}_x για κάθε $x > 0$.

2. (25 βαθμοί) (α) Δίνεται η πιθανότητα q_{50} . Να υπολογιστεί η πιθανότητα ${}_{0.7}q_{50.1}$ κάτω από την υπόθεση ομοιόμορφης κατανομής θανάτων.

(β) Να δειχθεί ότι κάτω από την υπόθεση ομοιόμορφης κατανομής θανάτων ισχύει ${}_t q_{50} = t q_{50}$ για κάθε $t \in (0, 1)$.

(γ) Να δειχθεί ότι κάτω από την υπόθεση σταθερής έντασης θνησιμότητας ισχύει ${}_t q_{50} = 1 - (1 - q_{50})^t$ για κάθε $t \in (0, 1)$.

3. (30 βαθμοί) Έστω ότι η συνάρτηση επιβίωσης για τα άτομα ενός πληθυσμού είναι $s(x) = 1 - (x/100)$ για $x \in [0, 100]$ (και προφανώς ισούται με 0 για $x > 100$) ενώ το ετήσιο επιτόκιο είναι $i = 0.04$.

(α) Ποια η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής T_{40} και ποια η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής K_{40} ;

(β) Να υπολογιστεί το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο για ένα άτομο ηλικίας 40 για την ασφάλιση που πληρώνει 1 Ευρώ τη στιγμή του θανάτου μόνο αν αυτή συμβεί ως τα 75 χρόνια του ατόμου. Ποιο είναι το σύμβολο για αυτό το ασφάλιστρο;

(γ) Να υπολογιστεί το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο για ένα άτομο ηλικίας 40 για την ασφάλιση που πληρώνει 1 Ευρώ στο τέλος του έτους θανάτου μόνο αν αυτό συμβεί ως τα 75 χρόνια του ατόμου. Ποιο είναι το σύμβολο για αυτό το ασφάλιστρο;

(δ) Ποιο από τα ασφάλιστρα των ερωτημάτων (β), (γ) είναι μεγαλύτερο; Δώστε αλγεβρική απόδειξη ή οικονομικό επιχείρημα.

4. (20 βαθμοί) (α) Υποθέτουμε ότι $q_{y+1} \geq q_y$ για κάθε $y > 0$. Να δειχθεί ότι ${}_k p_{x+1} \leq {}_k p_x$ για κάθε $x > 0$ και k θετικό ακέραιο, και $\ddot{a}_{x+1} \leq \ddot{a}_x$ για κάθε $x > 0$.

(β) Ένα άτομο 50 ετών αγοράζει ράντα που πληρώνει 1000 Ευρώ σε 1 και 2 χρόνια από σήμερα και 3000 Ευρώ σε 3 και 4 χρόνια από τώρα. Οι πληρωμές γίνονται μόνο αν τότε το άτομο είναι ζωντανό. Δίνεται ότι $i = 0.05$ και

$$q_{50} = 0.1, q_{51} = 0.15, q_{52} = 0.2, q_{53} = 0.25.$$

Ποια είναι η αξία της ράντας σήμερα;

5. (20 βαθμοί) Θεωρούμε άτομο (50) που ασφαλιζεται ώστε να πάρει το ποσό $C = 20,000$ σε 30 χρόνια αν είναι τότε ζωντανό ενώ διαφορετικά να πάρουν το ίδιο ποσό οι κληρονόμοι του στο τέλος του έτους του θανάτου του. Η ασφάλιση πληρώνεται συνεχώς για τα επόμενα 20 χρόνια με σταθερό ρυθμό \bar{P} .

(α) Ποια είναι η συνάρτηση απώλειας του ασφαλιστή;

(β) Αν η τιμολόγηση της ασφάλισης γίνεται με την αρχή της ισοδυναμίας, να βρεθεί το \bar{P} ως συνάρτηση συνηθισμένων αναλογιστικών συναρτήσεων ($\bar{A}_x, A_{x:\overline{n}|}, a_x, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \bar{a}_{x:\overline{n}|}, \dots$).

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες.

Καλή επιτυχία!

Ομοιόμορφη κατανομή θανάτων. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $t \in (0, 1)$, υποθέτουμε ότι ισχύει

$$s(k + t) = (1 - t)s(k) + ts(k + 1).$$

Σταθερή ένταση θνησιμότητας. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $t \in (0, 1)$, υποθέτουμε ότι ισχύει

$$s(k + t) = s(k)e^{-\mu t} \quad \text{όπου το } \mu \text{ είναι τέτοιο ώστε } \frac{s(k + 1)}{s(k)} = e^{-\mu}.$$

Απαντήσεις

1. (α)

$${}_t p_x = \frac{(b+x)^a}{(b+x+t)^a}.$$

(β)

$$\dot{e}_x = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(T_x > t) dt = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt = \frac{b+x}{a-1}.$$

2. (α)

$$\begin{aligned} {}_{0.7}q_{50:1} &= 1 - {}_{0.7}p_{50:1} = 1 - \frac{s(50.8)}{s(50.1)} = 1 - \frac{0.2s(50) + 0.8s(51)}{0.9s(50) + 0.1s(51)} = \frac{0.7s(50) - 0.7s(51)}{0.9s(50) + 0.1s(51)} \\ &= \frac{0.7 - 0.7p_{50}}{0.9 + 0.1p_{50}} = \frac{0.7q_{50}}{0.9 + 0.1(1 - q_{50})}. \end{aligned}$$

3. (α) $f_{T_{40}}(t) = 1/60$ για $t \in [0, 60]$ και $f_{T_{40}}(t) = 0$ διαφορετικά. $f_{K_{40}}(t) = 1/60$ για κάθε $t = 0, 1, \dots, 59$ και $f_{K_{40}}(t) = 0$ διαφορετικά.

4. (α) Το δεδομένο γράφεται και ως $p_{y+1} \leq p_y$ για κάθε $y > 0$. Το ζητούμενο ισχύει για $k = 1$ από την υπόθεση. Για $k \geq 2$, έχουμε

$${}_k p_{x+1} = p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+k} \leq p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k-1} = {}_k p_x.$$

5. (β) $\bar{P} = CA_{50:\overline{30}|} / \bar{a}_{50:\overline{20}|}$.