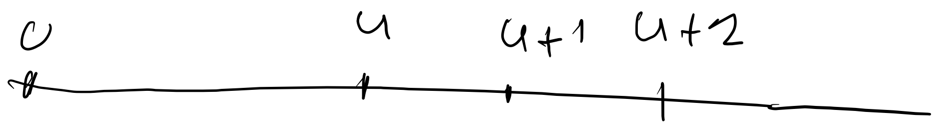
# Αναβαλλόμενες ράντες ζωής

Η καταβολή ξεκινάει σε χρόνο $u$ από σήμερα.

π.χ. η ${}_{u|}\ddot{a}_x$. Αναβαλλόμενη ισόβια προκαταβλητέα

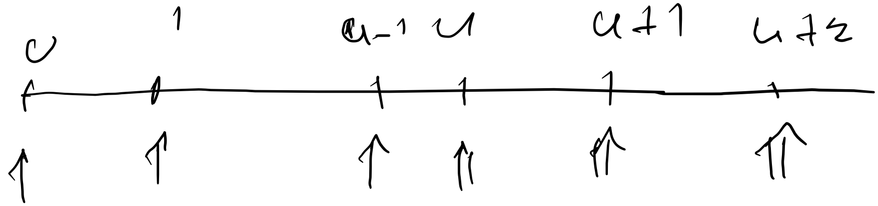



$$Y = \sum_{j=u}^{\omega} v^j \, 1_{T_x > j}$$

Αναλ. παρούσα αξία: ${}_{u|}\ddot{a}_x = EY = \sum_{j=u}^{\omega} v^j P(T_x > j)$

$$= \sum_{j=u}^{\omega} v^j \, {}_jp_x$$

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{u}|} + {}_{u|}\ddot{a}_x$$




Σxίσy:

$${}_{u|}\ddot{a}_x = {}_{u}E_x \; \ddot{a}_{x+u}$$

$$\| $$

$$v^u \, {}_u p_x$$

$$\sum_{j=u}^{\infty} v^j \, {}_j p_x \overset{j=k+u}{=} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+u} \, {}_{u+k} p_x =$$

$$= v^u \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_u p_x \; {}_k p_{x+u} = v^u \, {}_u p_x \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_{x+u}$$

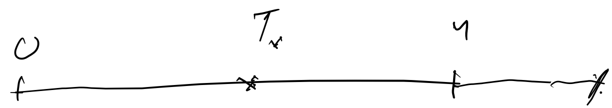
$$= {}_u E_x \; \ddot{a}_{x+u}$$

Εγγυημένες ράντες ζωής

Εγγυώνται πληρωμή τουλάχιστον για περίοδο n από σήμερα.

**Άσκηση** Μια συνεχής ράντα πληρώνει με ρυθμό $r(t)=1$ ως τον χρόνο $T_x \vee n$

Ν.δ. ότι η αναμ. παρούσα αξία της είναι




$$\bar{a}_{\overline{x:n|}} = \bar{a}_{\overline{n|}} + \int_n^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt$$

Λύση

$$\text{παρούσα αξία} = Y = \int_0^{T_x \vee n} v^t \, dt = \int_0^\infty v^t \, 1_{t < T_x \vee n} \, dt$$

$$EY = \int_0^\infty v^t \, P(T_x \vee n > t) \, dt$$

$$= \int_0^n v^t \, dt + \int_n^\infty v^t \, P(T_x > t) \, dt$$

$$= \bar{a}_{\overline{n|}} + \int_n^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt$$

Άσκηση: Να δείξετε ότι

$$Var(a_{\overline{K_x}|}) = Var(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}) = \frac{1}{d^2} Var(v^{K_x+1})$$

Λύση

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \quad + v^n$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \quad + v^{n-1} = \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n+1}|} = 1 + a_{\overline{n}|}$$

$$Var(X+a) = Var(X)$$

$$Var(cX) = c^2 Var(X)$$

$$\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = 1 + a_{\overline{K_x}|}$$

$$Var(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}) = Var(a_{\overline{K_x}|})$$

$$\parallel$$

$$Var\left(\frac{1 - v^{K_x+1}}{d}\right) = \frac{1}{d^2} Var(-v^{K_x+1})$$

$$= \frac{1}{d^2} Var(v^{K_x+1})$$

$$= \frac{1}{d^2}\left(E(v^{2(K_x+1)}) - (\underbrace{E(v^{K_x+1})}_{= A_x})^2\right)$$

$$v = e^{-\delta}$$

$$= \frac{1}{d^2}\left({}^2A_x - A_x^2\right)$$

**Exercise 5.14** Consider the following portfolio of annuities-due currently being paid from the assets of a pension fund.

| Age | Number of annuitants |
|---|---|
| 60 | 40 |
| 70 | 30 |
| 80 | 10 |

Each annuity has an annual payment of \$10 000 as long as the annuitant survives. The lives are assumed to be independent. Calculate

(a) the expected present value of the total outgo on annuities,
(b) the standard deviation of the present value of the total outgo on annuities, and
(c) the 95th percentile of the distribution of the present value of the total outgo on annuities using a normal approximation.

Λύση

$C = 10000$

(α) $40 \cdot \ddot{a}_{60} \cdot C + 30 \cdot \ddot{a}_{70} \cdot C + 10 \cdot \ddot{a}_{80} \cdot C$

$= C(40 \cdot 14.904 + 30 \cdot 12.008 + 10 \cdot 8.548)$

$\simeq 10418961 = m$

(β) $W = (X_1 + \quad + X_{40} + Y_1 + \quad + Y_{30} + Z_1 + \quad + Z_{10})C$

$Var(W) = C^2(40\,Var(X_1) + 30\,Var(Y_1) + 10\,Var(Z_1))$

$X_1 = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}$

$Var(X_1) = \frac{1}{d^2}\left({}^2A_{60} - A_{60}^2\right)$

$\ldots\ Var(W) = 311534 = \sigma^2$

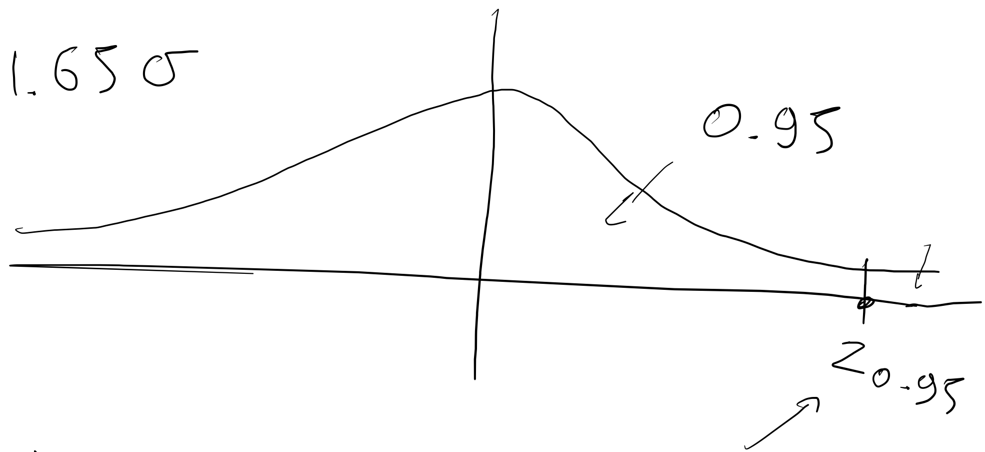
(γ) $W \sim N(m, \sigma^2)$

Ζητάμε $x_0$ ώστε $P(W \le x_0) = 0.95$

$$0.95 = P(W \le x_0) = P\Big(\underbrace{\frac{W-m}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \le \frac{x_0 - m}{\sigma}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_0 - m}{\sigma} = z_{0.95} = 1.65$$

$$x_0 = m + 1.65\,\sigma$$




$X_1, \quad , X_n$ $\qquad EX_1 = \mu$

$Var(X_1) = \sigma^2$

$S_n = X_1 + \quad + X_n$

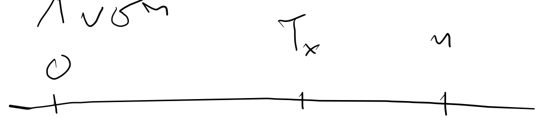
$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0,1) \qquad S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

**Άσκηση.** (5.2 στο [2]) Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$Y = \begin{cases} \upsilon^{T_x} \bar{a}_{\overline{n-T_x}|} & \text{αν } T_x \leqslant n, \\ 0 & \text{αν } T_x T_x > n. \end{cases}$$

(α) Να περιγραφεί μια συνεχής ράντα για την οποία η παρούσα αξία είναι $Y$.
(β) Δείξτε ότι $\mathbf{E}(Y) = \bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{x:\overline{n}|}$.
(γ) Εξηγήσετε το ερώτημα (β) με ένα οικονομικό επιχείρημα.

Λύση




Θεωρούμε ράντα που και πληρώνει με ρυθμό $v(t)$ στο $[T_x, n]$ αν $T_x \leq n$. Αλλιώς τίποτα.

$$Z = 1_{T_x \leq n} \int_{T_x}^{n} v^t \, dt \overset{t = s + T_x}{=}$$

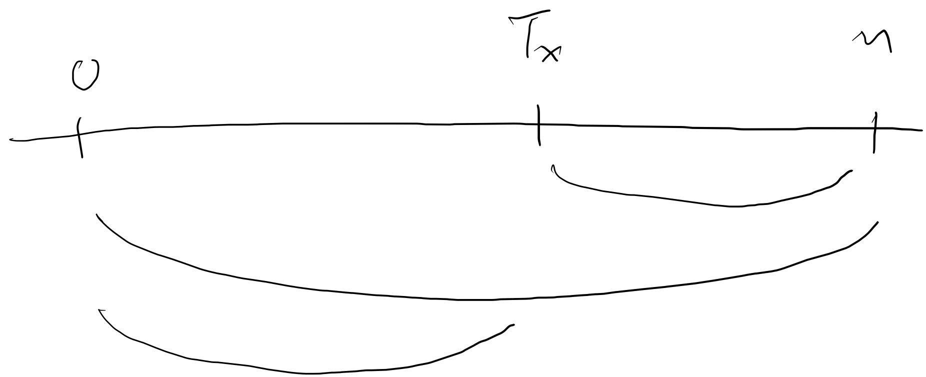
$$= 1_{T_x \leq n} \int_0^{n-T_x} v^{T_x + s} \, ds = v^{T_x} 1_{T_x \leq n} \bar{a}_{\overline{n-T_x}|}$$

$$= Y$$

(B)

$$W = \int_0^n v^t\,dt - \int_0^{T_x \wedge n} v^t\,dt \qquad \bar{a}_{\overline{n|}} - \bar{a}_{x:\overline{n|}} \;\; \text{"} E W$$

$$= \int_{T_x}^{n} v^t\,dt \; \mathbb{1}_{T_x \le n} = Y$$



# Ασφάλιστρα

$L =$ ολική απώλεια του ασφαλιστή

$=$ παρούσα αξία παροχών $-$ παρούσα αξία ασφαλίστρων

Αρχή της ισοδυναμίας: $E(L) = 0$

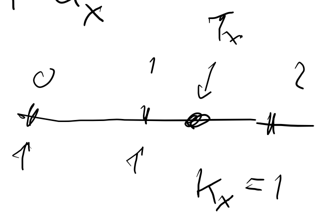
Αυτή καθορίζει τα ασφάλιστρα.

παράδειγμα: ο (x) αγοράζει την $A_x$

πληρώνει με $P\ddot{a}_x$

$P =$ το ασφάλιστρο

$$L = v^{K_x+1} - P\ddot{a}_{\overline{K_x+1|}}$$




$$0 = EL = E(v^{K_x+1}) - P\,E(\ddot{a}_{\overline{K_x+1|}})$$

$$= A_x - P\ddot{a}_x \Rightarrow P = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

$Var(L) = ?$

$$L = v^{K_x+1} - P\,\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = v^{K_x+1} - P\,\frac{v^{K_x+1}-1}{v-1}$$

$$= v^{K_x+1}\left(1 + \frac{P}{d}\right) - P\,\frac{1}{d}$$

$$\Rightarrow Var(L) = \left(1+\frac{P}{d}\right)^2 Var\left(v^{K_x+1}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{A_x}{d\,\ddot{a}_x}\right)^2 Var\left(v^{K_x+1}\right)$$

$$= \frac{(d\,\ddot{a}_x + A_x)^2}{(d\,\ddot{a}_x)^2} Var\left(v^{K_x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{(d\,\ddot{a}_x)^2} Var\left(v^{K_x+1}\right)$$

**Άσκηση.** (6.4 στο [1]) Θεωρούμε μια ισόβια ασφάλιση που δίνει 1 την στιγμή του θανάτου για τον $(x)$, ο οποίος έχει υπόλοιπο ζωής $T_x$ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή $\exp(1/50)$. Η ένταση επιτοκίου είναι $\delta = 0.06$. Ο $(x)$ πληρώνει την ασφάλιση με συνεχή τρόπο με ρυθμό $\bar{P}$.

(α) Να βρεθεί ο ρυθμός πληρωμής $\overline{P}$ με βάση την αρχή της ισοδυναμίας.

(β) Να βρεθεί ο ρυθμός πληρωμής $\overline{P}$ αν θέλουμε να ισχύει $\mathbf{P}(L > 0) = \frac{1}{2}$.

(γ) Κάντε το (β) για $\delta = 0$.

Λύση

$$L = v^{T_x} - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{T_x}|}$$

(α) $$0 = EL = E(v^{T_x}) - \bar{P}\,E(\bar{a}_{\overline{T_x}|})$$

$$= \bar{A}_x - \bar{P}\,\bar{a}_x \qquad \Big|\; T_x \sim \exp(\lambda),\ \lambda = \frac{1}{50}$$

$$\bar{P} = \bar{A}_x / \bar{a}_x = \frac{\delta \bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}$$

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x \Rightarrow \bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}$$

$$\bar{A}_x = E(e^{-\delta T_x}) = \int_0^\infty e^{-\delta y} \lambda e^{-\lambda y}\, dy$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda)y}\, dy = \lambda \left.\frac{e^{-(\delta+\lambda)y}}{-(\delta+\lambda)}\right|_0^\infty = \frac{\lambda}{\delta+\lambda}$$

$$\bar{P} = \frac{\delta \frac{\lambda}{\delta+\lambda}}{\frac{\delta}{\delta+\lambda}} = \lambda = \frac{1}{50}$$

(β) $L = v^{T_x} - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{T_x}|} = v^{T_x} - \bar{P}\,\frac{1-v^{T_x}}{\delta}$

$$= v^{T_x}\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}}{\delta} > 0$$

$$\Leftrightarrow \underset{e^{-\delta T_x}}{\overset{\shortparallel}{v^{T_x}}} > \frac{\bar{P}}{\delta}\,\frac{\delta}{\bar{P}+\delta} = \frac{\bar{P}}{\bar{P}+\delta}$$

$$\frac{1}{2} = P(L>0) = P\left(T_x < \left(\log\frac{\bar{P}}{\bar{P}+\delta}\right)\left(-\frac{1}{\delta}\right)\right)$$

$$= P\left(T_x < \frac{1}{\delta}\log\frac{\bar{P}+\delta}{\bar{P}}\right)$$

$$P(T_x < z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda y}\,dy = -e^{-\lambda y}\Big|_0^z = -\underbrace{e^{-\lambda z}}+1$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{\lambda}{\delta}\log -} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\frac{\lambda}{\delta}\log -} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\lambda}{\delta}\log\left(1+\frac{\delta}{\bar{P}}\right) = \log 2 \Rightarrow \ldots\ \bar{P} = \ldots$$

(γ) $L = 1 - \bar{P}\,T_x$

$$\Big(0 = EL = 1 - \bar{P}\,E(T_x) = 1 - \bar{P}\,\mathring{e}_x \Rightarrow \bar{P} = \frac{1}{\mathring{e}_x}\Big)$$

$$\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \int_0^{T_x} v^t\,dt = T_x$$

$$\frac{1}{2} = P\left(T_x > \frac{1}{\bar{P}}\right) = e^{-\lambda\frac{1}{\bar{P}}}$$

$$\Rightarrow \log 2 = \frac{\lambda}{\bar{P}} \Rightarrow \bar{P} = \frac{\lambda}{\log 2}$$

$$\bar{P}(\bar{A}_x)$$

Αν $\delta = 0$, τότε $\bar{P}(\bar{A}_x) = \dfrac{1}{\mathring{e}_x}$

**Άσκηση.** (Παράδειγμα 6.3.5 στο [1]) Να δειχθεί ότι $P_{x:\overline{n}|} = {}_nP_x + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}(1 - A_{x+n})$.

Τα σύμβολα σημαίνουν τα εξής.

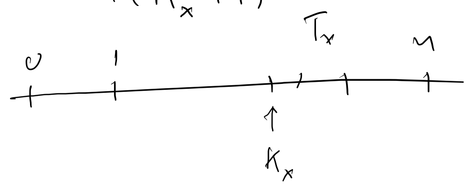
$P_{x:\overline{n}|}$: δόση για την εξόφληση σε $n$ έτη μεικτής ασφάλειας $n$ ετών.
${}_nP_x$: δόση για την εξόφληση σε $n$ έτη ισόβιας διακριτής ασφάλισης.
$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$: δόση για την εξόφληση σε $n$ έτη μεικτής διακριτής ασφάλισης $n$ ετών (πληρώνει 1 τη στιγμή $(K_x + 1) \wedge n$).

Οι δόσεις πληρώνονται στην αρχή κάθε χρονιάς από το ασφαλισμένο άτομο εφόσον ζει.

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad P = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

$$L = v^{T_x \wedge n} - P\,\ddot{a}_{\overline{n \wedge (K_x+1)}|}$$

$$0 = EL = A_{x:\overline{n}|} - P\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$




$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$L = v^n 1_{T_x > n} - P\,\ddot{a}_{\overline{n \wedge (K_x+1)}|}$$

$$0 = EL = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - P\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$