Άσκηση. (Παράδειγμα 6.3.5 στο [1]) Να δειχθεί ότι $P_{x:\overline{n}|} = {}_nP_x + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}(1 - A_{x+n})$.

Τα σύμβολα σημαίνουν τα εξής.

$P_{x:\overline{n}|}$: δόση για την εξόφληση σε n έτη μεικτής ασφάλειας n ετών.

${}_nP_x$: δόση για την εξόφληση σε n έτη ισόβιας διακριτής ασφάλισης.

$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$: δόση για την εξόφληση σε n έτη ~~μεικτής διακριτής~~ επιβίωσης ασφάλισης n ετών (πληρώνει 1 τη στιγμή $(K_x + 1) \wedge n$).

Οι δόσεις πληρώνονται στην αρχή κάθε χρονιάς από το ασφαλισμένο άτομο εφόσον ζει.

Λύση

$P_{x:\overline{n}|}$ $\qquad L = v^{n\wedge(K_x+1)} - P\,\ddot{a}_{\overline{n\wedge(K_x+1)}|}$ $\quad EL=0 \rightarrow$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$${}_nP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Ζητούμενη $\Leftrightarrow$ $A_{x:\overline{n}|} = A_x + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}(1 - A_{x+n})$ $\circledast$

όμως

$$A_x = A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + {}_{n|}A_x = A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + v^n\,{}_np_x\,A_{x+n}$$

$$= A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\,A_{x+n}$$

$\circledast \Leftrightarrow A_{x:\overline{n}|} = A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + \underline{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\,A_{x+n}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - \underline{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\,A_{x+n}}$

$\Leftrightarrow A_{x:\overline{n}|} = A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$

Άσκηση. (6.12 στο [1]) Έστω ότι το ετήσιο επιτόκιο είναι $i = 0.06$ και για τον (x) γνωρίσουμε ότι ${}_{k|}q_x = (1-r)r^k$ για $k = 0, 1, \ldots$ όπου $r \in (0,1)$ δεδομένο. Να υπολογιστούν οι ποσότητες

$$A_x, \ddot{a}_x, P_x, \frac{{}^2A_x - A_x^2}{(d\ddot{a}_x)^2}$$

ως συναρτήσεις των i, r.

λύση

$${}_{k|}q_x = P(k \le T_x < k+1) = P(K_x = k)$$

$$A_x = E(v^{K_x+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \overbrace{(1-r)r^j}^{P(K_x=j)}$$

$$= (1-r)v \sum_{j=0}^{\infty} (vr)^j = \frac{(1-r)v}{1-vr}, \quad v = \frac{1}{1+i}, \quad d = 1-v$$

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x \Rightarrow \ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d} = \ldots = \frac{1}{1-rv}$$

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = (1-r)v$$

$${}^2A_x = E((v^2)^{K_x+1}) = \frac{(1-r)v^2}{1-v^2r}$$

__Άσκηση__ Ο (55) ασφαλίζεται ώστε στα 70 να πάρει 20000 ενώ αν πεθάνει πιο πριν, οι κληρονόμοι να πάρουν 13000 στο τέλος του έτους θανάτου.

(α) Ποιο το ασφάλιστρο αν ο (55) πληρώνει στην αρχή κάθε έτους μέχρι να γίνει 70.

(β) Ποιο το ασφάλιστρο αν θέλει να αποπληρώσει σε 10 περιόδους

(γ) Ποιο το ασφάλιστρο αν θέλει να πληρώνει ως και τα 60 του.

Λύση

(α) $\circledast \; 20000\, A_{55:\overset{\;1}{\overline{15|}}} + 13000\, A^{1}_{55:\overline{15|}}$

$$= P\, \ddot{a}_{55:\overline{15|}} \Rightarrow P = \ldots$$

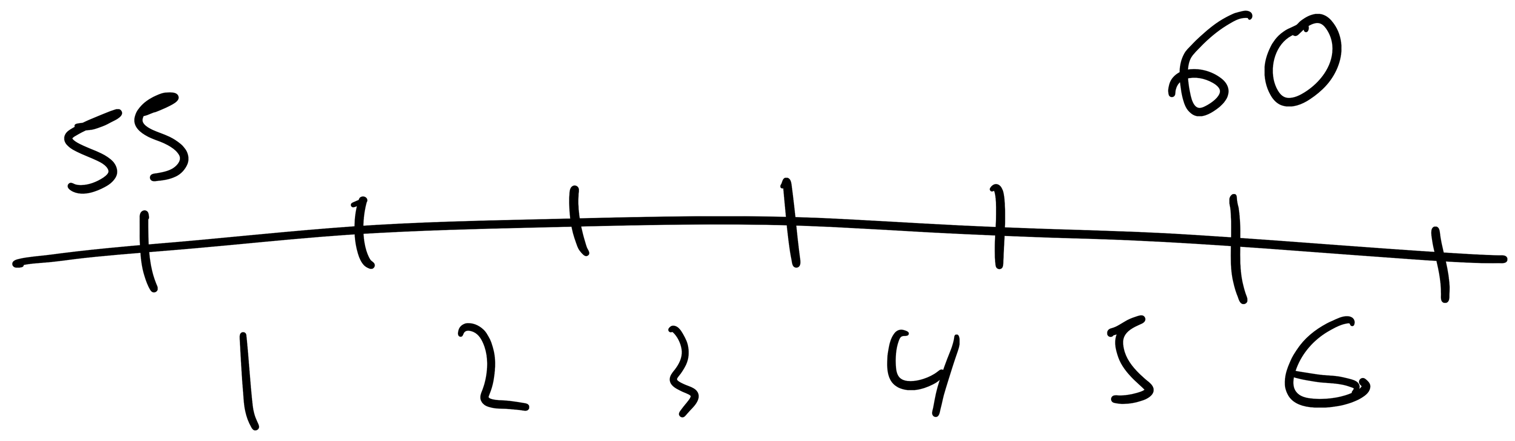
$$L = 20000\, v^{15}\, 1_{T_x \geq 15} + 13000\, v^{K_x+1}\, 1_{T_x<15} - P\, \ddot{a}_{\overline{15 \wedge (K_x+1)|}}$$

$EL = 0 \Rightarrow \circledast$

(β) πρέπει αριστερό μέλος της $\circledast$ να ισούται με

$$P'\, \ddot{a}_{55:\overline{10|}} \Rightarrow P' = \ldots$$

(γ)

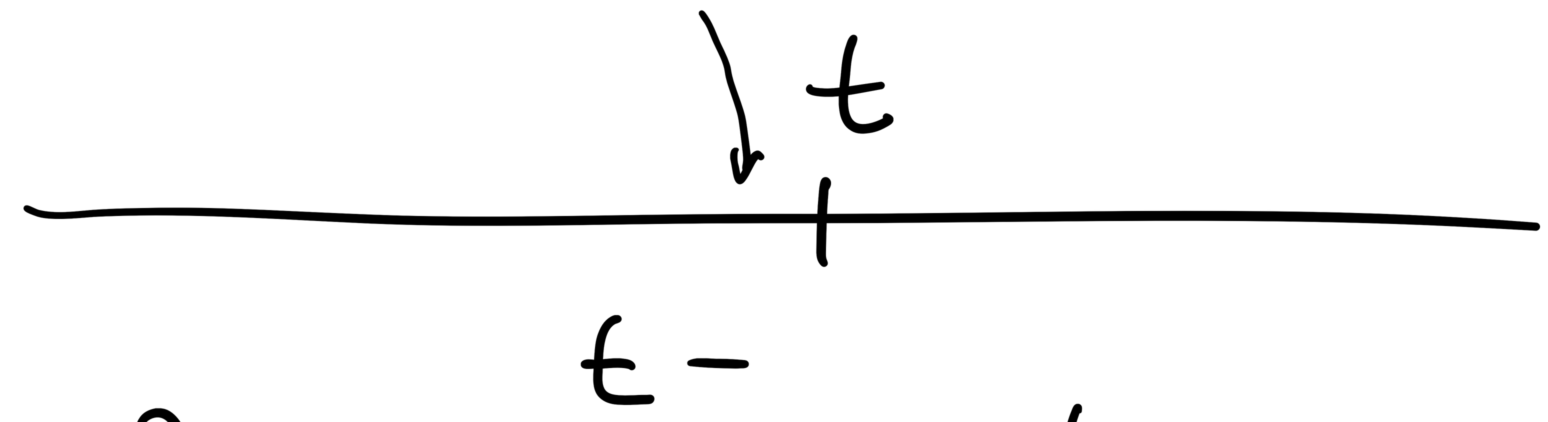


$$\ldots = P''\, \ddot{a}_{55:\overline{6|}} \Rightarrow P''$$

Αποθέματα

$_tL$ = Παρούσα αξία τον χρόνο t των μελλοντικών παροχών

− Παρούσα αξία τον χρόνο t των μελλοντικών ασφαλίστρων



Στεκόμαστε λίγο πριν το t.

Απόθεμα τη στιγμή t λέμε τον αριθμό

$${}_tV = E({}_tL \mid T_x > t)$$

Παρατήρηση: ${}_0V = 0$

Η δέσμευση $T_x > t$ σημαίνει $X > x+t$

$$T_x = X - x \mid X > x$$

$$X - x > t \qquad X > x+t$$

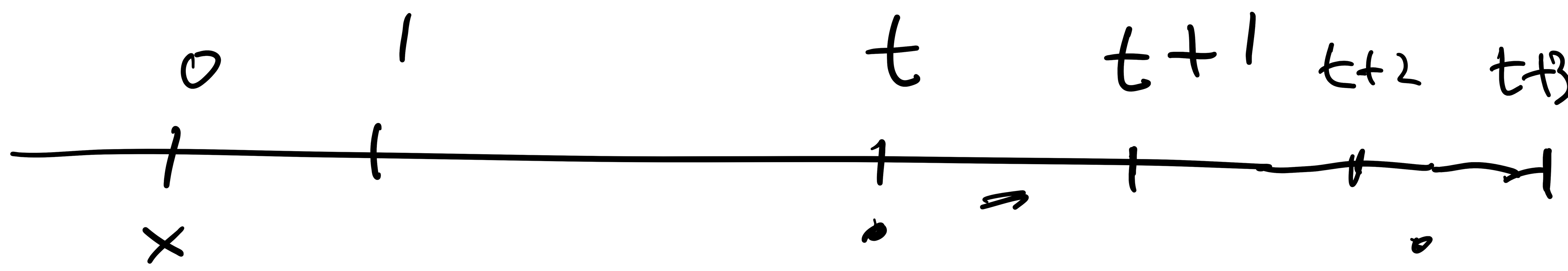
Παράδειγμα Ισόβια μακ διαιά διακριτή ασφάλιση που πληρώνεται με προκαταβλητέα ράντα ζωής

${}_tV = ;$

Ασφάλιστρο $P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$

Για $t = 0, 1, 2 \ldots$

$$ {}_tL = v^{K_x - t + 1} - P_x \, \ddot{a}_{\overline{K_x - t + 1}|} $$



$$ {}_tV = E\left({}_tL \mid T_x > t \right) \qquad X > x+t $$

όμως $K_x - t + 1 \mid X > x+t = [X - x] - t + 1 \mid X > x+t$

$$ = [X - x - t] + 1 \mid X > x+t = \underline{\underline{K_{x+t} + 1}} $$

Άρα ${}_tV = E\left(v^{K_{x+t}+1} - P_x \, \ddot{a}_{\overline{K_{x+t}+1}|} \right)$

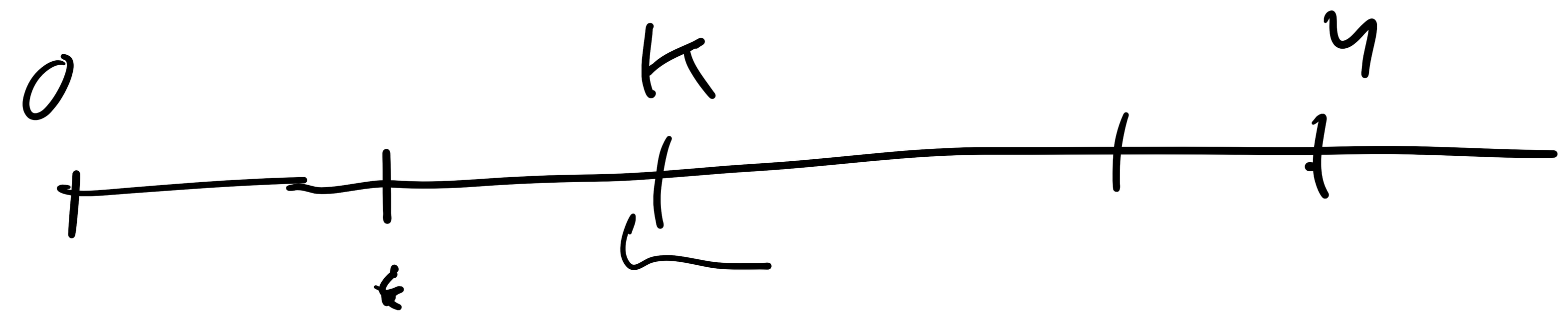
$$ = A_{x+t} - P_x \, \ddot{a}_{x+t} \leftarrow {}_tV_x $$

<u>Παράδειγμα</u> Διακριτή πρόσκαιρη n-ετής που πληρώνεται με προκαταβλητέα ράντα.

Το ασφάλιστρο είναι $P = P^{1}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

$k = 0, \quad , n$

$$ {}_kL = v^{K_x - k + 1} \, 1_{K_x \le n-1} - P \, \ddot{a}_{\overline{(K_x - k + 1) \wedge (n-k)}|} $$



$$ {}_kV = E\left({}_kL \mid T_x > k \right) = E\left(v^{K_{x+k}+1} \, 1_{K_{x+k} \le n-k-1} \right) $$

$$ - P \, E\left(\ddot{a}_{\overline{(K_{x+k}+1) \wedge (n-k)}|} \right) $$

$$K_x - k \mid T_x > k = K_{x+k}$$

$$(K_x \mid T_x > k) \le n-1 \Leftrightarrow k + K_{x+k} \le n-1$$

$$\Leftrightarrow K_{x+k} \le n-k-1$$

$$= A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

$${}_kV^{1}_{x:\overline{n}|} = \qquad k=0,1,\ \ ,n$$

$${}_nV^{1}_{x:\overline{n}|} = \underline{A^{1}_{x+n:\overline{0}|}} - P\,\ddot{a}_{x+n:\overline{0}|} = 0$$

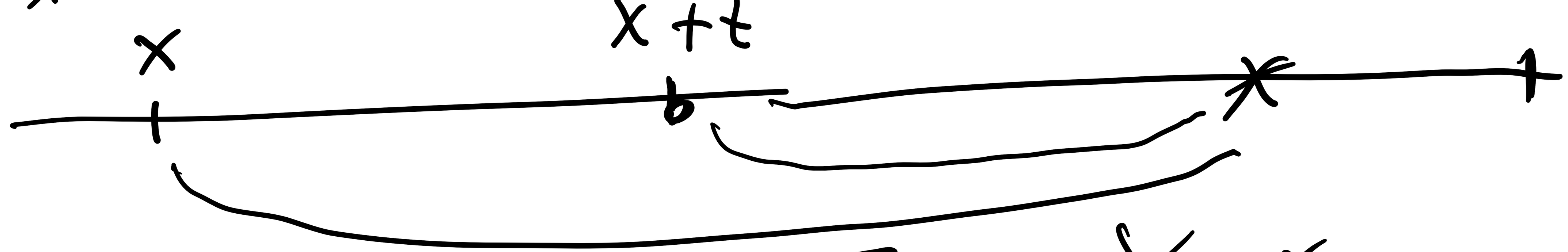
Παράδειγμα

Ασφάλιση $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$

πληρώνεται με συνεχή ράντα με ρυθμό $\bar{p}$ « $\bar{P}^{1}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$

Για $t \in [0,n]$

$${}_tL = v^{T_x - t}\, 1_{T_x<n} - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{(n-t)\wedge(T_x-t)}|}$$



$$(T_x \mid T_x > t) = (X - x \mid X > x+t) \qquad T_x = X - x$$

$$= (X-(x+t) \mid X > x+t) + t$$

$$= T_{x+t} + t$$

$X - x \mid X > x$

$$ {}_t\bar{V}_x = E({}_tL \mid T_x > t) = E\left(v^{T_{x+t}} 1_{T_{x+t} < n-t}\right) $$

$$ - \bar{P}\, E\left(\bar{a}_{\overline{(n-t) \wedge T_{x+t}|}}\right) = \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} $$

$$ - \bar{P}\, \bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad t \in [0, n] $$

Τύποι για το ${}_kV_x$

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x\, \ddot{a}_{x+k}, \quad P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} $$

(1) $1 - (P_x + d)\ddot{a}_{x+k}$

Αρκεί $\boxed{1 - d\ddot{a}_{x+k} = A_{x+k}}$ ισχύει

(2) $1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}$

$$ {}_kV_x = 1 - d\ddot{a}_{x+k} - \frac{A_x}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x+k} $$

$$ = 1 - d\ddot{a}_{x+k} - \frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x+k} $$

$$ = 1 - d\ddot{a}_{x+k} - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} + d\ddot{a}_{x+k} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} $$

(3) $\dfrac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x}$

$${}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} = \frac{\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} = \frac{1 - A_x - (1 - A_{x+k})}{1 - A_x}$$

$$\boxed{1 = d\ddot{a}_x + A_x} \qquad = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x}$$

${}_kV^1_{x:\overline{n}|} \leftarrow$ αναδρομής επαφείσσεις

Η αναδρομική σχέση

Σχέση ${}_kV$ με ${}_{k+1}V$

Η ασφάλιση και η πληρωμή γίνεται με τους εξής όρους

- η ασφ. πληρώνει C_{k+1} τον χρόνο $x+k$ αν $T_x \in [k, k+1)$
- το ασφάλιστρο για την περίοδο $[k, k+1)$ είναι Π_k και πληρώνεται στην αρχή της περιόδου.
- το επιτόκιο είναι i για όλες τις επόμενες περιόδους.

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Πρόταση $\Pi_k + {}_kV = v\left(q_{x+k}\, C_{k+1} + p_{x+k}\, {}_{k+1}V\right)$

$$k \quad \begin{cases} \xrightarrow{T_{x+k}<1} \text{πληρώνει } C_{k+1}. & q_{x+k} \\ \xrightarrow{T_{x+k}>1} \text{αποθεματικό } {}_{k+1}V. & p_{x+k} \end{cases}$$

$${}_{l+s}p_x = {}_lp_x \; {}_sp_{x+l}$$

Διάσπαση του ασφαλίστρου $\quad 1-q_{x+k}$

$$\Pi_k = v\, C_{k+1}\, q_{x+k} + v\, {}_{k+1}V \; p_{x+k} - {}_kV$$

$$= \underbrace{{}_{k+1}V\, v - {}_kV}_{\Pi_k^s} + \underbrace{v\, q_{x+k}\left(C_{k+1} - {}_{k+1}V\right)}_{\Pi_k^r}$$

Άσκηση Αν $P_x = \frac{4}{11}$, ${}_tV_x = 0.5$, $\ddot{a}_{x+t} = 1.1$ για κάποιο $t \in \mathbb{N}^*$ να υπολογισθεί το v.

Λύση

$$0.5 = {}_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} \Rightarrow \ddot{a}_x = 2\ddot{a}_{x+t} = 2.2$$

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} \Rightarrow A_x = \frac{4}{11} \cdot 2.2 = \frac{4}{5}$$

$$1 = A_x + d\,\ddot{a}_x \Rightarrow d = \frac{1-\frac{4}{5}}{2.2}$$

$$v = 1 - d$$

Παράδειγμα   Ο (50) αγοράζει τρεις ασφαλίσεις

Α: ισόβια διαρκείας

Β: προσωρινή 15 ετών

Γ: επιβίωσης 15 ετών

παροχή $= C = 10000$

$i = 0.05$ $\mu_x = A + Bc^x$, A, B, c γνωστά ...

${}_tp_x$ ...

$\ddot{a}_y$, A_{x+t}

Βρίσκουμε $P_A = C \cdot \dfrac{A_{50}}{\ddot{a}_{50}} = 111.19$

$$P_B = C \, \frac{A^1_{50:\overline{15}|}}{\ddot{a}_{50:\overline{15}|}} = \ldots = 23{,}74$$

$$P_\Gamma = C \, \frac{A_{50:\overset{1}{\overline{15}|}}}{\ddot{a}_{50:\overline{15}|}} = 428.47$$

Για τα αποθέματα ${}_kV^1_{x:\overline{n}|} = A^1_{x+k:\overline{n-k}|} - P_B \, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$

Πίνακας 5.1: Οι συναρτήσεις του Παραδείγματος 5

k	$\ddot{a}_{50+k}$	$\ddot{a}_{50+k:\overline{15-k}\rvert}$	$C \times A_{50+k}$	$C \times A^{\ 1}_{50+k:\overline{15-k}\rvert}$	$C \times A_{50+k:\overline{15-k}\rvert}^{\qquad\ 1}$	${}_kV_{50}$	${}_kV^{\ 1}_{50:\overline{15}\rvert}$	${}_kV_{50:\overline{15}\rvert}^{\quad\ 1}$
0	17.02	10.77	1893.08	255.75	4615.15	0	0	0
1	16.84	10.27	1978.04	256.76	4851.77	104.79	12.86	450.44
2	16.66	9.74	2066.38	256.63	5101.15	213.76	25.15	924.09
3	16.46	9.19	2158.18	255.15	5364.08	327.00	36.71	1422.29
4	16.26	8.62	2253.51	252.08	5641.45	444.60	47.32	1946.46
5	16.05	8.01	2352.44	247.16	5934.19	566.63	56.75	2498.17
6	15.84	7.38	2455.03	240.07	6243.34	693.17	64.72	3079.12
7	15.62	6.71	2561.33	230.46	6570.04	824.29	70.92	3691.14
8	15.39	6.01	2671.37	217.92	6915.55	960.03	74.99	4336.26
9	15.15	5.28	2785.19	202.01	7281.25	1100.44	76.51	5016.69
10	14.90	4.51	2902.82	182.18	7668.69	1245.53	75.02	5734.91
11	14.64	3.70	3024.26	157.85	8079.58	1395.33	69.96	6493.62
12	14.38	2.84	3149.50	128.31	8515.85	1549.81	60.70	7295.86
13	14.11	1.94	3278.52	92.78	8979.65	1708.96	46.53	8145.04
14	13.83	1	3411.27	50.36	9473.45	1872.72	26.61	9044.97
15	13.54	0	3547.72	0	10000.00	2041.02	0	10000.00