

Διάλεξη 4

ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ

(Δεν περιέχεται
στον Evans)

Λήμμα

$E \subset \mathbb{R}^n$. $\mathcal{G}$ οικογένεια ανοικτών συνόλων $\{U_\alpha\}$, $E \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$.
Τότε $\exists$ οικογένεια Φ μη αρνητικών συναρτήσεων $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,
 $0 \leq f \leq 1$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\forall f \in \Phi \exists U \in \mathcal{G}$ τ.ω. $\text{spt } f \subset U$

(ii) Αν $K \subset E$ συμπαγές, τότε $\text{spt } f \cap K \neq \emptyset$ για
πεπερασμένο αριθμό $f \in \Phi$

(iii) $\sum_{f \in \Phi} f(x) = 1 \quad \forall x \in E$.

Απόδειξη

(A) Έστω E συμπαγές. $\Rightarrow E \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$, $U_i \in \mathcal{G}$.

$E_i = E \cap U_i$ συμπαγές και $E \subset \bigcup_{i=1}^N E_i$, $E_i \subset U_i$.

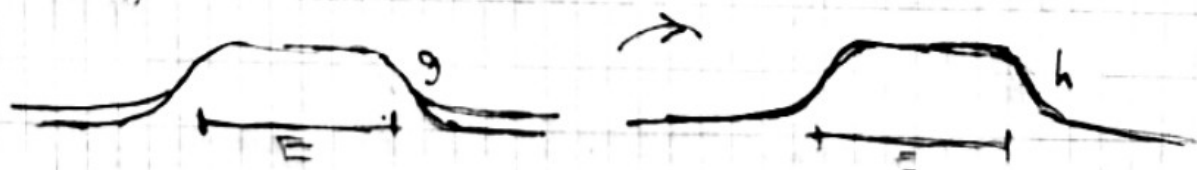
Ομοιομορφίας των χ_{E_i} $\exists g_i \in C_0^\infty(U_i)$, $g_i \geq 0$ στο E_i

($g_i = \chi_{E_i} * \eta_\varepsilon$)
 ε μικρό



($\text{dist}(E_i, \partial U_i) > 0$)

Θέτουμε $g = \sum_{i=1}^N g_i$. $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \geq 0$ σε περιοχή
του E . Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατό να κατασκευάσουμε
 $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h > 0$ παντού, $h = g$ στο E



Τέλος ορίζουμε την οικογένεια $\Phi = \{f_i : f_i = \frac{g_i}{g}, 1 \leq i \leq N\}$
που έχει τις ιδιότητες (i), (ii), (iii)

($\text{spt } f_i = \text{spt } g_i \subset U_i$, (ii) τετριμμένο διότι Φ πεπερασμένο,
(iii) $\sum f_i = \frac{1}{g} \sum g_i = \frac{g}{g} = 1$ στο E)

③ Έστω E ανοικτό

Θέτουμε $E_i = \{x \in E \mid \text{dist}(x, \partial E) \geq \frac{1}{i}\} \cap \bar{B}(0, i)$
 $\therefore E_i$ συμπαγές και $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ($E_i \subset E_{i+1}$)

Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{F}_i$ ανώτερων ανωτέρων

$$\bigcup \{ \text{int} E_{i+1} - E_{i-2} \}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (E_0 = E_{-1} = \emptyset)$$

η οποία προφανώς καλύπτει στο σύνολο $E_i = \text{int} E_i$,
 και από (A) έχει διαμέριση της πυκνότητας $\mathcal{F}_i$ με πεπεσμένο
 ημιόριο στοιχείων.

Θεωρούμε τώρα

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{g \in \mathcal{F}_i} g(x)$$

και παρατηρούμε ότι είναι πεπεσμένο αριθμός όρων και
 μη μηδενικοί, και

$$S(x) > 0 \quad \text{στο } E$$

$$\left(\text{διότι } E_{i+2} - E_{i-2} \in \{x \in E \mid \frac{1}{i-2} \geq \text{dist}(x, \partial E) \geq \frac{1}{i+1}\} \right)$$

Τέλος για διαμέριση της πυκνότητας για το ανοικτό E
 ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{F} = \left\{ f : \begin{array}{l} f(x) = \frac{g(x)}{S(x)} \quad \text{για κάποια } g \in \mathcal{F}_i \text{ αν } x \in E_i \\ f(x) = 0 \quad \text{αν } x \notin E \end{array} \right\}$$

□

Άσκηση 4

(i) Αν E ανοικτό και φραγμένο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την διαίρεση της μονάδας για το $\bar{E}$ που παρέχει η Απόδειξη των $\textcircled{A}$;

(ii) Στην περίπτωση που ανήκειται E τι κάνουμε;

Προεγγρίσεις Συναρτήσεων Sobolev Μετα Όρους Συναρτήσεων

Δεδομένη στην Άσκηση 3 προεγγρίση

(Τοπική Προεγγρίση) $u^\varepsilon \in C^\infty(\bar{U}_\varepsilon)$, $u^\varepsilon \rightarrow u$ $W_{loc}^{k,p}(U)$, $\varepsilon \rightarrow 0$

Τι περιόριση βεβαιώνει έχουμε;

(α) $\{u^\varepsilon\} \subset C^\infty(\bar{U})$, $u^\varepsilon \rightarrow u$ $W^{k,p}(U)$, $(0,1) \oplus \mathbb{R}$

(β) $\{u^\varepsilon\} \subset C^\infty(\bar{U})$, $u^\varepsilon \rightarrow u$, $W^{k,p}(\bar{U})$

Το (α) είναι σωστό $(0,1) \oplus \mathbb{R}$

Το (β) εξαρτάται από την οφειστικότητα του ∂U .

Σύμπληρωμα: Εστω $U = (0,1)$

$f(x) = \frac{1}{x} \in C^\infty(0,1)$, $f \notin W^{1,1}(U)$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in C^\infty(0,1)$, $g \in W^{1,1}(U)$

$h(x) = x \in C^\infty(\bar{U})$.

Θεωρημα (λογισμ I)

U ανοικτό + φραγμένο, $u \in W^{k,p}(U)$, $1 \leq p < \infty$

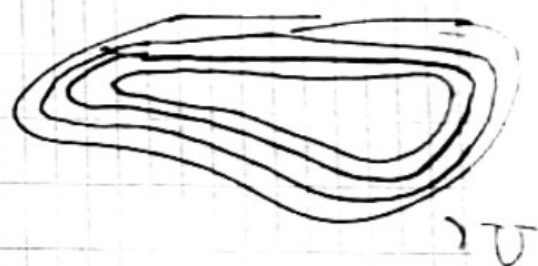
$\exists u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ τ.ω.

$$u_m \rightarrow u, \quad W^{k,p}(U)$$

Απόδειξη

(A) Προπαρασκευαστικά

$$U_i = \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{i}\}$$



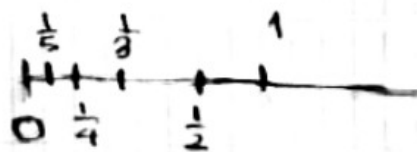
$$U_i \subset U_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$V_i = U_{i+1} - \bar{U}_i = \text{ανοικτό}, \quad i = 0, 1, \dots$$

$$U = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i, \quad \{V_i\} \text{ ανοικτά χωρία}$$

Παράδειγμα

$$U = (0, 10), \quad U_i = \left(\frac{1}{i}, 10 - \frac{1}{i}\right)$$



$$V_0 = U_1 - \bar{U}_0 = \left(\frac{1}{1}, 10 - \frac{1}{1}\right) - [0, 10] = \left(\frac{1}{1}, 1\right) \cup (9, 10)$$

$$V_1 = U_2 - \bar{U}_1 = \left(\frac{1}{2}, 10 - \frac{1}{2}\right) - \left[\frac{1}{1}, 10 - \frac{1}{1}\right] = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right) \cup \left(10 - \frac{1}{2}, 10 - \frac{1}{1}\right)$$

$$V_2 = U_3 - \bar{U}_2 = \left(\frac{1}{3}, 10 - \frac{1}{3}\right) - \left[\frac{1}{2}, 10 - \frac{1}{2}\right]$$

$$V_2 \cap V_0 = \emptyset, \quad V_2 \cap V_1 = \emptyset, \dots$$

(B) ① θεωρούμε για διαμέριση του χώρου επί του U
ως προς το καλύμμα $\{V_i\}$, $\Phi = \{z_i\}$, $z_i \in C_c^\infty(V_i)$

$$\sum_i z_i = 1 \text{ στο } U, \quad 0 \leq z_i \leq 1$$

Δίνουμε $u \in W^{k,p}(U)$ έχουμε ότι $z_i u \in W^{k,p}(U)$

$$\text{supp } z_i u \subset V_i$$

② Επιλέγουμε $\delta > 0$ και ορίζουμε

$$u^i = \gamma_{z_i} * (z_i u)$$

με $z_i > 0$ μικρό, τ.ω. $\text{supp } u^i \subset W_i := U_{i+4} - \bar{U}_i \supset V_i$.
Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Εσωτερικής Πραξέγγλισης,
και επιλέγοντας εικόνα κατάλληλα μικρή επιτυγχάνουμε

$$\|u^i - z_i u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}}$$

③ Τέλος ορίζουμε στο U

$$v = \sum u^i$$

• Κρυφά ορίζεται αδροσχη δ ώστε $\forall x \in U$ έχουμε σφαιράκις
μικρός περιέχεται.

• Επίσης $\forall V \subset\subset U$ έχουμε πεπερασμένο αριθμό προδότην

$$\Rightarrow v \in C_c^\infty(U)$$

στο $V \subset U$, φεραρισμένο αναδο

$$u = \sum z_i u$$

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(V)} \leq \sum \|u^\delta - z_i u\|_{W^{k,p}(U)}$$

$$\leq \sum \frac{\delta}{2^{i+1}}$$

$$= \delta.$$

Η εκτίμηση ανεξάρτητη του V !

$$\sup_{V \subset U} \|v - u\|_{W^{k,p}(V)} \leq \delta$$

$\Rightarrow$

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \delta$$

□

Σημ:

Εάν $\int_V |f| dx < C$, C ανεξάρτητο του $V \subset U$

$$\Rightarrow \sup_{V \subset U} \int_V |f| dx = \int_U |f| dx \leq C. \quad (\text{γιατί;})$$

-25-

Arkus 5, 6 and Evans, 6.306.

#