ΕΚΠΑ. Τμήμα Μαθηματικών.

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση (2024-25)

Προβλήματα

1. Να δειχθεί ότι η νόρμα
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$
στον $C([0,1])$ δεν προέρχεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο.

2. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τον υπόχωρο του l^2
$$A_n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) : x_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$$
Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του l^2.

3. Έστω $n \geq 3$ και $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \mathbb{C}$ οι n-στες ρίζες της μονάδας. Να δειχθεί ότι
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \omega_k \|x + \omega_k y\|^2 \ .$$

4. Να δειχθεί ότι δύο διανύσματα $x, y \in \mathcal{H}$ είναι κάθετα μεταξύ τους αν και μόνο αν $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

5. Έστω M και N κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$. Να δειχθεί ότι
$$\text{(i)} \qquad (M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}\ , \qquad \text{(ii)} \qquad (M + N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}.$$

6. Να αποδειχθεί ότι ο τελεστής
$$(Af)(x) = \int_x^1 \frac{f(y)}{y} dy$$
είναι φραγμένος στον $L^2(0,1)$.

7. Στον $L^2(0,1)$ ορίζουμε τον τελεστή
$$Kf(x) = \int_0^1 e^{x-y} f(y) dy.$$
Να υπολογιστεί η $\|K\|$.

8. Έστω $T : L^2(0,+\infty) \to L^2(0,+\infty)$ ο τελεστής $(Tf)(x) = f(x+1)$, $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\|T^n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αλλά $\lim_n \|T^n f\| = 0$ για κάθε $f \in L^2(0,+\infty)$.

9. Να αποδειχθεί ότι για κάθε τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ισχύει $\mathrm{Ker}(A^*) = (\mathrm{Ran}(A))^\perp$ και $\overline{\mathrm{Ran}(A^*)} = \mathrm{Ker}(A)^\perp$.

10. Έστω P και Q οι ορθογώνιες προβολές πάνω στους κλειστούς υποχώρους M και N αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & \langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle \ , \quad x \in \mathcal{H} \\ \text{(ii)} & \|Px\| \leq \|Qx\| \ , \quad x \in \mathcal{H} \\ \text{(iii)} & PQ = QP = P \\ \text{(iv)} & M \subset N. \end{array}$$

11. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και έστω στον l^2 ο τελεστής
$$A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots).$$
Να βρεθεί το φάσμα $\sigma(A)$.

12. Στον l^2 να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα φάσματα των τελεστών S και S^* της δεξιάς και αριστερής μετατόπισης.

13. (i) Έστω I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας, έστω $h \in L^\infty(I)$ και έστω M ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής, $(Mf)(x) = h(x)f(x)$. Διατυπώστε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη επί της h προκειμένου ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ να είναι ιδιοτιμή του M. (ii) Να δειθχεί ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $(Mf)(x) = xf(x)$ στον $L^2(0,1)$ δεν έχει καμία ιδιοτιμή.

14. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $A : l^2 \to l^2$ ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής,
$$A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots) \ .$$
Να δειχθεί ότι ο A είναι συμπαγής αν και μόνο αν $a_n \to 0$.

15. Έστω M κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ και έστω $A \in \mathcal{B}(M)$ και $B \in \mathcal{B}(M^\perp)$. Ορίζουμε τον τελεστή $A \oplus B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ από τη σχέση
$$(A \oplus B)(x \oplus y) = Ax \oplus By \ , \quad x \in M, \ y \in M^\perp.$$
Να δειχθεί ότι $\|A \oplus B\| = \max\{\|A\|, \ \|B\|\}$ και $\sigma(A \oplus B) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$.

16. (i) Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και P ένα μιγαδικό πολυώνυμο. Να δειχθεί ότι
$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) := \{p(z) : z \in \sigma(T)\}$$
[*Για ένα μιγαδικό πολυώνυμο* $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ *θέτουμε* $p(T) = a_n T^n + \ldots + a_0 I$]. (ii) Έστω ότι για τον $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ισχύει $T^2 = 3T$. Να αποδειχθεί ότι $\sigma(T) \subset \{0, 3\}$ και για $z \notin \{0, 3\}$ να βρεθεί ένα απλός τύπος για το $(z - T)^{-1}$.

17. Να βρεθούν η συνάρτηση Green καθώς και οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Sturm-Liouville

$$Lu = -u'' \quad , \qquad u'(0) = u(1) = 0\,.$$

18. Έστω ο τελεστής Sturm-Liouville

$$Lu(x) = -(p(x)u')' + q(x)u,$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} \alpha u(0) + \alpha' u'(0) &= 0 \\ \beta u(1) + \beta' u'(1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι αν $\alpha\alpha' \leq 0$ και $\beta\beta' \geq 0$ τότε το σύνολο των ιδιοτιμών του L είναι κάτω φραγμένο (και συνεπώς, υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το μηδέν να μην είναι ιδιοτιμή του $L + \gamma$).

19. Έστω S μία ομαλή επιφάνεια η οποία χωρίζει το $\mathbb{R}^n$ σε δύο χωρία A και B. Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ομαλές συναρτήσεις και έστω

$$u(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη αν και μόνο αν $f = g$ επί της S.

20. Να βρεθούν τα $\beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία η συνάρτηση $u(x) = |x|^\beta$, $x \in \mathbb{R}^n$, είναι (κλασικά) παραγωγίσιμη και αυτά για τα οποία είναι ασθενώς παραγωγίσιμη.

21. Να δειχθεί ότι αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω και $\psi \in C^\infty(\Omega)$ τότε η $u\psi$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω και ισχύει ο γνωστός τύπος για την παράγωγο γινομένου.