Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ, Θεωρία Αριθμών 532, Ομάδα Α
7 Ιουνίου 2018

Να απαντήσετε σε τόσα ερωτήματα ώστε το άθροισμα των μονάδων να είναι τουλάχιστον 100. Υποχρεωτικό είναι το 3ο θέμα καθώς επίσης και το ερώτημα με το μοτίβο.

Θέμα 1ο

1. (3,-2) Για κάθε πρώτο διάφορο του 2 και κάθε ακέραιο a ισχύει $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
   - Σ
   - Λ
2. (3,-2) Έστω a, b, c, m θετικοί ακέραιοι με $ac \equiv bc \mod m$. Τότε ισχύει $a \equiv b \mod m$.
   - Σ
   - Λ
3. (3,-2) Έστω a, b, m θετικοί ακέραιοι. Τότε η ισοδυναμία $ax \equiv b \mod m$ έχει πάντοτε λύση στους ακεραίους.
   - Σ, Λ
4. (3,-2) Ισχύει $-191 \equiv 19 \mod 11$.
   - Σ, Λ
5. (3,-2) Το σύνολο $\{0, 241, -33, -222, -111\}$ είναι ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων *modulo* 5.
   - Σ, Λ
6. (3,-2) Έστω a, b ακέραιοι αριθμοί με $a|c$ και $b|c$. Τότε $ab|c$.
   - Σ, Λ
7. (3,-2) Έστω a, b ακέραιοι αριθμοί και p πρώτος αριθμός με $p|ab$. Τότε $p|a$ και $p|b$.
   - Σ, Λ

Θέμα 2ο

8. (13) Έστω a, b θετικοί ακέραιοι αριθμοί σχετικά πρώτοι μεταξύ τους. Δείξτε ότι $a^{\phi(b)} + b^{\phi(a)} \equiv 1 \mod (ab)$.
9. (5) Να γράψετε τον ορισμό του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο ακεραίων a, b εκ των οποίων ένας τουλάχιστον δεν είναι μηδέν.
10. (11) Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τους ακεραίους $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ και δυνάμεις αυτών $\mod 5$. Να διατυπώσετε όποια μοτίβα παρατηρείτε.

a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	4	3	1	2	4
3	4	2	1	3	4
4	1	4	1	4	1
5	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1

11. (11) Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $7x + 11y = 100,\ x, y \in \mathbb{Z}$ και στη συνέχεια να βρεθούν οι θετικές της λύσεις.

12. (11) Να βρεθεί ο $gcd(42823, 6409)$ και να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών.

13. (11) Έστω $\mathbf{P}$ το σύνολο των πρώτων αριθμών. Θεωρήστε ότι ο ακέραιος αριθμός 1 είναι πρώτος ενώ ο ακέραιος αριθμός 2 δεν είναι πρώτος. Υπάρχουν άπειροι πρώτοι οι οποίοι ανήκουν στο $\mathbf{P}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

14. (7) Να λυθεί η γραμμική ισοδυναμία $39x \equiv -12 \mod 18$.

15. (11) Δείξτε ότι υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $k7 = 1941^{1963} + 1963^{1991}$.

16. (13) Να λυθεί στους ακέραιους αριθμούς το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{array}{lcll} 2x & \equiv & 11 & \mod 5 \\ 3x & \equiv & -3 & \mod 9 \\ x & \equiv & -14 & \mod 17. \end{array}$$

Θέμα 3ο

17. (17) Για κάθε πρώτο αριθμό p δείξτε ότι αν $a^p \equiv b^p \mod p$ τότε ισχύει $a^p \equiv b^p \mod p^2$.

Σύνολο μονάδων: 131.
Διάρκεια εξέτασης: 179 λεπτά.
Καλή επιτυχία.