Η προαγωγή της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών

Κόσυβας Γιώργος, *Δρ, M.Ed., DES, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ3*

Περίληψη: Η μαθηματική δημιουργικότητα είναι μια δυναμική ικανότητα του ανθρώπινου μυαλού που μπορεί να προάγεται ή να καταπνίγεται. Αποτελεί ένα θέμα το οποίο είναι παραμελημένο στη διδασκαλία των μαθηματικών, ενώ συνδέεται συχνά με την «ιδιοφυία». Ποιες μεθόδους θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για να ενθαρρύνουμε τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών; Η παρούσα εργασία έχει ως θέμα τη διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας μαθηματικά υποσχόμενων δεκατετράχρονων μαθητών μέσω της χρήσης ανοιχτών προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις. Ο δάσκαλος-ερευνητής προσπαθεί να εμπλέξει τους μαθητές σε ανοιχτές διερευνήσεις που αναπτύσσουν τη γεωμετρική και αλγεβρική σκέψη τους. Με τη δημιουργία ενός κατάλληλου μαθησιακού περιβάλλοντος οι μαθητές διατυπώνουν και ελέγχουν εικασίες, προβάλλουν επιχειρήματα και συζητούν τις αποδείξεις τους. Η πλούσια παραγωγή ιδεών χαρακτηρίζεται από πρωτοτυπία, ευχέρεια και ευελιξία, συστατικά που συνδέονται με τον πυρήνα των διαστάσεων της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών, η οποία θα πρέπει να αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους στόχους της σύγχρονης διδασκαλίας των μαθηματικών.

Λέξεις-κλειδιά: μαθηματική δημιουργικότητα, ανοιχτή διερεύνηση, προβληματοθεσία, ανοιχτό πρόβλημα, πορίσματα πυθαγορείου θεωρήματος.

Εισαγωγή

Η δημιουργικότητα είναι ένα χαρακτηριστικό που συναντούμε όχι μόνο στους καλλιτέχνες και τους επιστήμονες, αλλά αποτελεί επίσης μέρος της καθημερινής ζωής. Για παράδειγμα κατά τη λύση πρακτικών προβλημάτων ένας τεχνίτης που κάνει μαστορέματα ή ένας βοσκός που μετρά το γάλα με καρδάρια διαφορετικής χωρητικότητας χρησιμοποιούν τη δημιουργική τους σκέψη.

Στη μαθηματική επιστήμη η δημιουργική ικανότητα θεωρείται ως αναπόσπαστο μέρος της έρευνας. Η δημιουργική σκέψη χαρακτηρίζεται από τη διαίσθηση και την αναλυτική σκέψη (Pehkonen, 1997). Όμως τα σχολικά μαθηματικά και η δημιουργικότητα αποτελούν διαχωρισμένους κόσμους. Παρότι η γνήσια μαθηματική δραστηριότητα είναι στενά συνυφασμένη με τη μαθηματική δημιουργικότητα, το σχολείο αδιαφορεί για τις ιδιαίτερες ανάγκες και τα μαθησιακά ενδιαφέροντα των ταλαντούχων παιδιών (Πούλος, 2010).

Κύριος σκοπός αυτής της εργασίας είναι να προτείνει την εμπλοκή των μαθητών σε μαθησιακές δραστηριότητες που συνδέονται με την ανάπτυξη και την προαγωγή της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ειδικότερα, μελετούμε τη μαθηματική δημιουργικότητα μέσω ανοιχτών διερευνήσεων όπως είναι η προβληματοθεσία (διατύπωση προβλήματος από τους μαθητές) και η λύση ανοιχτών προβλημάτων (Kosyvas, 2010).

Θεωρητικό πλαίσιο

Από τις απαρχές της έρευνας, η δημιουργικότητα μελετάται ως γνώρισμα που χαρακτηρίζει γενετικώς προικισμένα άτομα. Δεν υπάρχει ένας αξιόπιστος ορισμός της δημιουργικότητας (Leikin, 2009 – Mann, 2006 – Spiraman, 2005), ούτε μια πλήρως διαμορφωμένη και κοινά αποδεκτή επιστημονική θεωρία για αυτήν (Boden, 1998 – Csikszentmihalyi, 1996 – Haylock, 1987). Σύμφωνα με τη βιβλιογραφική έρευνα του Mann (2006) υπάρχουν περισσότεροι από 100 ορισμοί της δημιουργικότητας. Παραθέτουμε δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις που σφράγισαν την έρευνα της δημιουργικότητας:

Πρώτον, ο Guilford (1959) διέκρινε τη συγκλίνουσα από την αποκλίνουσα σκέψη. Η *συγκλίνουσα σκέψη* βασίζεται στην κριτική ικανότητα του ατόμου να αναλύει, να συγκρίνει, να συνθέτει και να ταξινομεί παραστάσεις και έννοιες και έχει ως συνέπεια μια μόνο σωστή λύση σε ένα πρόβλημα. Η *αποκλίνουσα σκέψη* αντιπροσωπεύει έναν ελεύθερο τύπο πνευματικής διεργασίας που βασίζεται στη φαντασία και περιγράφεται συνήθως ως ευέλικτη σκέψη. Κατά την αποκλίνουσα σκέψη το πρόβλημα συνεξετάζεται από πολλές οπτικές γωνίες, ενώ λαμβάνουν χώρα ενορατικές, αλματώδεις και συνθετικές ενέργειες της σκέψης που οδηγούν στη δημιουργική γένεση πολλαπλών πιθανών λύσεων.

Δεύτερον, ο Torrance (1974) εισηγήθηκε έναν ορισμό της δημιουργικότητας ο οποίος χρησίμευσε ως βάση για σειρές ομόλογων δοκιμασιών, γνωστές ως TTCT, που σχεδιάστηκαν για την αξιολόγηση της δημιουργικής σκέψης παιδιών και ενηλίκων. Ο ορισμός αυτός βασίστηκε σε τέσσερα αλληλοσχετιζόμενα χαρακτηριστικά: *ευχέρεια, ευελιξία, καινοτομία* και *επεξεργασία*. Από αυτά τα χαρακτηριστικά η καινοτομία ή πρωτοτυπία αναγνωρίζονται ευρέως ως συνώνυμο της δημιουργικότητας.

Η επιτυχία των ατόμων στη ζωή εξαρτάται από την άριστη χρήση αναλυτικών, πρακτικών και δημιουργικών ικανοτήτων και τη συνακόλουθη εξισορρόπηση μεταξύ αυτών (Cianciolo & Sternberg, 2004). Η δημιουργικότητα διακρίνεται σε ειδική και γενική. Η *γενική δημιουργικότητα* συνδέεται με τη μεταφορά μεθόδων και ιδεών από μια περιοχή προβλημάτων σε μια άλλη. Η *ειδική δημιουργικότητα* αναπτύσσεται στο πλαίσιο μιας περιορισμένης περιοχής λαμβάνοντας υπόψη την ειδική φύση της (Piirto, 1999). Στη συνέχεια θα συγκεντρώσουμε την προσοχή μας στην ειδική μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών.

Η εξασφάλιση ενός ακριβούς και γενικά αποδεκτού ορισμού της μαθηματικής δημιουργικότητας είναι εξαιρετικά δύσκολη και ίσως αδύνατη (Mann, 2006 – Haylock, 1987 – Spiraman, 2005). Ο Spiraman (2006) θεώρησε τη μαθηματική δημιουργικότητα ως ένα από τα γνωρίσματα της μαθηματικής έρευνας. Ο Ervynck (1991) συνέδεσε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Η μαθηματική κατανόηση, η διαίσθηση και η διορατικότητα συναποτελούν τη βάση της μαθηματικής δημιουργίας (Ervynck, 1991). Ο Krutetskii (1976) χαρακτήρισε τη μαθηματική δημιουργικότητα ως ανεξαρτησία και πρωτοτυπία. Η κομψότητα και η ομορφιά μιας λύσης είναι ένδειξη μαθηματικής δημιουργικότητας (Mann, 2006).

Οι έννοιες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της καινοτομίας προσαρμόστηκαν και εφαρμόστηκαν στον τομέα των μαθηματικών από τον Balka (1974), ο οποίος ζήτησε από τα υποκείμενα να θέτουν μαθηματικά προβλήματα. Κατά την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών, η ευχέρεια αναφερόταν στον αριθμό των προβλημάτων που τέθηκαν ή τις ερωτήσεις που προέκυψαν, η ευελιξία στον αριθμό των διαφορετικών κατηγοριών προβλημάτων που δημιουργήθηκαν και η πρωτοτυπία στο πόσο σπάνια ήταν η απάντηση στο σύνολο όλων των λύσεων.

Οι προαναφερόμενες απόψεις συμπλέουν, άλλες περισσότερο και άλλες λιγότερο, με τη «χαρισματική» άποψη της μαθηματικής δημιουργικότητας. Σύμφωνα με την άποψη αυτή, οι δημιουργικές πράξεις θεωρούνται σπάνια νοητικά επιτεύγματα, ξεχωριστών μαθηματικών οι οποίοι ταχύτατα και χωρίς μεγάλη προσπάθεια αξιοποίησαν εξαιρετικές διαδικασίας σκέψης (Weisberg, 1988). Ο Spiraman (2005) παρουσίασε ένα μοντέλο της μαθηματικής δημιουργικότητας και χαρισματικότητας (giftedness) που περιλαμβάνει επτά επίπεδα μαθηματικής ικανότητας. Τα επίπεδα 6 και 7 αφορούν δημιουργικούς μαθηματικούς υψηλής στάθμης, οι οποίοι τελειοποιούν την έρευνα και θέτουν την ατζέντα για άλλους μαθηματικούς.

Βεβαίως, η δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά διαφέρει από την αντίστοιχη στους επαγγελματίες μαθηματικούς. Η μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών αξιολογείται σε σχέση με τις πρότερες εμπειρίες τους και την επίδοση άλλων μαθητών που έχουν παρόμοια εκπαιδευτική ιστορία. Ο Spiraman (2005) σημειώνει ότι οι μαθητές μπορούν να προβάλλουν νέες διορατικές μαθηματικές λύσεις. Αυτές οι λύσεις είναι συνήθως καινούργιες ως προς τα μαθηματικά τα οποία οι μαθητές έχουν ήδη μάθει και τα προβλήματα που έχουν ήδη λύσει. Η χαρισματική άποψη της μαθηματικής δημιουργικότητας προϋποθέτει ότι αυτή δεν μπορεί να βελτιωθεί με τη διδασκαλία και ότι τα δημιουργικά επιτεύγματα αποτελούν περισσότερο ευκαιριακές εκρήξεις της διαίσθησης παρά ένα είδος συνεχούς και συνειδητής πορείας που επιδέχεται βελτίωση και μπορεί να αξιολογείται στο σχολείο (Silver, 1997).

Ένα νέο είδος μαθηματικής δημιουργικότητας προέκυψε από τη σύγχρονη έρευνα το οποίο βρίσκεται σε αντίθεση με την χαρισματική άποψη. Στην εν λόγω έρευνα η δημιουργικότητα συνδέεται στενά με την σε βάθος ευέλικτη γνώση σε συγκεκριμένους τομείς κατά τη διάρκεια μιας μακράς περιόδου εργασίας και στοχασμού παρά με μια σύντομη και αλματώδη διαίσθηση και επηρεάζεται από τη διδασκαλία (Holyoak & Thagard, 1995; Sternberg, 1988). Αυτός ο αναδυόμενος τομέας δημιουργικότητας προμηθεύει μια ισχυρότερη βάση για τις παιδαγωγικές εφαρμογές. Σύμφωνα με αυτή την άποψη η διδασκαλία που εμπλουτίζεται από τη δημιουργικότητα θα μπορούσε να είναι κατάλληλη για ένα μεγάλο εύρος μαθητών και όχι μόνο για λίγα εξαίρετα άτομα (Silver, 1997).

Η επίλυση προβλημάτων έχει μακρά παράδοση στα σχολικά μαθηματικά. Συνήθως διδάσκονται κλειστά προβλήματα με την «τραπεζική μέθοδο», σύμφωνα με την οποία ο δάσκαλος παρουσιάζει μια ετοιμοπαράδοτη λύση και οι μαθητές καλούνται να την εφαρμόσουν σε παρόμοια προβλήματα. Στη σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών η επίλυση προβλημάτων υποκινεί την εσωτερίκευση και αναδιοργάνωση των νοητικών σχημάτων των μαθητών και θεωρείται ως σπουδαίο *μέσον* για τη μάθηση των μαθηματικών (Cobb et al., 1991). Αποτελεί ένα θαυμάσιο κίνητρο που προκαλεί τους μαθητές να σκεφτούν.

Ο χαρακτηρισμός μιας δραστηριότητας ως «πρόβλημα» εξαρτάται από το υποκείμενο προς το οποίο απευθύνεται και από τη χρονική στιγμή που τίθεται. Στο πλαίσιο αυτό, πρόβλημα ονομάζεται κάθε περίπλοκη κατάσταση, κάθε προβαλλόμενο εμπόδιο που ανακόπτει την ομαλή πορεία και πρέπει να αρθεί. Η λύση δεν είναι προφανής ή εύκολη, αλλά κατά βάση υπάρχει διέξοδος. Ωστόσο αν η διέξοδος είναι μονοσήμαντα προδιαγεγραμμένη και βασίζεται σε έτοιμες μεθόδους ή απομνημονευμένους κανόνες των μαθητών, τότε δεν έχουμε κατάσταση προβληματισμού (Hiebert et al., 1997). Αν οι μαθητές αναγνωρίσουν άμεσα έναν τρόπο για την ολοκλήρωση της εργασίας του τότε πρόκειται για άσκηση ρουτίνας και όχι για πρόβλημα. Επομένως, κατά την επίλυση οι μαθητές θα πρέπει να συνδέσουν τις υπάρχουσες γνώσεις με νέο, δημιουργικό τρόπο. Η επίλυση προβλήματος ενθαρρύνει τη δημιουργικότητα και τονώνει τα κίνητρα των μαθητών για τη μάθηση των μαθηματικών. Τα «ανοιχτά προβλήματα» είναι προβλήματα που συνήθως επιδέχονται πολλαπλές λύσεις και συνδέονται στενά με τη δημιουργικότητα (Κόσυβας, 1996α – Κόσυβας, 1996β).

Η μέθοδος χρήσης ανοιχτών προβλημάτων στην τάξη για την προώθηση της μαθηματικής συζήτησης, που αποκαλείται «*μέθοδος ανοιχτής προσέγγισης*» αναπτύχθηκε στην Ιαπωνία τη δεκαετία του 70 και στη συνέχεια εισήχθηκε στα αναλυτικά προγράμματα και βιβλία διαφόρων χωρών (Κόσυβας, 1996 – Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, 1999 – Ρίζος, 2005). Στη διδασκαλία των μαθηματικών η λύση προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις συνδέεται με τη βαθύτερη κατανόηση και την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού (Polya, 1973 – Schoenfeld, 1985). Ο Polya (1973) τονίζει ότι η λύση προβλήματος με διαφορετικούς τρόπους χαρακτηρίζει έμπειρους μαθηματικούς, ενώ απαιτεί ένα μεγάλο εύρος μαθηματικών γνώσεων. Επιπλέον, ο Krutetskii (1976) υποστήριξε ότι τα προβλήματα με πολλές λύσεις επιτρέπουν την εξέταση της ευελιξίας της μαθηματικής σκέψης των ατόμων μέσα από τη διερεύνηση της μετακίνησης από τη μια νοητική διεργασία στην άλλη. Η λύση προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους χαρακτηρίζει τη δημιουργικότητα της μαθηματικής σκέψης (Γαγάτσης κ. ά., 2009), ενώ ορισμένες λύσεις μπορεί να είναι περισσότερο ευρηματικές από άλλες (πιο κομψές σύντομες, αποτελεσματικές).

Η μαθηματική δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά συνδέεται συνήθως με την παραγωγή νέας γνώσης, την ευέλικτη λύση προβλήματος και την προβληματοθεσία (problem posing) (Kwon, Park & Park, 2006 – Silver et al., 1996). Ο Chiu (2009) συνέδεσε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την ικανότητα των μαθητών να λύνουν προβλήματα μη ρουτίνας και να προσεγγίζουν «άσχημα» διατυπωμένα προβλήματα. Η ικανότητα των μαθητών να θέτουν προβλήματα είναι θεμελιώδης στα μαθηματικά και τη φύση της μαθηματικής σκέψης (Silver, 1997). Η διατύπωση προβλημάτων προάγει ένα πνεύμα περιέργειας και παράγει αποκλίνουσα και εύκαμπτη σκέψη (English, 1997).

Ακολουθώντας τον Torrance (1974), ο Silver (1997) πρότεινε την ανάπτυξη της δημιουργικότητας μέσα από τη λύση προβλημάτων ως ακολούθως: Η *ευχέρεια* αναπτύσσεται με την παραγωγή πολλαπλών ιδεών και απαντήσεων κατά την διερεύνηση ενός προβλήματος. Η *ευελιξία* προωθείται με την προβολή νέων λύσεων όταν μια τουλάχιστον έχει ήδη βρεθεί. Η *καινοτομία* προάγεται με την παραγωγή μιας μοναδικής και πρωτότυπης λύσης στο πρόβλημα.

Στη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω ανοιχτής διερευνητικής προσέγγισης μέρος της υπευθυνότητας για τη διατύπωση του προβλήματος και τη λύση μοιράζονται ανάμεσα στο δάσκαλο και τους μαθητές. Ένας τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτό είναι η απομάκρυνση από το βιβλίο και το δάσκαλο ως μοναδικές πηγές προβλημάτων (Arsac & Mante, 2007 – Πατρώνης, 1988 – Κόσυβας, 2008). Είναι πιο σημαντικό να θέτουν οι μαθητές τα δικά τους προβλήματα, παρά οι εκπαιδευτικοί να παρουσιάζουν ετοιμοπαράδοτες λύσεις σε δικά τους προβλήματα ή να δίνουν απαντήσεις που ποτέ δεν ρωτήθηκαν.

Οι μαθητές μπορούν όχι μόνο να αποκτήσουν ποικιλία εμπειριών στη διατύπωση προβλημάτων πάνω σε μια κατάσταση, αλλά επίσης και να αναπτύξουν δημιουργική ευελιξία καθώς παράγουν πολλαπλές λύσεις στο δοσμένο πρόβλημα. Για παράδειγμα οι μαθητές συζήτησαν πολλαπλές λύσεις στο ακόλουθο πρόβλημα: «*Οι μαθητές μιας τάξης συγκέντρωσαν στον κουμπαρά τους ποσό αξίας 120 ευρώ σε 15 χαρτονομίσματα, των 5 και 10 ευρώ. Πόσα χαρτονομίσματα από κάθε είδος έχουν στον κουμπαρά τους;*». Στο εν λόγω πρόβλημα, οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου ανέδειξαν και συζήτησαν πολλαπλές στρατηγικές όπως η «μέθοδος δοκιμής και πλάνης», οι αριθμητικές εξερευνήσεις με πινακοποιήσεις και διαδοχικές προσεγγίσεις και η συντόμευση και γενίκευσή των εκάστοτε λύσεων (Κόσυβας, 2011β). Η ομαδοσυνεργατική διερεύνηση αποδείχτηκε ωφέλιμη. Σε παρόμοια ευρήματα οδήγησαν άλλοι ανάλογοι πειραματισμοί σε σχολικές τάξεις (Kosyvas, 2005 – Kosyvas & Baralis, 2010, Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, 1993 – Κόσυβας, 2010 – Κόσυβας 2011α). Στο διδακτικό περιβάλλον της «ανοιχτής προσέγγισης», οι μαθητές θέτοντας παράγωγα προβλήματα στους συμμαθητές τους, προσκαλούν ολόκληρη τη σχολική τάξη σε διαρκή διερεύνηση και αντιπαράθεση επιχειρημάτων (Becker & Shimada, 1997).

Μεθοδολογία της έρευνας

Η έρευνα αυτή διενεργήθηκε το έτος 2009 και συμμετείχαν δύο διαφορετικές ομάδες μαθητών: οι 24 μαθητές ενός τμήματος της Γ΄ Γυμνασίου του 1ου Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών (ΠΓΑ) και οι 25 μαθητές ενός τμήματος ενδιαφέροντος του 3ου Καλοκαιρινού Μαθηματικού Σχολείου Νάουσας (ΚΜΣΝ), οι οποίοι είχαν ολοκληρώσει τη φοίτησή τους στη Β΄ Γυμνασίου. Ο εκπαιδευτικός ήταν καθηγητής μαθηματικών του σχολείου και διδάσκων στο πρόγραμμα του ΚΜΣΝ ως εθελοντής. Για τον προσδιορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας στις δύο διδακτικές ομάδες δόθηκαν οι ίδιες καταστάσεις προβληματισμού για ομαδοσυνεργατική διερεύνηση και λύση και είχαν διάρκεια 5 διδακτικών ωρών σε καθεμιά. Η ανάλυση των δεδομένων είναι ποιοτική και αφορά κυρίως την παρατήρηση των μαθητών καθώς θέτουν προβλήματα (προβληματοθεσία) ή καταγίνονται με την επίλυση προβλημάτων.

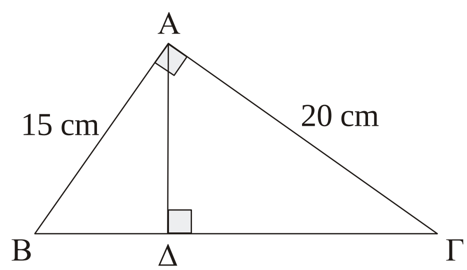
Παρουσίαση και συζήτηση των αποτελεσμάτων

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ενδεικτικά ορισμένα δεδομένα από διδακτικά πειράματα που πραγματοποιήθηκαν στο 1ο ΠΓΑ και στο 3ο ΚΜΣΝ.

Ορθογώνιο τρίγωνο με ύψος: (1^o Διδακτικό πείραμα)

Το ακόλουθο πρόβλημα είχε εισαγωγικό χαρακτήρα και αποσκοπούσε στη διερεύνηση προϋπαρχουσών γνώσεων των μαθητών.

Πρόβλημα 1: Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$ **)** με ΑΒ=15 cm και ΑΓ=20 cm. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ.



Με βάση αυτό το σχήμα να συζητήσετε με το διπλανό σας και να υπολογίσετε όσα περισσότερα τμήματα μπορείτε. Παραθέτουμε δύο επεισόδια:

Πρώτο επεισόδιο: (1^o ΠΓΑ)

Θ: *Μήπως $\eta\mu\, \hat{B} = \sigma\upsilon\nu\, \hat{\Gamma}$; Ναι έτσι είναι! Ισχύει σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο!*

Δάσκ.: *Γιατί;*

Θ: *Γιατί οι γωνίες είναι συμπληρωματικές. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\eta\mu\, \hat{B} = \frac{20}{25}$ και $\sigma\upsilon\nu\, \hat{\Gamma} = \frac{20}{25}$.*

Το βρήκα! Να το γράψω στον πίνακα;

Δάσκ.: *Να το γράψεις.*

Θ: *Λοιπόν! Από το τρίγωνο ΑΒΔ είναι: $\eta\mu\, \hat{B} = \frac{\upsilon}{15}$. Επίσης από το μεγάλο τρίγωνο ΑΒΓ : $\sigma\upsilon\nu\, \hat{\Gamma} = \frac{20}{25}$.*

Έτσι θα έχουμε $\frac{\upsilon}{15} = \frac{20}{25}$. Οπότε 25υ=300, δηλαδή υ=ΑΔ=12.

Δεύτερο επεισόδιο: (3^o ΚΜΣΝ)

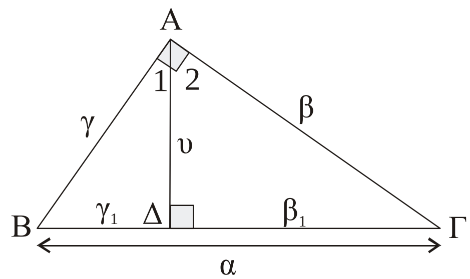
Οι μαθητές εύκολα υπολόγισαν τη ΒΓ, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και το ύψος του τριγώνου είναι υ=ΑΔ=12 cm (χρησιμοποίησαν δύο τύπους εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ).

Στα δύο προηγούμενα διδακτικά επεισόδια οι μαθητές υπολόγισαν το ύψος με δύο διαφορετικούς τρόπους: με χρήση του εμβαδού του τριγώνου και με τριγωνομετρία. Στη συνέχεια ο υπολογισμός των τμημάτων στα οποία το ύψος χωρίζει την υποτείνουσα ήταν εύκολη υπόθεση. Αρκούσε μόνο η εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Η ανάκληση και αξιοποίηση πρότερων γνώσεων δεν ήταν εύκολη υπόθεση για όλους τους μαθητές. Ο συνδυασμός διαφορετικών κεφαλαίων ήταν μια ευχάριστη έκπληξη. Για τους μαθητές οι γνώσεις των διαφόρων κεφαλαίων θεωρούνται ασύνδετες. Δυσκολεύονται να δεχτούν ότι το ίδιο πρόβλημα μπορεί να λύνεται με γνώσεις τριγωνομετρίας ή γεωμετρίας.

Ορθογώνιο τρίγωνο με ύψος: ($2^ο$ Διδακτικό πείραμα)

Εδώ θέσαμε το ίδιο πρόβλημα χωρίς αριθμητικά δεδομένα. Οι μαθητές κατάφεραν να περάσουν στην ανακάλυψη των πορισμάτων του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Η εκφώνηση αποτελούσε ένα πλαίσιο προβληματοθεσίας, κατάλληλο για την παραγωγή και τον έλεγχο εικασιών από τους μαθητές.

Πρόβλημα 2: Δίνεται ορθογώνιο και μη ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) και το ύψος του ΑΔ. Να διατυπώσετε όσες εικασίες μπορείτε και να τις αποδείξετε.



Παραθέτουμε στη συνέχεια τις προβληματοθεσίες των μαθητών του $1^{ου}$ ΠΓΑ χωρίς καμιά διόρθωση. Η αναγνώρισή τους γίνεται με έναν αριθμό. Κατά τη μεταφορά των εικασιών στον πίνακα χρησιμοποιείται ο ενδεδειγμένος συμβολισμός ή το κατάλληλο λεξιλόγιο. Δεν κρίθηκε απαραίτητο οι εικασίες να πάρουν την τυπική μορφή υποθετικών προτάσεων της μορφής «*αν p, τότε q*». Όμως καθώς οι μαθητές διατύπωναν τις δικές τους εικασίες ήταν μια θαυμάσια ευκαιρία να κάνουν τη διάκριση ανάμεσα σε αναγκαίες και ικανές συνθήκες.

1.	$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0$, $\hat{B}+\hat{A}_1+A\hat{\Delta}B=180^0$.	**2.**	Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια.
3.	Τα σημεία Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά.	**4.**	Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι μεγέθυνση του ΑΒΔ.
5.	$A\hat{\Delta}B = 90^0$	**6.**	$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$.
7.	$\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^0$	**8.**	ΒΔ=ΔΓ.
9.	$\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^0$	**10.**	$\gamma^2=\upsilon^2+\gamma_1^2$ και $\beta^2=\upsilon^2+\beta_1^2$.
11.	$\hat{B}+\hat{A}_1=90^0$, $\hat{\Gamma}+\hat{A}_2=90^0$.	**12.**	$\beta\gamma=\alpha\upsilon$.
13.	$\hat{B}=\hat{A}_1$	**14.**	$εφ\,\hat{B}=\frac{\upsilon}{\gamma_1}$ και $εφ\,\hat{\Gamma}=\frac{\upsilon}{\beta_1}$.
15.	$\hat{B}=\hat{A}_2$	**16.**	Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα.

Οι εικασίες ελέγχονται με δημόσια συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης. Ανάμεσα στις εικασίες ορισμένες είναι προφανείς και οι μαθητές τις προτείνουν γνωρίζοντας ότι είναι αληθείς προτάσεις.

Επεισόδια: (1ο ΠΓΑ)

- *«Τα σημεία Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά από την κατασκευή του σχήματος».*
- *«Η γωνία $A\hat{\Delta}B$ είναι ίση με 90^0 γιατί το ΑΔ είναι ύψος και το ύψος είναι κάθετο στην στη ΒΓ».*
- *«Ισχύει $\hat{B}+\hat{A}_1=90^0$, γιατί $\hat{B}+\hat{A}_1+A\hat{\Delta}B=180^0$ και $A\hat{\Delta}B=90^0$ δηλαδή $\hat{B}+\hat{A}_1+90^0=180^0$, οπότε* $\hat{B}+\hat{A}_1=180^0-90^0=90^0$.

Ανάλογες αιτιολογήσεις έγιναν για τις άλλες εικασίες του πίνακα. Επίσης:

Δάσκ.: *Μπορείτε να ελέγξετε την εικασία $\hat{B}=\hat{A}_2$. Ισχύει;*

Γ: *Είναι ίσες επειδή είναι και οι δύο συμπληρωματικές της γωνίας $\hat{A}_1$.*

Ο. (ένας μαθητής σηκώνει το χέρι του) *Να το γράψω στον πίνακα κύριε;* (ο μαθητής γράφει στον πίνακα) *Αφού $\hat{B}+\hat{A}_1=90^0$ και $\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^0$ θα είναι $\hat{B}+\hat{A}_1=\hat{A}_1+\hat{A}_2$ δηλαδή $\hat{B}=\hat{A}_2$.*

Πώς μπορούν οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου να ψάξουν για αντιπαραδείγματα; Ο τρόπος σκέψης εξαρτάται από την εκάστοτε προβληματοθεσία. Μπορούν για παράδειγμα να εξετάσουν ακραίες ή ειδικές περιπτώσεις. *Αν $\hat{B}=\hat{A}_1$ τότε το τρίγωνο ΑΒΔ θα ήταν ορθογώνιο και ισοσκελές. Όμως δεν ξέρουμε ότι $\hat{B}=\hat{A}_1=45^0$.* Αν ήταν $\hat{B}=45^0$ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ θα ήταν ορθογώνιο και ισοσκελές. Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και μη ισοσκελές. Με ανάλογα επιχειρήματα απορρίφτηκαν και οι εικασίες *«Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα»* και «*ΒΔ=ΔΓ*».

Δύο συνεργαζόμενοι μαθητές με χρήση ομοιότητας τριγώνων απέδειξαν: $\beta^2=\alpha\cdot\beta_1$.

Επεισόδια: (3ο ΚΜΣΝ)

Στο ΚΜΣΝ διερευνήθηκαν προβληματοθεσίες παρόμοιες με αυτές που έχουν συγκεντρωθεί στον προηγούμενο πίνακα. Μια μαθήτρια ζητά το λόγο.

Ε. *Μπορώ να διατυπώσω μια δική μου υπόθεση;*

Δάσκ. *Βεβαίως.*

Ε. *Μήπως ισχύει $\upsilon^2=\beta_1\cdot\gamma_1$;*

Δάσκ. *Προτείνω να ελέγξετε αν ισχύει η εικασία που πρότεινε η Ε. Για φανταστείτε τι θα μπορούσατε να κάνετε;* (Οι μαθητές εργάζονται πρώτα ατομικά και ύστερα ομαδικά).

Μετά από λίγο ένας μαθητής ζητά το λόγο. Επειδή ήταν φανερό ότι όλη η τάξη σκεφτόταν δεν του δόθηκε ο λόγος. Ήταν αναγκαίο να δοθεί αρκετός χρόνος για να σκεφτούν όλοι. Στη συνέχεια ένας μαθητής παρουσίασε την εργασία της ομάδας του.

Ν. *Είπαμε ότι $\hat{B}=\hat{A}_2$. Λέω $\hat{B}=\Delta\hat{A}\Gamma$. Αφού οι γωνίες είναι ίσες δεν θα έχουν και ίσες εφαπτόμενες;*

Σ. *Ναι αυτό ισχύει γιατί οι γωνίες είναι οξείες. Θα ισχύει εφ$\hat{B}$ = εφ$\hat{A}_2$.*

Ν. *Δεν ισχύει μόνο για γωνίες που είναι οξείες, αλλά και για αμβλείες.*

Σ. *Ναι το έχουμε πει αυτό ισχύει για όλες τις γωνίες. Αν δύο γωνίες είναι ίσες πάντα θα έχουν ίσες* *εφαπτόμενες. Άρα:* $\varepsilon\varphi\,\hat{B} = \varepsilon\varphi\,\hat{A}_2$ *; Να συνεχίσω;*

Δασκ. *Συνέχισε.*

Σ. *Ισχύουν* $\varepsilon\varphi\,\hat{B} = \dfrac{\upsilon}{\gamma_1}$ *και* $\varepsilon\varphi\,\hat{A}_2 = \dfrac{\beta_1}{\upsilon}$. *Έτσι δεν είναι;*

Κ. *Όχι έχουμε* $\varepsilon\varphi\,\hat{B} = \dfrac{\upsilon}{\gamma_1}$ *και* $\varepsilon\varphi\,\hat{\Gamma} = \dfrac{\upsilon}{\beta_1}$. (τα διαβάζει από τον πίνακα)

Σ. *Ναι, αλλά δεν μας ενδιαφέρει η* $\varepsilon\varphi\,\hat{\Gamma}$. *Εφόσον* $\varepsilon\varphi\,\hat{B} = \varepsilon\varphi\,\hat{A}_2$ *θα έχουμε και* $\dfrac{\upsilon}{\gamma_1} = \dfrac{\beta_1}{\upsilon}$. *Έτσι τελικά το απέδειξα:* $\upsilon^2 = \beta_1 \cdot \gamma_1$.

Μετά από περισσότερη αιτιολόγηση της προηγούμενης αποδεικτικής επιχειρηματολογίας οι μαθητές στο ΜΚΣΝ βρήκαν δύο τρόπους ακόμα. Ο πρώτος βασίστηκε στην ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ. Ο δεύτερος που παρουσίασε μια μαθήτρια συνδυάζει το Πυθαγόρειο θεώρημα με χρήση μιας αλγεβρικής ταυτότητας.

$$\begin{cases} \text{Π.Θ. στο τριγ. } AB\Delta \Rightarrow \gamma^2 = \upsilon^2 + \gamma_1^2 \\ \text{Π.Θ. στο τριγ. } A\Gamma\Delta \Rightarrow \beta^2 = \upsilon^2 + \beta_1^2 \end{cases} \Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\upsilon^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 .$$

Από το Π. Θ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Οπότε έχουμε: $\alpha^2 = 2\upsilon^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$. *Όμως:* $\alpha = \beta_1 + \gamma_1$. *Επομένως:*

$$(\beta_1 + \gamma_1)^2 = 2\upsilon^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \upsilon^2 = \beta_1 \cdot \gamma_1 .$$

Στη συνέχεια ένας μαθητής του ΚΜΣΝ απέδειξε ένα ακόμα θεώρημα: $\beta^2 = \alpha \cdot \beta_1$:

$$\begin{cases} \text{Π.Θ. στο τριγ. } A\Gamma\Delta \Rightarrow \beta^2 = \upsilon^2 + \beta_1^2 \\ \text{Τριγ. } AB\Gamma \Rightarrow \upsilon^2 = \beta_1 \cdot \gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \beta^2 = \beta_1 \cdot \gamma_1 + \beta_1^2 \Rightarrow \beta^2 = \beta_1 \cdot (\gamma_1 + \beta_1) \Rightarrow \beta^2 = \beta_1 \cdot \alpha$$

Τέλος, οι μαθητές μελετούν συστηματικά τη νέα γνώση και ο διδάσκων δίνει τις αναγκαίες εξηγήσεις.

Το ορθογώνιο τραπέζιο (3ο Διδακτικό πείραμα)

Πρόβλημα 3: Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο $\left(\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0\right)$ με ΑΔ=12 m, ΒΓ=15m και $B\Delta \perp B\Gamma$ (δεν δόθηκε σχήμα).

α) Μπορεί να ισχύει ΗΓ=9 m; Αν όχι να βρείτε το μήκος του τμήματος ΗΓ.

β) Μπορεί να ισχύει ΑΒ=17m. Αν όχι να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΒ.

Επεισόδια: (1ο ΠΓΑ)

Δύο τετραμελείς ομάδες μαθητών απάντησαν στο πρόβλημα με μετρήσεις στο σχήμα που κατασκεύασαν. Μια τρίτη άλλη ομάδα έδωσε την ακόλουθη λύση:

α) *Το τετράπλευρο ΑΒΗΔ είναι ορθογώνιο. Τότε ΒΗ=ΑΔ=12. Το τρίγωνο ΒΗΓ είναι ορθογώνιο και ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Δοκιμάζουμε αν ισχύει ΗΓ=9. Έχουμε:*

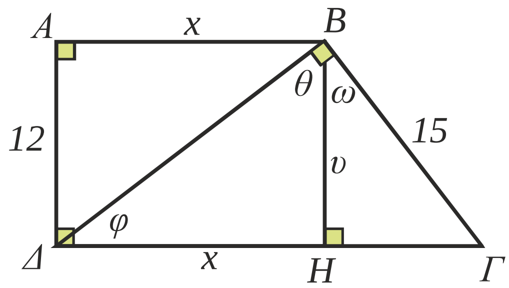
$$\begin{cases} B\Gamma^2 = 15^2 = 225 \\ BH^2 + H\Gamma^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 \end{cases} \quad \text{Άρα θα είναι } \boldsymbol{H\Gamma = 9\ m.}$$

β) *Πρέπει να επαληθεύουμε αν ισχύει ΑΒ=17.*

$$\begin{cases} BΔ^2 = 12^2 + 17^2 = 144 + 289 = 433 \\ BΔ^2 = (17+9)^2 - 15^2 = 676 - 225 = 451 \end{cases}$$

Επειδή βρήκαμε διαφορετικά αποτελέσματα ***είναι λάθος ΑΒ=17 m.***

Μια τέταρτη ομάδα προσέγγισε το πρόβλημα αλγεβρικά με τον ακόλουθο τρόπο:



Συμβολίσουμε ΑΒ=ΔΗ=x. Τότε:

$BΔ^2 = 12^2 + x^2$ *(Π. Θ. στο τρίγωνο ΑΒΔ)*

$BΔ^2 = (x+9)^2 - 15^2$ *(Π. Θ. στο τρίγωνο ΒΓΔ)*

Θα βρούμε το ΑΒ από τη λύση της εξίσωσης:

$12^2 + x^2 = (x+9)^2 - 15^2$

$144 + x^2 = x^2 + 18x + 81 - 225$

$18x=288$

Δηλαδή: ***x=16 m.***

Επεισόδια: (3ο ΚΜΣΝ)

Κατά την αρχική φάση δύο ομάδες πίστευαν ότι το τετράπλευρο ΑΒΗΔ είναι τετράγωνο. Χρειάστηκε αρκετός χρόνος για να αποδεσμευτούν από αυτή την εσφαλμένη αντίληψη. Εκτός από τη προηγούμενη λύση εφευρέθηκε και η εξής:

Συμβολίζουμε: $B\hat{Δ}Γ = φ$, $H\hat{B}Γ = ω$ *και* $Δ\hat{B}H = θ$. *Οι γωνίες φ και ω είναι ίσες επειδή είναι συμπληρωματικές της γωνίας θ. Ισχύουν:*

$B\hat{Δ}Γ = φ = 90^0 - θ$ *και* $H\hat{B}Γ = ω = 90^0 - θ$ *Άρα: φ=ω*

Τα τρίγωνα ΒΓΗ , ΔΒΗ είναι ορθογώνια με μια γωνία ίση. Επομένως είναι όμοια. Οπότε έχουμε:

$\frac{BH}{ΔH} = \frac{HΓ}{BH}$ *ή* $\frac{12}{x} = \frac{9}{12}$ *ή 9x=12·12 ή 9x=144. Οπότε:*

x = 16 m.

Επίσης προέκυψε στη συζήτηση μια παρόμοια λύση με χρήση τριγωνομετρίας:

Είναι φ=ω και επομένως εφ φ= εφ ω, δηλαδή $\frac{12}{x} = \frac{9}{12}$ *κλπ.*

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία εστιάσαμε την προσοχή μας στη σχέση ανάμεσα στην ανοιχτή διερεύνηση και την προαγωγή της μαθηματικής δημιουργικότητας σε δεκατετράχρονους μαθητές. Από τη συνεξέταση των δύο διδακτικών ομάδων (σχολική τάξη στο 1ο ΠΣΑ, τμήμα ενδιαφέροντος στο 3ο ΜΚΣΝ) προκύπτει ότι μαθηματικά υποσχόμενοι μαθητές υπάρχουν και στις δύο διδακτικές ομάδες και φέρνουν στο φως πολλαπλές και συχνά ασυνήθιστες για την ηλικία τους λύσεις, ενώ τα κύρια συστατικά της μαθηματικής δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) μοιράζονται σε αυτές :

- *Ευχέρεια*: οι μαθητές εκφράζουν πλήθος γεωμετρικών ή αλγεβρικών ιδεών και υποθέσεων τις οποίες ερευνούν με τους συμμαθητές τους.

- *Ευελιξία*: τα προβλήματα που θέτουν οι μαθητές λύνονται με διαφορετικούς τρόπους και αξιοποιούν πρωτόφαντες ιδέες. Αρχίζουν εκθέτοντας και αιτιολογώντας μια στρατηγική, στη συνέχεια όμως εφευρίσκουν πολλαπλές μεθόδους λύσης.
- *Καινοτομία* : Οι μαθητές εξετάζουν με ενδιαφέρον ποικιλία προβλημάτων συνθέτοντας διορατικές, πρωτότυπες και μοναδικές λύσεις.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι η καλλιέργεια ενός κλίματος διαρκούς προβληματισμού και επικοινωνίας διευκόλυνε τους μαθητές να αναπτύξουν τη διαίσθηση, τη διορατικότητα και τη νοητική ευελιξία και να επινοήσουν δικές τους εικασίες και αποδείξεις. Οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι *η αλληλεπίδραση προβληματοθεσίας και λύσης προβλήματος αποτελεί θεμελιώδες γνώρισμα της δημιουργικής μαθηματικής δραστηριότητας*. Η προβληματοθεσία ήταν μια άσκηση της γόνιμης μαθηματικής φαντασίας που οδηγούσε στη διατύπωση επαγωγικών συλλογισμών, πιθανών εξηγητικών υποθέσεων και παραγωγικών επιχειρημάτων. Οι μαθητές δεν έθεταν απλώς ερωτήματα και προβλήματα, αλλά εξέταζαν αν ισχύουν στα μαθηματικά. Έτσι η εργασία των μαθητών συμπληρωνόταν από πολλαπλές αιτιολογήσεις και αποδείξεις των προτεινόμενων λύσεων.

Τα αποδεικτικά επιχειρήματα των μαθητών είχαν διπλό ρόλο: να πείσουν τους συμμαθητές τους και να εμβαθύνουν στην κατανόηση των μαθηματικών. Είναι σπουδαίο οι μαθητές να αιτιολογούν και να αποδεικνύουν αλλά είναι εξίσου σπουδαίο να μυούνται στη μαθηματική ερευνητική δημιουργία (Hanna, 2001). Δημιουργώντας ένα κατάλληλο κλίμα αδιάλειπτης ανοιχτής συζήτησης στην τάξη ενθαρρύναμε τους μαθητές να θέτουν τα δικά τους προβλήματα με μορφή εικασίας και να τα ελέγχουν. Ορισμένες εικασίες απορρίφθηκαν από τη συζήτηση, ενώ άλλες έπεισαν για την εγκυρότητά τους και επικράτησαν. Η απόδειξη αναδείχθηκε ως πραγματική ανάγκη των μαθητών.

Οι ενδεικτικές καταστάσεις προβληματισμού τις οποίες δημιουργήσαμε συνέβαλαν στην ανάπτυξη της πρωτοβουλίας και της αυτενέργειας τονώνοντας τα μαθησιακά κίνητρα των μαθητών. Παρείχαν στους μαθητές ευκαιρίες να θέτουν και να λύνουν προβλήματα αναπτύσσοντας ευέλικτες και δημιουργικές προσεγγίσεις της μαθηματικής δραστηριότητας. Ανάλογες στάσεις έχουν παρατηρηθεί από άλλους ερευνητές σε δραστηριότητες προβληματοθεσίας (Brown & Walter, 1983 – Silver, 1997 – English, 1997).

Αναμφισβήτητα, η μαθηματική δημιουργικότητα των δύο ομάδων είναι υψηλή και δεν ταυτίζεται με τους μαθητές που συνήθως αριστεύουν. Αυτά τα ευρήματα μάς παρωθούν να σκεφτόμαστε τη δημιουργικότητα *όχι ως έναν τομέα που αφορά μόνο τους λίγους προικισμένους, αλλά ως μια προδιάθεση που απευθύνεται στο σύνολο του μαθητικού πληθυσμού χωρίς αποκλεισμούς ή διακρίσεις*. Είναι καλύτερα να μιλάμε για μαθηματικά υποσχόμενα παιδιά και όχι για παιδιά γενετικά προικισμένα με εξαίρετα μαθηματικά χαρίσματα. Μαθητές με μαθηματικές υποσχέσεις είναι αυτοί που μπορούν να επιτύχουν υψηλές μαθηματικές επιδόσεις όταν ξεδιπλώνονται οι δυνατότητές τους στον μεγαλύτερο δυνατό βαθμό. Σύμφωνα με τον Edison «*η δημιουργικότητα οφείλεται 99 % στην επιμονή και 1 % στην έμπνευση*». Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι μαθητές διαθέτουν μια «θολή» δημιουργική τάση. Για να την αναδείξουν χρειάζεται μόχθος. Το σχολείο θα πρέπει να παρέχει πλούσιες ευκαιρίες για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας όλων των μαθητών από πολύ μικρή ηλικία (Usiskin, 1999). Τα κίνητρα των μαθητών, με τη συστηματική εργασία, την επιμέλεια, και τη μακρόχρονη επιμονή ενισχύονται και έτσι η μαθηματική αυτοπεποίθησή τους ισχυροποιείται. Οι μαθηματικά υποσχόμενοι μαθητές χρειάζονται ποιοτικά μαθηματικά ερεθίσματα που συμβαδίζουν με τις ιδιαίτερες ανάγκες τους και όχι μια άχαρη ενασχόληση με περισσότερες τυποποιημένες ασκήσεις. Μέσα από μελετημένα προγράμματα εμπλουτισμού θα πρέπει να ενθαρρύνονται να αναπτύσσουν τα ταλέντα και τις ικανότητές τους.

Βιβλιογραφία

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Villeurbanne : IREM de Lyon, CRDP.

Balka, D. S. (1974): Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher* 21, 633–636.

Becker, J., & Shimada, Y. (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Boden, M. (1998). Creativity and knowledge. In A. Craft, B. Jeffrey & M. Leibling. (Eds.) *Creativity in education* (pp. 95 -102). London: Continuum.

Brown, S. & Walter, M. (1983). *The art of problem Posing*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Chiu, M.-S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 55–79.

Cianciolo, A. T., & Sternberg, R. J. (2004). *A brief history of intelligence*. Malden, MA: Blackwell.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 99-122.

Csikszentmihalyi, M. (1996). *Creativity: Flow and the psychology of discovery and invention.* New York: Harper Collins.

English, L. D. (1997). Development of fifth grade children's problem posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 183-217.

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 42-53). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Guilford, J. P. (1959). Traits of creativity. In H. H. Anderson (Ed.), *Creativity and its cultivation* (pp. 142-161). New York: Harper & Brothers Publishers.

Hanna, G. (2001). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 5-23.

Haylock, D.W. (1987): A framework for assessing mathematical creativity in school children. In: *Educational Studies in Mathematics* 18 (1), 59–74.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C, Wearne, D., Murray, Olivier, A., and Human, P. (1997). *Making sense*: *Teaching* and *learning mathematics* with *understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Holyoak, K. J. & Thagard, P. (1995). *Mental leaps: Analogy in creative thought*. Cambridge, MA: MIT Press.

Kosyvas, G. & Baralis G. (2010). Les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré, *Repères- IREM*, 78, 13-36.

Kosyvas, G. (2005). *Une méthode vécue et communicative d'un problème ouvert : Du problème de la duplication du carré dans la méthode socratique du «Menon» de Platon reformulé en problème ouvert avec une expérimentation didactique en classe*, ULB-UMH, essai inédit (mémoire).

Kosyvas, G. (2010). Problèmes ouvertes: notion, catégories et difficultés, *Annales de Didactique et des Sciences cognitives*, 15, IREM de Strasbourg, 43-71.

Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. (Translated by Teller, J.; edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup). Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Kwon, O.-N., Park, J.-S., & Park, J.-H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, 7, 51–61.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical Creativity using multiple solution tasks, In: R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds). *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*, (pp. 129-145). Rotterdam: Sense Publishers.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236-260.

Pehkonen, E. (1997). The State-of-Art in Mathematical Creativity. *ZDM*, 97(3), pp. 63-67,.

Piirto, J. (1999) *Talented children and adults*: *Their development and education*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Polya, G. (1945/1973). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 3, 75-80.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 293-309.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*. 17(1), 20-36.

Sternberg, R. J. (Ed.) (1988): *The nature of creativity: Contemporary psychological perspectives*. New York: Cambridge University Press.

Torrance, E. P. (1974): *The Torrance tests of creative thinking: Technical-norms manual*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Services.

Usiskin, Z. (1999). The mathematically promising and the mathematically gifted. In L. J. Sheffield (Ed.), *Developing mathematically promising students* (pp. 57-69). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Weisberg, R.W. (1988): Problem solving and creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *The nature of creativity* (pp. 148–176). New York: Cambridge University Press.

Γαγάτσης, Α., Φιλίππου, Α., Τιμοθέου, Σ., & Δαλιεράκη, Ε. (2009). Ανάπτυξη της δημιουργικότητας στα μαθηματικά. Στο Α. Γαγάτσης, Α. Φιλίππου, Π. Δαμιανού,

& Ε. Αυγερινός (Εκδ.), *Πρακτικά 11ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σσ. 421-436). Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Κόσυβας, Γ. (1996α). *Η πρακτική του ανοιχτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο, γόνιμος χαρακτήρας και ανατροπή των παγιωμένων αντιλήψεων*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Κόσυβας, Γ. (1996β). Προσεγγίσεις της έννοιας και του ρόλου του ανοιχτού προβλήματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄*, 43, 11-34, Αθήνα: *ΕΜΕ*.

Κόσυβας, Γ. (2008). Εικασίες και μαθηματική συζήτηση στην τάξη, *Πρακτικά 25ου συνεδρίου της ΕΜΕ,* 434-448, ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2010). Η μέθοδος λύσης του ανοιχτού προβλήματος, *Εκπαιδευτική Κοινότητα, 92*, σσ. 21-24, Αθήνα.

Κόσυβας, Γ. (2011α). Η άτυπη μοντελοποίηση του προβλήματος των χειραψιών, *Πρακτικά 28ου συνεδρίου της ΕΜΕ,* 281-306, ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2011β). Είδη συλλογισμού κατά την ομαδοσυνεργατική λύση του προβλήματος του κουμπαρά στην Α΄ Γυμνασίου. *Ευκλείδης Γ΄, 74*, 56-82, Αθήνα: ΕΜΕ.

Πατρώνης, Τ. (1988). Προς μια ανοιχτή διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, *Διάσταση,* τ.2, Θεσσαλονίκη 1988.

Πούλος, Α. (2010). Το «πρόβλημα» της εκπαίδευσης των ταλαντούχων παιδιών στα μαθηματικά, *Πρακτικά 27ου συνεδρίου της ΕΜΕ,* 960-970, ΕΜΕ.

Ρίζου, Γ. (2005). *Οι περιπέτειες του Προβλήματος στα σχολικά Μαθηματικά*, Μαθηματική Βιβλιοθήκη Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη.

Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ. (1993). Μαθαίνουμε Ερευνώντας, Ανακαλύπτοντας. Ανοιχτό Πρόβλημα στα Μαθηματικά. *Ανοιχτό Σχολείο*, 43, 12-16, Αθήνα.

Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ. (1999). Επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στο κονστρουκτιβιστικό-δομητιστικό μοντέλο διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών με χρήση ανοιχτών προβλημάτων (open-ended) και ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. *Διάσταση*, 4, 3-36, Θεσσαλονίκη.