Μερικές διαφορικές εξισώσεις
Εξέταση 29 Ιανουαρίου 2020

1. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t + u^2 u_x &= 0, \\ u(x,0) &= x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(α) Για δεδομένο $x \in \mathbb{R}$, ποια είναι η χαρακτηριστική που διέρχεται από το $(x,0)$;
(β) Να βρεθεί συνάρτηση που ικανοποιεί το παραπάνω πρόβλημα στο μέγιστο δυνατόν υποσύνολο του $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ το οποίο περιέχει τον οριζόντιο άξονα $\mathbb{R} \times \{0\}$. Ποιος είναι ο χρόνος θραύσης;

2. (25 Βαθμοί) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_{tt} - 4u_{xx} = 0 && \text{στο } \Omega := (0,\infty) \times (0,\infty), \\ &u(x,0) = \sin x && \text{για κάθε } x \geqslant 0, \\ &u_t(x,0) = x^2 && \text{για κάθε } x \geqslant 0, \\ &u(0,t) = 0 && \text{για κάθε } t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Έπειτα, για κάθε $t > 0$ να βρεθεί η ποσότητα $u(t,t)$.

3. (15 Βαθμοί) Έστω $f \in C^2([-\pi,\pi])$ με $f(-\pi) = f(\pi), f'(-\pi) = f'(\pi)$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ οι συντελεστές Fourier της. Δηλαδή

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $C \in (0,\infty)$ ώστε $|a_n| + |b_n| \leqslant C/n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.

4. (30 Βαθμοί) Έστω $\phi \in C^2([0,\pi])$ ώστε $\phi(0) = \phi''(0) = \phi(\pi) = 0$. Δίνονται οι ποσότητες $b_n := (2/\pi)\int_0^\pi \phi(x)\sin(nx)\,dx, n \geqslant 1$. Θεωρούμε και το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$u_t - ku_{xx} = 0 \qquad \text{για κάθε } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [0,\pi], \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{για κάθε } t > 0, \tag{3}$$

όπου $k > 0$ δεδομένη σταθερά.
(α) Να δειχθεί ότι το πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση.
(β) Με χρήση της τεχνικής του χωρισμού μεταβλητών, να δοθεί ως σειρά μια υποψήφια λύση για το πρόβλημα. Να δειχθεί ότι η σειρά ορίζει συνεχή συνάρτηση στο $[0,\pi] \times [0,\infty)$ και ικανοποιεί τις (2), (3). Περιγράψτε, χωρίς λεπτομέρειες, τη διαδικασία που μπορεί να ακολουθήσει κανείς για να αποδείξει ότι η σειρά ικανοποιεί και την (1).

5. (25 Βαθμοί) Έστω $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{για κάθε } (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= \sin(5\theta) && \text{για } r = 1, \\ u(x,y) &= 3 + \cos(2\theta) && \text{για } r = 2, \end{aligned}$$

όπου $(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi)$ είναι οι πολικές συντεταγμένες του (x,y). Δίνεται ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση u.
(α) Να υπολογιστούν οι ποσότητες $\min_{z\in\bar{\Omega}} u(z), \max_{z\in\bar{\Omega}} u(z)$.
(β) Να δοθεί σε πολικές συντεταγμένες η λύση του προβλήματος.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες. Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. (α) $(x(t),t)=(x^2t+x,t)$, με $t\in\mathbb{R}$.
(β) Κατά τα γνωστά, δείχνουμε ότι η τιμή $u=u(x,t)$ ικανοποιεί την $u=x-u^2t$. Επομένως, για $t>0$, πρέπει να ισχύει

$$u=\frac{-1\pm\sqrt{1+4tx}}{2t}.$$

Η συνθήκη $\lim_{t\to 0+}u(x,t)=x$ ικανοποιείται μόνο από τον τύπο με το $+$. Επαληθεύουμε ότι πράγματι η $u(x,t)=\frac{-1+\sqrt{1+4tx}}{2t}=\frac{2x}{1+\sqrt{1+4tx}}$ είναι λύση στο $U:=\{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty):1+4tx\geqslant 0\}$. Ο χρόνος θραύσης είναι 0.

2. Εφαρμογή της θεωρίας. Strauss §3.2 (σελίδες 63, 64). Επεκτείνουμε τις $\sin x, x^2$ σε περιττές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ (οι επεκτάσεις είναι οι $\sin x, x|x|$) και εφαρμόζουμε τον γνωστό τύπο λύσης της εξίσωσης κύματος. Οι επεκτάσεις είναι τουλάχιστον C^2 και C^1 αντίστοιχα (η πρώτη είναι C^∞ η δεύτερη είναι C^1) όπως απαιτεί ο τύπος ώστε η λύση να είναι C^2.

$$u(t,t)=\sin(t)\cos(2t)+\frac{13}{6}t^3.$$

3. Ολοκλήρωση κατά μέρη. Οποιαδήποτε σταθερά $C>4||f''||_\infty$ (όπου $||f''||_\infty=\sup\{|f''(x)|:x\in[-\pi,\pi]\}$) ικανοποιεί το ζητούμενο. Το $>$ το βάζουμε για την περίπτωση που η $||f''||_\infty=0$.

4. (α) Θεωρία, §2.3 στον Strauss.
(β) Επεκτείνουμε την ϕ σε περιττή συνάρτηση $\tilde{\phi}$ στο $[-\pi,\pi]$. Δείχνουμε ότι η σειρά Fourier της είναι η $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$. Η υποψήφια λύση είναι η

$$u(x,t):=\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{-kn^2t}\sin(nx).$$

Για το ότι είναι συνεχής στο $[0,\pi]\times[0,\infty)$, θα δείξουμε ότι η σειρά στο δεξί μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\pi]\times[0,\infty)$. Μπορούμε να δώσουμε ένα από τα εξής τρία επιχειρήματα.

(i) Από τις ιδιότητες της ϕ δείχνουμε ότι η $\tilde{\phi}\in C^2([-\pi,\pi])$ και $\tilde{\phi}(-\pi)=\tilde{\phi}(\pi),\tilde{\phi}'(-\pi)=\tilde{\phi}'(\pi)$. Από το θέμα 3, παίρνουμε ότι υπάρχει σταθερά $C<\infty$ ώστε $|b_n|\leqslant C/n^2$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<\infty$ και αυτό αρκεί για να δείξουμε ότι η σειρά που ορίζει την u συγκλίνει ομοιόμορφα (κριτήριο Weierstrass).

(ii) Επειδή $\tilde{\phi}(-\pi)=\tilde{\phi}(\pi)$ και η $\tilde{\phi}$ συνεχής και φραγμένης κύμανσης ως C^1, η σειρά Fourier της $\tilde{\phi}$ συγκλίνει στην $\tilde{\phi}$ ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$. Το συμπέρασμα έπεται τώρα από το θεώρημα Abel για τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n(x,t):=b_n\sin(nx), g_n(x,t):=e^{-kn^2t}$ στον χώρο $X:=[-\pi,\pi]\times[0,\infty)$.

(iii) Επειδή $\tilde{\phi}(-\pi)=\tilde{\phi}(\pi)$, η $\tilde{\phi}$ συνεχής, και η $\tilde{\phi}$ είναι τμηματικά C^1 (εδώ είναι παντού C^1), από γνωστό θεώρημα σύγκλισης παίρνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<\infty$. Αυτό αρκεί όπως είπαμε και στον πρώτο τρόπο πιο πάνω.

5. (α) Χρησιμοποιούμε την αρχή του μεγίστου. $\min_{z\in\bar{\Omega}}u(z)=-1, \max_{z\in\bar{\Omega}}u(z)=4$.
(β) Παράδειγμα 2 στη σελίδα 179 του Strauss. Ξεκινώντας από την μορφή της Λαπλασιανής σε πολικές συντεταγμένες, πραγματοποιούμε λεπτομερώς την ανάλυση που οδηγεί στη σχέση (7) του βιβλίου (στο βιβλίο παραλείπεται αυτή η ανάλυση) και έπειτα χρησιμοποιούμε τις συνοριακές συνθήκες για να προσδιορίσουμε τις σταθερές. Βρίσκουμε τελικά ότι

$$u(r,\theta)=\frac{3}{\log 2}\log r+\frac{1}{2^2-2^{-2}}(r^2-r^{-2})\cos(2\theta)+\frac{1}{1-2^{-10}}(r^{-5}-r^52^{-10})\sin(5\theta)$$

για κάθε $(r,\theta)\in[1,2]\times\mathbb{R}$.