1 Εξίσωση μεταφοράς

Έστω $\Omega := \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ ώστε οι $f, \partial_x f \in C(\bar{\Omega})$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g \in C^1(\mathbb{R})$. Τότε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= f(x,t) \quad && \text{για } (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) &= g(x) && \text{για } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση, που είναι στοιχείο του $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, την

$$u(x,t) := g(x-ct) + \int_0^t f(x-(t-s)c, s)\, ds$$

2 Εξίσωση κύματος

Έστω $\Omega := \mathbb{R} \times (0, \infty), f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ ώστε οι $f, \partial_x f \in C(\bar{\Omega})$ και $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\phi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$. Τότε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f(x,t) \quad && \text{για } (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) &= \phi(x) && \text{για } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \psi(x) && \text{για } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση, που είναι στοιχείο[1] του $C^2(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$, την

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\{\phi(x-ct) + \phi(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\, dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\, dy\, ds$$

3 Εξίσωση θερμότητας

Έστω $\Omega := \mathbb{R} \times (0, \infty), f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}, \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς ώστε η ϕ να είναι φραγμένη και η f να είναι φραγμένη σε κάθε σύνολο της μορφής $\mathbb{R} \times [0, T]$, όπου $T > 0$. Τότε μια λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= f(x,t) \quad && \text{για } (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) &= \phi(x) && \text{για } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

είναι η u που ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως

$$u(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\phi(y)\, dy + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}} f(y,s)\, dy\, ds$$

για $t > 0$ και $u(x,0) = \phi(x)$. Η λύση αυτή είναι στοιχείο του $C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Δεν είναι μοναδική.

4 Εξίσωση Laplace

Έστω $a > 0$, $\Omega := \{z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |z| := \sqrt{x^2+y^2} < a\}$, και $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ συνεχής. Το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad && \text{για } (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= g(x,y) && \text{για } (x,y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση, στοιχείο του $C(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$, η οποία δίνεται σε πολικές συντεταγμένες ως εξής (τύπος Poisson)

$$u(r,\theta) := \frac{a^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\frac{1}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)}\, d\phi$$

για κάθε $(r,\theta) \in [0,a) \times [0,2\pi]$, όπου $h(\phi) = g(a\cos\phi, a\sin\phi)$. Για $r = a$, οι τιμές είναι $u(a,\theta) := h(\theta)$.

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, η λύση δίνεται ως εξής

$$u(z) := \frac{a^2 - |z|^2}{2\pi a}\int_{|z'|=a} g(z')\frac{1}{|z-z'|^2}\, ds$$

για κάθε $z \in \Omega$, ενώ $u(z) := g(z)$ για $z \in \partial\Omega$. Το ολοκλήρωμα είναι επικαμπύλιο πρώτου είδους.

Στους τύπους λύσεων για τα προβλήματα 1, 2, 3, θέτοντας $f = 0$ έχουμε (φυσικά) τη λύση του ομογενούς προβλήματος. Έπειτα, η λύση του μη ομογενούς προκύπτει από τη λύση του ομογενούς με χρήση της συνταγής του Duhamel.

[1] Ο $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ περιέχει τις συναρτήσεις $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ ώστε οι $v, \partial_t v$ είναι συνεχείς στο $\bar{\Omega} = \mathbb{R} \times [0, \infty)$.

5 Σύγκλιση σειρών Fourier

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη με $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt < \infty$ (για παράδειγμα, f τμηματικά συνεχής) και

$$(S_n f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

με a_k, b_k τους γνωστούς συντελεστές Fourier.

1) **Κριτήριο Jordan** (Σύγκλιση σε ένα σημείο): Έστω $x_0 \in (-\pi, \pi)$ και ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε ο περιορισμός της f στο $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [-\pi, \pi]$ να είναι φραγμένης κύμανσης. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x_0) = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}.$$

Για $x_0 = -\pi$ ή $x_0 = \pi$ το κριτήριο ισχύει αλλά με την προϋπόθεση ο περιορισμός της f στο $[-\pi, -\pi + \delta] \cup [\pi - \delta, \pi]$ είναι φραγμένης κύμανσης και τότε το όριο ισούται με $(f(\pi-) + f((-\pi)+))/2$.

2) **Κριτήριο Jordan** (Ομοιόμορφη σύγκλιση σε διάστημα): Έστω $J = [c, d] \subset [-\pi, \pi]$ διάστημα ώστε η $f|J$ να είναι συνεχής και φραγμένης κύμανσης (αν το $-\pi$ ή το π είναι στοιχείο του J, τότε υποθέτουμε επίσης ότι $f(-\pi) = f(\pi)$). Τότε η $S_n f$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο J.

3) (Ομοιόμορφα απόλυτη σύγκλιση) Αν η f είναι συνεχής, $f(-\pi) = f(\pi)$, και η f' τμηματικά συνεχής, τότε $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty$ και η $S_n f$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[-\pi, \pi]$.

Το κριτήριο 1 είναι το Θεώρημα 11. 12 στο Mathematical Analysis. T. Apostol.

Το κριτήριο 2 είναι το πόρισμα στην Παράγραφο 2 του Κεφαλαίου 2 στο An Introduction to Harmonic Analysis. Y. Katznelson.

Και τα δύο κριτήρια περιέχονται στο Πόρισμα 2.62 (i) του Τριγωνομετρικές σειρές. A. Zygmund. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Ο ισχυρισμός 3 είναι ο πιο εύχρηστος στις εφαρμογές. Τον περιέχουν τα συγγράματα του μαθήματος. Αποδεικνύεται στη σελίδα 145 του βιβλίου του Strauss (ελληνική έκδοση). f' τμηματικά συνεχής σημαίνει ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο $J \subset [-\pi, \pi]$ ώστε στο $[-\pi, \pi] \backslash J$ η f' να υπάρχει, να είναι συνεχής, και να έχει πεπερασμένα πλευρικά όρια στα σημεία του J. Η συνθήκη $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty$ δίνει αμέσως, κατά τα γνωστά από τον Απειροστικό ΙΙ, ότι η $S_n f$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε μια συνεχή συνάρτηση, η οποία με ένα επιχείρημα ακόμα δείχνει κανείς ότι είναι η f). Χρήσιμο είναι να κρατήσει κανείς από τον ισχυρισμό το ότι $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty$ και όχι μόνο την ομοιόμορφη σύγκλιση στην f.

Υπενθύμιση: Μια σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, όπου $f_n : X \to \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, λέμε ότι **συγκλίνει ομοιόμορφα απολύτως** αν η $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Αυτό το είδος σύγκλισης είναι πιο χρήσιμο από την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Κάτω από τις υποθέσεις του ισχυρισμού 3, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα απολύτως (έπεται από το $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty$).

6 Σύγκλιση σειρών συναρτήσεων

Στη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών, πέρα από το θεώρημα για παραγώγιση σειράς συναρτήσεων (παραγώγιση όρο προς όρο), χρήσιμα είναι τα δύο παρακάτω αποτελέσματα.

Έστω X σύνολο και $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+$, συναρτήσεις.

Κριτήριο Dirichlet: Υποθέτουμε ότι

(α) Υπάρχει $M \in (0, \infty)$ ώστε $|f_1(x) + \cdots + f_n(x)| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ και $x \in X$.
(β) $g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+, x \in X$.
(γ) $g_n \to 0$ ομοιόμορφα για $n \to \infty$.

Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Κριτήριο Abel: Υποθέτουμε ότι

(α) Η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.
(β) $g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+, x \in X$.
(γ) Υπάρχει $M \in (0, \infty)$ ώστε $|g_n(x)| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ και $x \in X$.

Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Οι αποδείξεις των δύο κριτηρίων είναι απλές, βασίζονται στον τύπο της άθροισης κατά μέρη. Μπορεί να τις δει κανείς στις εξής αναφορές.

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ. Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας. Θεώρημα 27.32.

Mathematical Analysis. Tom Apostol. §9.11.

Theory and application of infinite series. Konrad Knopp. §48.

Παράδειγμα: Αν γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)$ συγκλίνει για κάθε $x \in [0, \pi]$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $(x, t) \in [0, \pi] \times [\varepsilon, \infty)$ για κάθε $\varepsilon > 0$ (εφαρμόζουμε το κριτήριο Dirichlet). Αν η πρώτη σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε η δεύτερη συγκλίνει ομοιόμορφα για $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty)$ (κριτήριο Abel) και επομένως ορίζει συνεχή συνάρτηση στο $[0, \pi] \times [0, \infty)$. Αν όμως για την πρώτη σειρά γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ (π.χ. με χρήση του ισχυρισμού 3 της προηγούμενης παραγράφου ή επειδή η c_n είναι γνωστή και φθίνει πολύ σύντομα), τότε η ομοιόμορφη σύγκλιση της δεύτερης σειράς είναι άμεση και δεν χρειαζόμαστε τα κριτήρια Abel, Dirichlet.

Τέτοια σενάρια εμφανίζονται όταν λύνουμε με χωρισμό μεταβλητών την εξίσωση θερμότητας στο $[0, \pi] \times [0, \infty)$ με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.