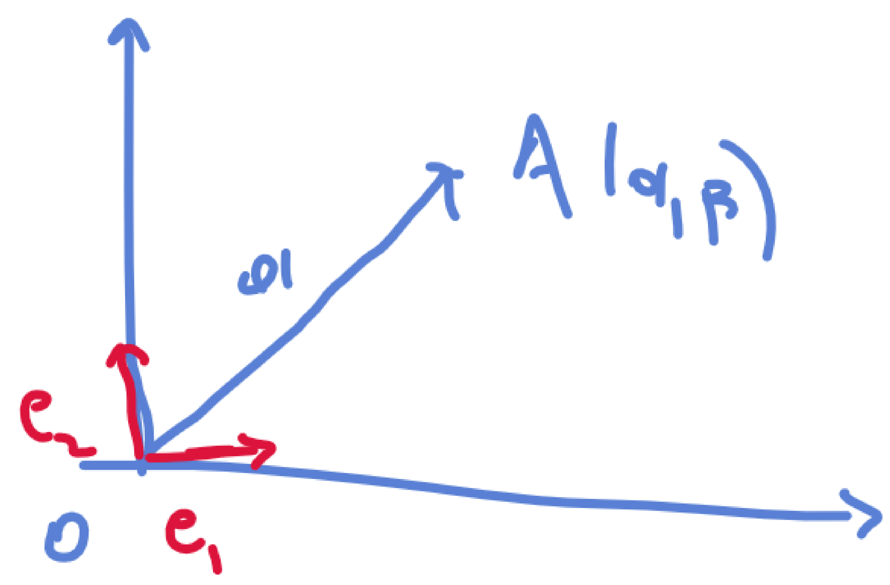
Επισκόπηση Μαθηματικών – Lecture 1.

1. Επισκόπηση Γραμμικής Άλγεβρας

1η Διάλεξη

- Διανύσματα
- Μιγαδικοί Αριθμοί
- Πολ. Εξισώσεις, Θεμελ. Θεώρημα της Άλγεβρας
- Πίνακες
- Ορίζουσες
- Γραμμικά Συστήματα – Μέθοδος Gauss για την επίλυση
- Τάξη Πίνακα και Αντίστροφος Τετραγωνικού Πίνακα

Διανύσματα



Έστω σημείο $A(\alpha,\beta)$ του επιπέδου E.

Προσδιορίζεται μονοσήμαντα το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης $\vec{OA} = a = (\alpha,\beta)$

Επίσης, αν θεωρήσω τα μοναδιαία διανύσματα e_1, e_2 των συντεταγμένων αξόνων, τότε $a = \alpha e_1 + \beta e_2$ όπου $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

$\{e_1, e_2\}$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$

Το a γράφεται ως γραμμ. συνδυασμός των e_1, e_2

Υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των διανυσμάτων του επιπέδου E και του $\mathbb{R}^2$

Επέκταση του $\mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow$ χώρος των n-συντεταγμένων

$$A(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n \longrightarrow \overrightarrow{OA} = a = (a_1,\dots,a_n) = a_1e_1+\dots+a_ne_n$$

$\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

μοναδιαία $e_i=(0,\dots,\underset{\uparrow\ i\text{-θέση}}{1},0,\dots 0)$

i) παράγουν τον $\mathbb{R}^n$

ii) $e_i \perp e_j \iff \langle e_i,e_j\rangle=0$

iii) $\|e_i\|=1$.

Πράξεις Έστω $(a_1,\dots a_n),(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Πρόσθεση: $(a_1,\dots,a_n)+(\beta_1,\dots,\beta_n)=(a_1+\beta_1,\dots,a_n+\beta_n)$

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός $\lambda(a_1,\dots,a_n)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\dots,\lambda a_n)$

Ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες με $0=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$ μηδενικό διάνυσμα

$-(a_1,\dots,a_n)=(-a_1,\dots,-a_n)$ αντίθετο

Εσωτερικό Γινόμενο $\langle a,\beta\rangle := \langle (a_1,\dots a_n),(\beta_1,\dots,\beta_n)\rangle = \sum_{i=1}^n a_i\beta_i \in\mathbb{R}$

Παρατήρηση $\langle a,a\rangle=\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0$ (ισότητα ανν $a=0$)

Μέτρο Διανύσματος: $\|a\| = \|(a_1,\dots a_n)\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}=\sqrt{\langle a,a\rangle}$

Ιδιότητες $\|a+\beta\|\le\|a\|+\|\beta\|$ Τριγωνική ανισότητα

$|\langle a,\beta\rangle|\le\|a\|\cdot\|\beta\|$ Cauchy-Swartz

Συνέπεια $$-1\le \frac{\langle a,\beta\rangle}{\|a\|\|\beta\|}\le 1.$$

$\longrightarrow \cos\theta$ όπου $\theta=(\widehat{a,\beta})$

$\alpha \perp \beta$ ανν. $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$

$$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \, \|\beta\|}$$

<u>Ιδιότητες</u>

$$\langle k\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, k\beta \rangle = k \langle \alpha, \beta \rangle$$

$$\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle.$$

Μιγαδικοί Αριθμοί: Επέκταση του συνόλου του $\mathbb{R}$ ώστε να έχει λύση η εξίσωση $x^2=-1$

Φανταστική Μονάδα: Ορίζω τον i: $i^2=-1$.

Ποιό είναι το σύνολο των Μιγαδικών Αριθμών $\mathbb{C}$

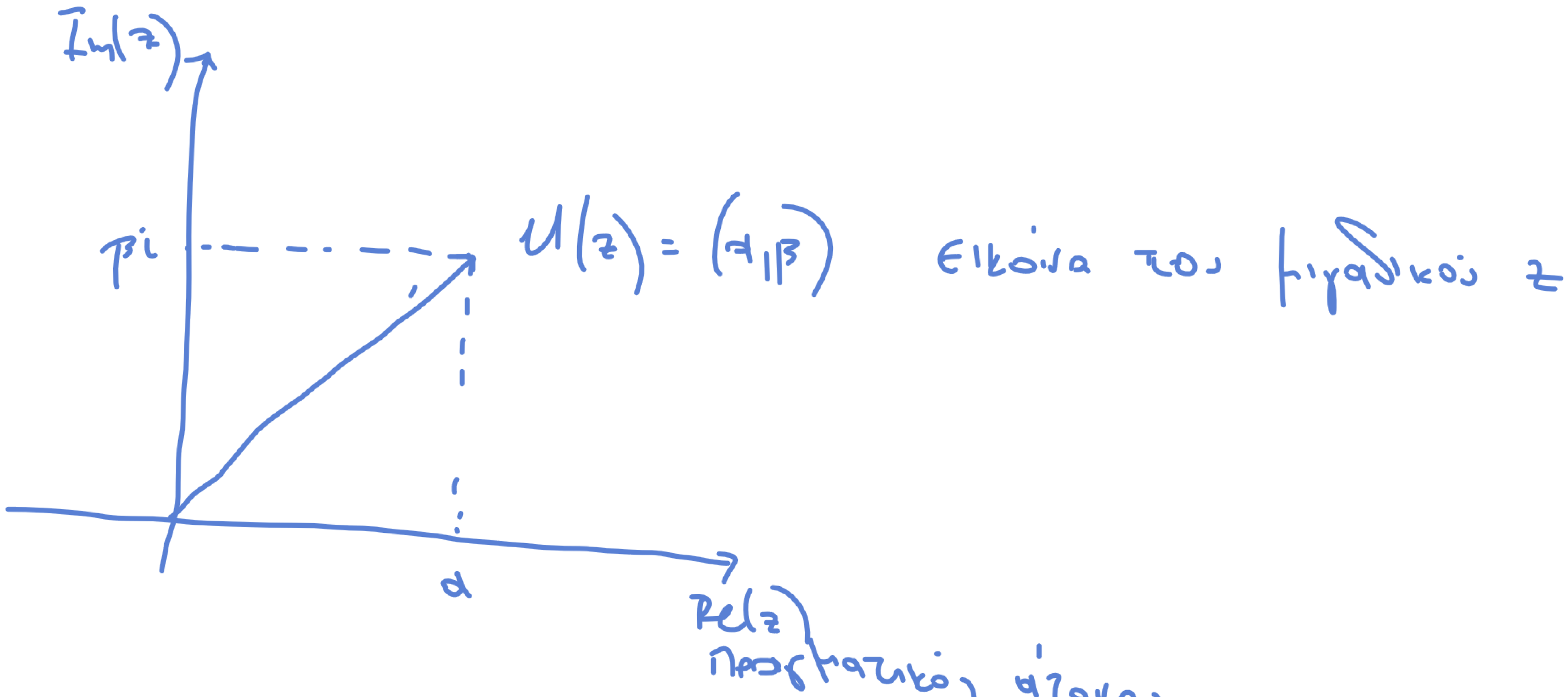
$$\mathbb{C}=\{\alpha+\beta i : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

Ο $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ καλείται μιγαδικός αριθμός όπου $i=0+1i$.

Το $\alpha=Re(z)$ καλείται πραγματικό μέρος του z

$\beta=Im(z)$ " φανταστικό μέρος του z

Γεωμετρική Αναπαράσταση του $z=\alpha+\beta i\in\mathbb{C}$



Κάθε $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ αντιστοιχίζεται σε μοναδικό μιγαδικό $z=\alpha+\beta i\in\mathbb{C}$ και αντίστροφα. Ο $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$ είναι ισόμορφοι.

Ισότητα Μιγαδικών: $z=w \Leftrightarrow \alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.

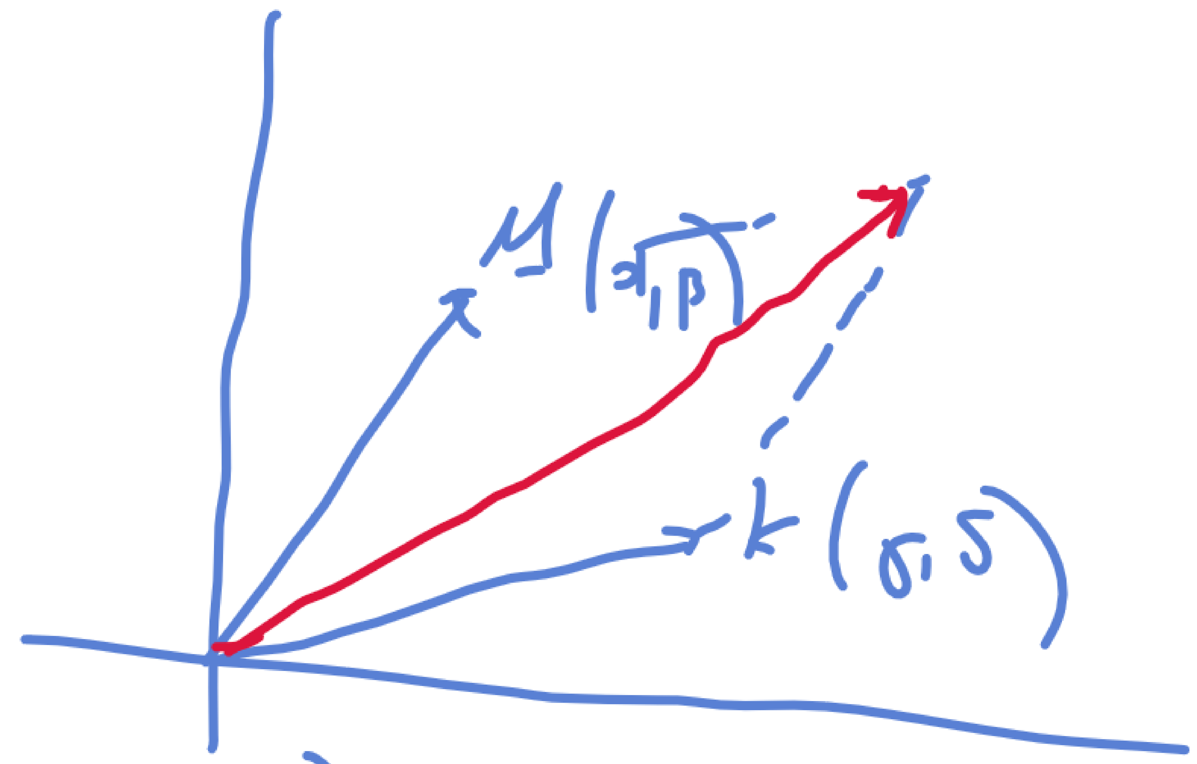
Πράξεις

Πρόσθεση

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

Βαθμωτό Γινόμενο

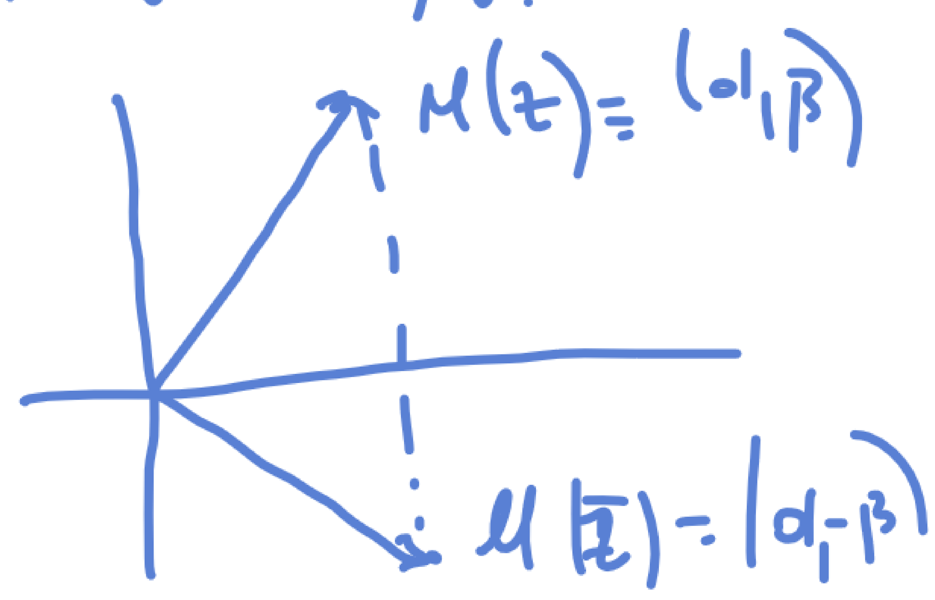
$$\lambda(\alpha+\beta i)=\lambda\alpha+\lambda\beta i$$



Πολλαπλασιασμός Μιγαδικών

$$(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i.$$

Ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες.



Συζυγής Μιγαδικός

$$\bar{z}=\overline{\alpha+\beta i}=\alpha-\beta i$$

$$Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{και} \quad Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Μέτρο Μιγαδικού
≡
Μήκος Διανύσματος

Ιδιότητες

$$\|z\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\geq 0 \quad (\text{ισχύει το ίσον αν } z=0)$$

$$\|z\|^2=z\cdot\bar{z}$$

$$\|z\|=\|-z\|=\|\bar{z}\|.$$

Πηλίκο

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Παράδειγμα

$$\frac{2+i}{1-3i}=\frac{(2+i)(1+3i)}{1^2+(-3)^2}=\frac{(2-3)+(1+6)i}{10}=-\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i$$

Δυνάμεις

$$z^n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ z, & n=1 \\ z\cdot z\cdots z & n\geq 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Δυνάμεις του i

$$i^n = i^{4k+\upsilon} = \begin{cases} 1 & \upsilon=0 \\ i & \upsilon=1 \\ -1 & \upsilon=2 \\ -i & \upsilon=3 \end{cases}$$

Παράδειγμα

$i^{21} = i^{4\cdot 5+1} = i$.

Επίλυση 2ου βαθμού εξίσωσης

$\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ λύση στο $\mathbb{C}$

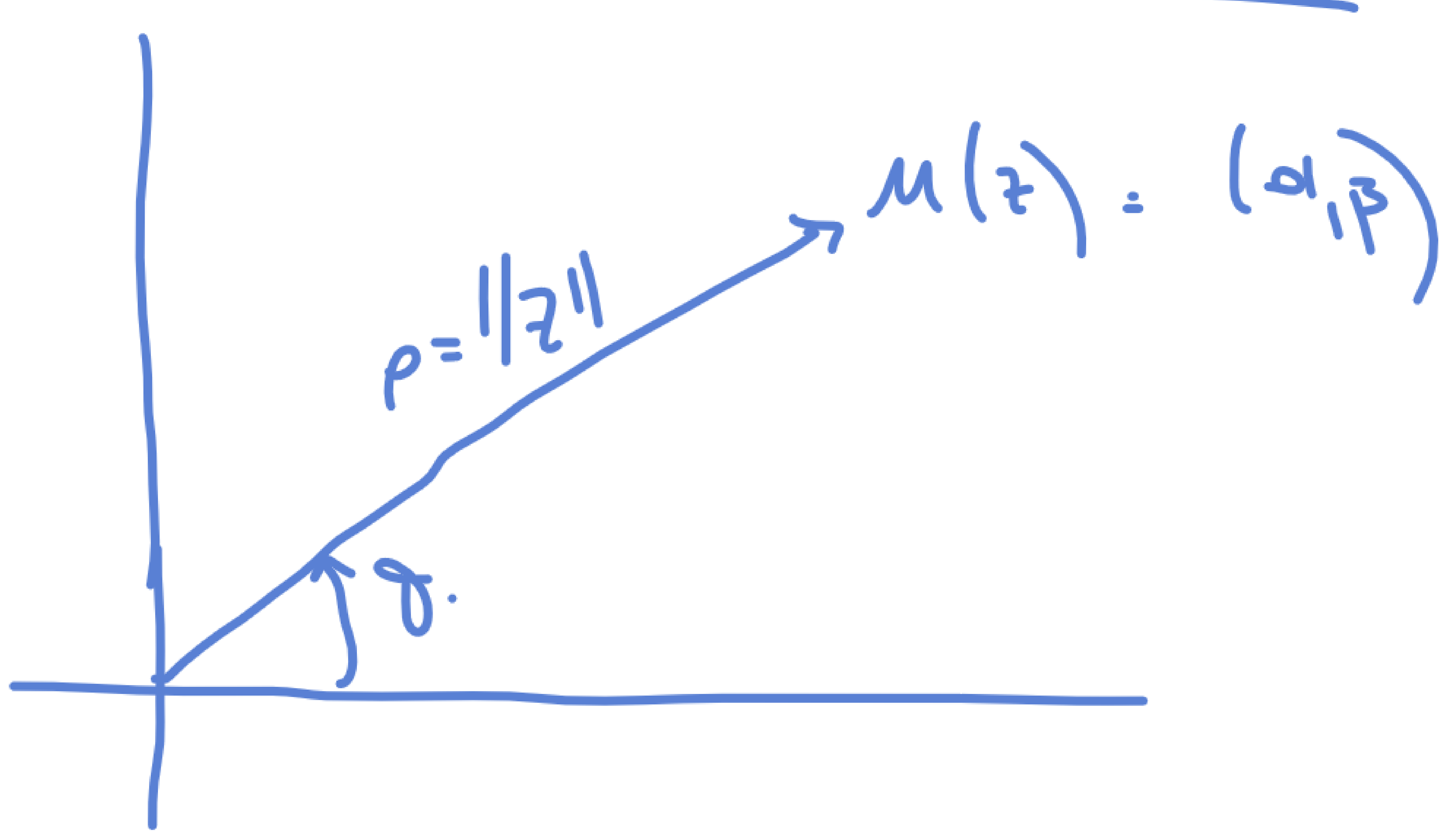
$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma$

Αν $\Delta<0$ τότε υπάρχουν δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$$

Τύποι $x_1+x_2 = -\beta/\alpha$ $\quad x_1\cdot x_2 = \gamma/\alpha$

Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού



$z=\alpha+\beta i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\rho = \|z\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

θ = όρισμα του z = $Arg(z)$

$\cos\theta = \frac{\alpha}{\rho}$ και $\sin\theta = \frac{\beta}{\rho}$

Ισότητα $z_1 = z_2$ ανν $\rho_1=\rho_2$ και $\theta_1-\theta_2 = k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Πολλαπλασιασμός

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \rho_1 / \rho_2 \left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i \sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

Παράδειγμα

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right), \quad z_2 = 3\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$z_1 z_2 = 2 \cdot 3 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{15\pi}{6} + i \sin\frac{15\pi}{6}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

ΤΥΠΟΣ DE MOIVRE

$$z^n = \rho^n \left(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)\right)$$

Παράδειγμα

Αν $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$z^{2021} = 2^{2021}\left(\cos\frac{2021\pi}{6} + i \sin\frac{2021\pi}{6}\right)$$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Ν-ιοστές Ρίζες της Μονάδας

$$z^n = 1 \iff z_k = \cos\frac{k \cdot 2\pi}{n} + i \sin\frac{k \cdot 2\pi}{n}$$

$k = 0, 1, \dots n-1$

αν $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$ τότε από DE MOIVRE

κορυφές κανονικού n γώνου εγγεγραμμένου σε μοναδιαίο κύκλο

οι ν-ιοστές ρίζες της μονάδας είναι οι $1, w, w^2, \dots w^{n-1}$

Η εξίσωση

$$z^n = \alpha = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow z_k = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{k2\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{k2\pi+\theta}{n}\right)$$

$k = 0, \ldots, n-1$

Π.χ. $z^5 = 16(\sqrt{3}+i) = 32\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow z_k = 2\left(\cos\frac{k\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}}{5} + i\sin\frac{k\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6}}{5}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις – Επίλυση στο $\mathbb{C}$

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \quad x \in \mathbb{C}$$

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Κάθε πολυώνυμο έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Συμπέρασμα Ένα πολυώνυμο n-οστού βαθμού έχει ακριβώς n ρίζες όχι και ανάγκη διαφορετικές μεταξύ τους.

Προσοχή! Αν οι συντελεστές $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $k = 0 \ldots n$ τότε οι ρίζες εμφανίζονται ως ζεύγη συζυγών μιγαδικών.

Παράδειγμα Να λυθεί η $P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0$ αν γνωστό ότι η $1+2i$ ρίζα της εξίσωσης.

Οι συντελεστές πραγματικοί

Άρα η $P(x)=0$ έχει ρίζες τους $1+\sqrt{2}i$ και $1-\sqrt{2}i$.

Άρα το $P(x)$ έχει παράγοντες τους $x-(1+\sqrt{2}i)$

$x-(1-\sqrt{2}i)$

$\Rightarrow$ Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $\left(x-(1+\sqrt{2}i)\right)\cdot\left(x-(1-\sqrt{2}i)\right)$

$= x^2-2x+3.$

Διαιρώ $P(x) : x^2-2x+3$ και βρίσκω πηλίκο $\pi(x) = 3x+2$

Άρα $P(x) = (3x+2)(x^2-2x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ ή $x_{1,2} = 1\pm\sqrt{2}i$

Πίνακες

<u>Ορισμός</u> Πίνακας καλείται μία ορθογώνια διάταξη $m\cdot n$ στοιχείων από το σώμα $\mathbb{F} (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ σε m γραμμές και n στήλες ως εξής:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{ij} & \cdots a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

στοιχείο στη θέση (i,j)
i - γραμμής
j - στήλη.

Ο αριθμοί m, n λέγονται διαστάσεις του πίνακα.

$$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$$

Αν $m=n$ τότε ο A καλείται τετραγωνικός πίνακας

Μηδενικός Πίνακας $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ δηλ. $a_{ij} = 0 \ \forall i \forall j$

Αν $n=1$ τότε έχω πίνακα στήλη $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ ⟵ γράφω διανύσματα σε μορφή πινάκων.

Αν $m=1$ τότε έχω πίνακα γραμμή $v^t = [v_1, v_2, \ldots v_m]$

ανάστροφος του v.

Ανάστροφος πίνακας $A^t = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

<u>Π.χ</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ειδικοί Τετραγωνικοί Πίνακες $m=n$

→ A διαγώνιος αν $a_{ij}=0 \ \forall i\neq j$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(1,2,0)$$

Μοναδιαίος $I_n = \mathrm{diag}(1,\dots,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

→ Άνω Τριγωνικός $A=(a_{ij})$ αν $a_{ij}=0 \ \forall i>j$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ άνω τριγωνικός

→ Κάτω Τριγωνικός $A=(a_{ij})$

αν. $a_{ij}=0 \ \forall i<j$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ κάτω τριγωνικός

Ανάστροφος συζυγής

$A^* = (\bar{a}_{ji}) = \bar{A}^t$ ο ανάστροφος με συζυγή στοιχεία.

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2+i \\ 1 & -2-i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -2+i \\ -1 & 2-i & 0 \end{pmatrix}$

Αν $A = A^t$ τότε ο A καλείται συμμετρικός

αν $A = A^*$ τότε ο A καλείται ερμιτιανός

αν $A = -A^t$ τότε ο A " αντισυμμετρικός

αν $A = -A^*$ τότε ο A " αντιερμιτιανός.

Π.χ. $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -5 & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix} = A^t = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -5 & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ συμμετρικός

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2-i & -4i \\ 2+i & -1 & 2 \\ 4i & 2 & 7 \end{bmatrix} = A^* = \begin{bmatrix} 4 & 2-i & -4i \\ 2+i & -1 & 2 \\ 4i & 2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow$ ερμιτιανός

Γραφή πίνακα ως προς γραμμές ή στήλες

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to r_1 \\ \to r_2 \\ \vdots \\ \to r_i \\ \vdots \\ \to r_m \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \| & \| & \| & \| \\ c_1 & c_2 & c_j & c_n \end{array} \end{array}$$

$r_i =$ η i-γραμμή του A

τότε $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$ πίνακας στήλη.

$c_j =$ η j-στήλη του A.

$A = [c_1 \; c_2 \; \ldots \; c_j \; \ldots \; c_n]$

Ισότητα Πινάκων $A = B$ ανν. να ίδιες διαστάσεις

$A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ $\quad a_{ij} = b_{ij} \ \forall i \forall j$

Άθροισμα Πινάκων $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

$A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ίδιας διάστασης

Βαθμωτός Πολλ/σμός $\lambda \cdot A = \lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij}), \ \lambda \in \mathbb{F}.$

sos

Πολλαπλασιασμός Πινάκων (αριστερός και δεξιός. Παίζει ρόλο η σειρά του πολλ/σμού)

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

και μάλιστα δεν ορίζεται πάντα.

Για να ορίζεται γινόμενο πρέπει $A \in \mathbb{F}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{F}^{k \times n}$ και το $AB \in \mathbb{F}^{m \times n}$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad 2 \times 3$$

$A \cdot B$ ορίζεται διάσταση 2×4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad 3 \times 4$$

$B \cdot A$ δεν ορίζεται καθόλου.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 10 & 4 & 8 \\ 14 & 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Παίζει ρόλο η σειρά. Γενικά $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Μόνο για τετραγωνικούς που ορίζονται τα $A\cdot B$, $B\cdot A$

Αν $A\cdot B = B\cdot A$ λέμε ότι οι πίνακες αντιμετατίθενται.

Δυνάμεις

$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$

$$A^k = \begin{cases} I_n, & k=0 \\ A, & k=1 \\ A\cdot A^{k-1}, & k>1. \end{cases}$$

Αν $A = \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n) \Rightarrow A^k = \mathrm{diag}(a_1^k,\dots,a_n^k) = \begin{bmatrix} a_1^k & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & a_n^k \end{bmatrix}$

Ταυτότητες

$(A+B)^2 = A^2 + \cancel{2AB} + B^2$ Δεν ισχύει στους πίνακες

$= (A+B)(A+B)$

$= A^2 + AB + BA + B^2 \quad (= A^2 + 2AB + B^2$ μόνο A, B αντιμετατίθενται.)

$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$ κλπ.

$(AB)^k = \cancel{A^k B^k}$ $\qquad (AB)^k = AB\cdot AB \cdots AB$

Ορίζουσα Τετραγωνικού Πίνακα

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2} \Longrightarrow$ ορίζουσα του A: $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$= a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$

Π.χ. $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 1 - (-2)\cdot 0 = 5.$

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3} \to$ ορίζουσα του A

$$\det A = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Π.χ.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = +2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= +2\cdot 2 - 3\cdot(-8) + (-1)\cdot 21 = 7.$$

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = +2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \dots = 7$$

Ελάσσονα ορίζουσα: Είναι η ορίζουσα πίνακα A_{ij} αν διαγράψω την i-γραμμή και την j-στήλη του A.

και $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς την j-στήλη του A.

<u>Ειδικές Περιπτώσεις</u> Αν ο A διαγώνιος ή άνω (κάτω) τριγωνικός

τότε $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$.

<u>Γραμμοπράξεις</u> ή Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί Γραμμών σε πίνακα A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \longleftarrow r_i \text{ η } i\text{-γραμμή του } A.$$

1. Εναλλαγή 2 γραμμών : $r_i \longleftrightarrow r_j$
2. Πολλαπλασιασμός της r_i με $\lambda \neq 0$: $r_i \longrightarrow \lambda r_i$
3. Προσθέτω πολλαπλάσιο της r_j στην r_i : $r_i \longrightarrow r_i + \lambda r_j$, $\lambda \neq 0$

ο πίνακας που προκύπτει από εφαρμογή γραμμοπράξεων καλείται γραμμοϊσοδύναμος του A. και συμβολίζεται ως $\tilde{A}$

<u>Ιδιότητες</u> Αν ο A ή ο γραμμοϊσοδύναμος έχει

1) μηδενική γραμμή $\Rightarrow \det A = 0$
2) δυο γραμμές ανάλογες $\Rightarrow \det A = 0$
3) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
4) αν ο $\tilde{A}$ από $r_i \leftrightarrow r_j$ τότε $\det A = -\det \tilde{A}$

5) Αν ο $\tilde{A}$ από $r_i \to r_i + \lambda r_j$ τότε $\det A = \det \tilde{A}$

<u>Επίσης</u>

$\det A^t = \det A$. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$\det \bar{A} = \overline{\det A}$

$\det A^k = (\det A)^k$.

$\det A^* = \overline{\det A}$

<u>Παράδειγμα</u>

Στόχος: Ο $\tilde{A}$ να αντιστοιχεί σε άνω (κάτω) τριγωνικό

$$\begin{vmatrix} -3 & -7 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -3 & -7 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \overset{A^t}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4 \to r_4 + 2r_1}{\overset{r_2 \to r_2 - 4r_1}{\overset{r_3 \to r_3 - 2r_1}{=}}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{r_4 \to r_4 + r_2}{\overset{r_3 \to r_3 - r_2}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} \overset{r_4 \to r_4 + 3r_3}{=} -(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -(-2) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot 8 = -48$$

Διάλεξη 2:

Ενότητες: Αντίστροφος Πίνακας

Γραμμικά Συστήματα: Επίλυση με μέθοδο Gauss

Τάξη Πίνακα

Τετραγωνικές Μορφές Πίνακα

o———o

Διανυσματικοί ή Γραμμικοί Χώροι

Υπόχωροι

Γραμμική Θήκη και Σύνολο γεννητόρων

Γραμμική Ανεξαρτησία

Βάση και Διάσταση ενός ΔΧ.

o———o

Αντίστροφος Πίνακας

Μόνο για τετραγωνικούς!

Ορισμός Ο B καλείται αντίστροφος του τετραγωνικού πίνακα A αν

(i) A, B αντιμετατίθονται δηλ. $AB = BA$.

(ii) $AB = BA = I_n$

Ο B καλείται αντίστροφος του A και συμβ. με A^{-1} δηλ.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Σε αυτή την περίπτωση ο A καλείται αντιστρέψιμος

Παρατήρηση: Δεν υπάρχει ο A^{-1} για κάθε τετρ. πιν. A.

Ικανή Συνθήκη Αν $\det A \neq 0$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος

Ισχύει και ισοδύναμα δηλ. A αντιστρ. $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Πως βρίσκω τον A^{-1}; 2×2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ τότε $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\det A \neq 0$.

Γενικά Αν $\det A \neq 0$ τότε $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\underbrace{(\mathrm{adj}\, A)}_{\text{Προσαρτημένος πίνακας } n\times n}$

$\mathrm{adj}\, A = \left((-1)^{i+j}\det A_{ij}\right)^{t}$

A_{ij} = πίνακας του A χωρίς i-γραμμή, j-στήλη

Αν $\det A = 0$ τότε A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Ιδιότητες Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος (δηλ. $\exists A^{-1}$) τότε

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, $k \neq 0$

(iii) $(A^{k})^{-1} = (A^{-1})^{k} = A^{-k}$, αν A^k αντιστρ.

(iv) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

(v) $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Γραμμικά Συστήματα

Σύνολο m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
\iff A \cdot x = b
$$

όπου $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ πίνακας συντελ.

$x \in \mathbb{F}^{n \times 1}$, $b \in \mathbb{F}^{m \times 1}$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

x: πιν. στήλη αγνώστων, b: πιν. στήλη σταθ. όρων.

Έστω ότι $m=n$ και $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τετρ.

1) Αν A αντιστρέψιμος δηλ. $\det A \neq 0$ τότε έχω μοναδική λύση.

$$
Ax = b \overset{A^{-1}\cdot}{\iff} A^{-1}Ax = A^{-1}b \iff I_n x = A^{-1}b \iff \boxed{x = A^{-1}b}
$$

Προσοχή

$$
x \cdot A = b \overset{\cdot A^{-1}}{\iff} x \cdot AA^{-1} = bA^{-1} \iff \boxed{x = b \cdot A^{-1}}
$$

2) Αν A αντιστρέψιμος δηλ. $\det A \neq 0$ με μέθοδο Cramer

$$
x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, \dots, n
$$

όπου A_j = πίνακας A όπου έχω αλλάξει τη j-στήλη με το b.

Παραδείγματα

1) Να βρ. $k \in \mathbb{R}$ ώστε το
$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 = -1 \end{cases}$$
να έχει μοναδική λύση

Έχω γραμμικό 3×3 και έχει μον. λύση αν $\det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -5k+3 \neq 0 \iff k \neq \frac{3}{5}.$$

Για $k \neq \frac{3}{5}$ το σύστημα έχει μον. λύση την (Μέθοδος Cramer)

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \dots = 22k-10$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{vmatrix} = \dots = -19k+13$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = 0 \qquad k \neq 3/5$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{22k-10}{-5k+3}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-19k+13}{-5k+3}$$

Ομογενές Γραμμικό Σύστημα αν $b=0$ δηλ.
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Εδώ υπάρχει πάντα λύση η $x = 0$. Είναι μοναδική ή υπάρχουν και μη μηδενικές λύσ.

Αν $m=n$ δηλ. A τετρ.

αν $\det A \neq 0$ τότε το ομογενές έχει μοναδική λύση την $x=0$

διαφορετικά έχει και μη μηδενική λύση (άπειρες λύσεις) (τετρ. μόνο)

Συμβιβαστό λέγεται το σύστημα που έχει λύση

Ασυμβίβαστο " " " που δεν έχει λύση (αδύνατο)

→ Για γενική περίπτωση $A \in F^{m\times n}$ με μέθοδο απαλοιφής Gauss

Ο A κλιμακωτός αν:

(i) πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής (ηγετικό) είναι δεξιότερα από το ηγετικό της προηγούμενης "

(ii) οι μη μηδενικές γραμμές είναι πάνω από τις μηδενικές

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{κλιμακωτός}$$

A ανηγμένος κλιμακωτός αν:

(i) A κλιμακωτός

(ii) ηγετικά στοιχεία $= 1$

(iii) Στη στήλη των ηγετικών στοιχείων όλα τα υπόλοιπα $= 0$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

κάθε πίνακας A είναι γραμμο ισοδύναμος ενός κλιμακωτού.

Επίλυση με μέθοδο Gauss

Έστω το γραμμικό σύστημα $A \cdot x = b$

Φτιάχνω τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid b]$ και βρίσκω τον γραμμοϊσοδύναμό του που είναι κλιμακωτός.

$$[A \mid b] \overset{\text{γραμμοπράξεις}}{\sim} \cdots \sim [\tilde{A} \mid \tilde{b}]$$ ← κλιμακωτός ή ανηγμένος κλιμακωτός

Τάξη του A ή $\operatorname{rank}(A) = r(A)$ = πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού γραμμοϊσοδύναμου του A.

δηλ. $\tilde{A}$ ← # μη μηδενικών γραμμών ⟶ $r(A) = r$

πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του A.

Αν $r < m$ και κάποιο από τα $\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_m \neq 0 \Rightarrow$ σύστημα ασυμβίβαστο.

Αν $r \leq n$ και $\tilde{b}_{r+1} = \cdots = \tilde{b}_m = 0 \Rightarrow$ σύστημα είναι συμβιβαστό.

μοναδική λύση $r = n$.

άπειρες λύσεις $r < n$ και $n - r$ πλήθος των ελεύθερων αγνώστων.

Παραδείγματα

1) Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \\ 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

. Να λυθεί με Gauss

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \overset{r_2 \to r_2 + 2r_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \overset{r_2 \to \frac{1}{7} r_2}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 + \frac{3}{7}x_3 &= -\frac{3}{7} \\ 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

κλιμακωτός

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= -2 \\ x_2 &= -3/7 + 6/7 = 3/7 \\ x_1 &= 3 + 4 - \frac{6}{7} = 43/7 . \end{aligned}$$

μοναδική λύση.

2) Να β. $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= \alpha \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

να είναι συμβιβαστό.

κλιμακωτός

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & \alpha \\ 4 & 1 & -2 & \alpha \end{array}\right) \sim \cdots\cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3\alpha - 35 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 8 - \frac{7}{10}(3\alpha - 35) \end{array}\right)$$

Το σύστημα θα είναι συμβιβαστό αν $r(A) \le 3 \iff \alpha - 8 - \frac{7}{10}(3\alpha - 35) = 0$

Άρα για $\alpha=15$ το σύστημα είναι συμβιβαστό

και μάλιστα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=3 \\ -3x_2-x_3&=4 \\ -10x_3&=10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1&=5 \\ x_2&=-1 \\ x_3&=-1 \end{aligned}$$

Για κάθε A τετρ. ισχύουν τα παρακάτω ισοδύναμα:

(i) A αντιστρέψιμος

(ii) $Ax=b$ έχει μοναδική λύση

(iii) $Ax=0$ έχει " " την $x=0$

(iv) $\det A \neq 0$

(v) $r(A)=n$

Για το σύστημα $Ax=0$ αν $\det A=0$ (A τετρ.) ή $r(A)<n$.

Τότε έχει άπειρες λύσεις (μη μηδενικές)

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} 4x_1+12x_2-7x_3+6x_4&=0 \\ x_1+3x_2-2x_3+x_4&=0 \\ 3x_1+9x_2-2x_3+11x_4&=0 \end{aligned}$$

γραμμοπράξεις για κλιμακωτό

$$r(A)=r\begin{pmatrix} 4 & 12 & -7 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 9 & -2 & 11 \end{pmatrix} = \dots\dots = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 4 = n$$

άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με 2 ελεύθερες μεταβλ.

Μορφή Απείρων Λύσεων

$$\begin{aligned} x_1+3x_2-2x_3+x_4&=0 \\ x_3+2x_4&=0 \end{aligned} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Θέτω $x_4=\alpha$ και $x_2=\beta$ και έχω $x_3=-2\alpha$, $x_1=-3\alpha+3\beta$

Υπολογισμός A^{-1} με μέθοδο Gauss

Έστω A τετρ. με $\det A \neq 0$ $(\exists A^{-1})$

Τότε $[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}]$

Παράδειγμα

$$A = \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Άρα A αντιστρέψιμος $\to$

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{(\operatorname{adj} A)}$$

Τετραγωνική Μορφή Πίνακα

Έστω A τετρ.

Ορίζεται ως $q_A(x) = x^t A x$, $x \in F^{n\times 1}$.

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Αν A συμμετρικός τότε $q_A(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$

Χαρακτηρισμός για A συμμετρικό.

Η $q_A(x)$ θετικά ορισμένη αν $q_A(x) = x^t A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

Η $q_A(x)$ " ημιορισμένη αν $q_A(x) = x^t A x \geq 0 \quad \forall x \neq 0$

Η $q_A(x)$ αρνητικά ορισμένη αν $q_A(x) = x^t A x < 0 \quad \forall x \neq 0$

Η $q_A(x)$ " ημιορισμένη αν $q_A(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$

Διαφορετικά η $q_A(x)$ αόριστη

Με τον ίδιο τρόπο χαρακτηρίζεται και ο συμμετρικός A.

Χαρακτηρισμός χρησιμοποιώντας ορίζουσες

Έστω A τετρ. συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ορίζω τους υπο-πίνακες $A_1 = [a_{11}]$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

…. $A_n = A$.

<u>Κριτήριο</u> Αν $\det A_i > 0 \ \forall i = 1 \dots n$ τότε A θετ. ορισμένος

Αν $\det A_1 < 0$, $\det A_2 > 0$, …, $\det A_{n-1} = (-1)^n$, $\det A_n > 0$

εναλλαγή προσήμου

τότε ο A αρνητικά ορισμένος

<u>Παράδειγμα</u> $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ συμμετρικό

$\det A_1 = a_{11} = -2 < 0$, $\det A_2 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = 20 - 16 = 4 > 0$

$\det A_3 = \det A = 22 > 0$. $\Rightarrow$ A αρνητικά ορισμένος.

Διανυσματικοί ή Γραμμικοί Χώροι

Ένα σύνολο $V \neq \emptyset$ εφοδιασμένο με τις πράξεις $\qquad \mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

πρόσθεση $\quad V \times V \to V : (u,v) \to u+v \in V$.

βαθμωτός πολλαπλασιασμός $\quad \mathbb{F} \times V \to V : (\lambda, v) \to \lambda \cdot v \in V$.

που ικανοποιούν όλες τις γνωστές ιδιότητες

καλείται διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{F}$

Τα στοιχεία του λέγονται διανύσματα

Βασικοί Δ.Χ.

1) $V = \mathbb{R}^n$ πραγμ. χώρος των διανυσμάτων διάστασης n $\quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$

2) $V = \mathbb{F}^{n \times n}$ " " των τετραγωνικών πινάκων όπου $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$

$0_{\mathbb{F}^{n\times n}} = (0)$ μηδ. πίνακας.

3) $V = \mathbb{R}_n[x] = \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : a_n \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R} \}$

πραγμ. χώρος των πολυωνύμων. $\quad 0_{\mathbb{R}_n[x]} =$ μηδενικό πολυώνυμο.

4) $V = C[x] = \{ f(x) : f \text{ συνεχής} \}$ $\qquad 0_{C[x]} = 0$ μηδενική συνάρτηση

Υπόχωρος $\quad$ Έστω $U \subseteq V$ Δ.Χ., $U \neq \emptyset$.

Το U καλείται υπόχωρος του Δ.Χ. V αν για κάθε $u, v \in U$, $\lambda \in \mathbb{F}$ ισχύει $u+v \in U$, $\lambda \cdot u \in U$.

Κριτήριο $\quad$ Το U υπόχωρος του V Δ.Χ. αν
(i) $0_V \in U$
(ii) $\lambda u + \mu v \in U \quad \forall u, v \in U \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$

<u>Παράδειγμα</u> $V = \mathbb{R}^{2\times 2} = M_2(\mathbb{R})$ δ.χ. τετρ. πινάκων 2×2.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq V.$$

και για $a = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$. δηλ. $U \neq \emptyset$ αλλά και

$$0_V = \mathbb{O} \in U.$$

Έστω $\lambda \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a + \mu b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U.$

Άρα U υπόχωρος του V $(U \leq V)$

<u>Γραμμικός Συνδυασμός</u> Έστω $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ δ.χ.

τότε το <u>διάνυσμα</u> $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{F}$

καλείται γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_n$

Το σύνολο όλων των δυνατών γραμμικών συνδυασμών που δίνουν τα $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ δ.χ. ορίζουν τη γραμμική θήκη του συνόλου $k = \{v_1 \dots v_n\}$

Γραμμική θήκη του $k = span(k) = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F} \}$

$= \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

Το $span(K)$ υπόχωρος του δ.χ. V.

Αν $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0 \Rightarrow 0_V \in span(K)$

Αν $u,v \in span(K) \Rightarrow \lambda u+\mu v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \in span(K)$

$a_i = \lambda \cdot \lambda_i + \mu \cdot \mu_i$

Αν $span(K) = V$ δ.χ. (Πως το ελέγχω; $span(K) \subseteq V$ πάντα, άρα αρκεί να δ. $V \subseteq span(K)$)

Τότε λέμε ότι ο δ.χ. V παράγεται από το σύνολο K.

ή ότι το K είναι σύνολο γεννητόρων του V και τα στοιχεία του K γεννήτορες του V.

Αν $|K| = \pi\lambda\dot{\eta}\theta o\varsigma$ (ενδ. $< \infty$. Τότε ο V πεπερασμένα παραγόμενο

Παράδειγμα $V = \mathbb{R}^3$ δ.χ.

$K = \{(1,-1,-2),(5,-4,10),(-3,1,0)\} \subseteq V$.

$span(K) = \{\lambda(1,-1,-2) + \mu(5,-4,10) + k(-3,1,0),\ k,\lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$

$= \{(\lambda+5\mu-3k,\ -\lambda-4\mu+k,\ -2\lambda+10\mu),\ k,\lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$

Να εξετάσετε αν το $(-4,3,14) \in span(K)$

Θα πρέπει το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda + 5\mu - 3k &= -4 \\ -\lambda - 4\mu + k &= 3 \\ 2\lambda - 10\mu &= 14 \end{aligned}$$

να έχει λύση

να είναι συμβιβαστό

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$ και μάλιστα έχει μοναδική λύση την

$\lambda = 8, \ \mu = -3, \ k = -1.$

Άρα $(-4, 3, 14) \in span(k)$

(2) $k = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$

$$span(k) = \left\{ \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \right\}$$

$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \alpha,\beta,\gamma,\delta \right\} = M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow k$ σύνολο γεννητόρων.

Εδώ το k συνήθης βάση του $M_2(\mathbb{R})$ δ.χ.

~~S_J~~

<u>βάση</u>

<u>Γραμμική Ανεξαρτησία</u>

Τα $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ δχ. είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Διαφορετικά τα $v_1, v_2, \dots v_n$ λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα και τον ίδιο χαρακτηρισμό έχει και το αντίστοιχο σύνολο $k = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$

Αν τα $v_1, \dots v_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα

δηλ. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow v_i = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$

κάποιο $\lambda_i \neq 0$

γραμμ. συνδυασμός των $\{v_1, v_2, \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_n\}$

Αν το $k = \{v_1, \dots v_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο

\+

σύνολο γεννητόρων του V το δ.χ. V $\Rightarrow$ k βάση

και $\dim V = |k|$

διάσταση του δχ.

Προσοχή Η βάση ενός δ.χ. δεν είναι μοναδική.

αλλά όλες έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

δηλ. η διάσταση του δ.χ. V είναι μοναδική.

Παράδειγμα $v_1 = (3, 0, -6)$, $v_2 = (-4, 1, 7)$, $v_3 = (-2, 1, 5) \in \mathbb{R}^3$

Είναι γραμμικώς ανεξάρτητα;

ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \iff \begin{cases} 3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -6\lambda_1 + 7\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Θέλουμε να έχει μοναδική λύση την τετριμμένη

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 7 & 5 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

κλιμακωτός

άρα $r(A) = 3 = n \Rightarrow$ μοναδική λύση η τετριμμένη

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

και άρα $K = \{v_1, v_2, v_3\}$ γραμμικώς ανεξάρτητο.

Για να είναι το K βάση του $\mathbb{R}^3$ θα πρέπει:

$span(K) = \mathbb{R}^3$ (ή $\mathbb{R}^3 \subseteq span(K)$) $\quad span(K) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$

Έστω $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και θέλω $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ -6\lambda_1 + 7\lambda_2 + 5\lambda_3 = z \end{cases}$$

μοναδική λύση αν $\det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$ άρα $span(K) = \mathbb{R}^3$.

K: σύνολο γεννητόρων + γραμμ. ανεξάρτητο

Άρα K βάση του $\mathbb{R}^3$ και $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = |K|$

Σημείωση

$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$

Άρα αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι λύσεις της $\chi_A(\lambda) = 0$ (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές)

Τότε $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του A και $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ φάσμα του A

διακεκριμένες

Από θεμ. θεώρ. της Άλγεβρας

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}.$$

$\nu_i =$ αλγ. πολλαπλότητα της ιδιοτιμής (ρίζας της $\chi_A(\lambda) = 0$) λ_i

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = n.$$

Αν $\nu_i = 1$ τότε λ_i απλή ιδιοτιμή

Εύρεση Ιδιοδιανυσμάτων μιας δεδομένης ιδιοτιμής λ_i

Θεωρώ το ομογενές γραμμικό σύστημα $(A - \lambda_i I_n) \cdot x = 0$ και οι μη μηδενικές λύσεις του (άπειρες λύσεις) είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Το σύνολο των μη-μηδενικών λύσεων $V_A(\lambda_i) = \{x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) : (A - \lambda_i I_n)x = 0\}$ λέγεται ιδιόχωρος της ιδιοτιμής λ_i

Βρίσκω μία βάση του $V_A(\lambda_i)$ και τα στοιχεία αυτής είναι τα ζητούμενα ιδιοδιανύσματα. Επίσης

$$\begin{aligned} \dim V_A(\lambda_i) &= \#\text{ στοιχείων της βάσης} \\ &= \text{γεωμ. πολλ/τα της ιδιοτιμής } \lambda_i \\ &= n - \operatorname{rank}(A - \lambda_i I_n) \le \nu_i \end{aligned}$$

Άσκηση $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ Να β. τα χαρ. ποσά του A

Β1. Βρίσκω τη χαρ. εξίσωση του A: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9)=0 \Leftrightarrow (-1)^3(\lambda-1)(\lambda-3)^2=0$

$\Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=3$

$\lambda_1=1$ απλή και $\lambda_2=3$ με αλγ. πολλ/τα $k_2=2$.

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν :

$\lambda_1=1$. Φτιάχνω το ομογενές γραμμικό σύστημα $(A-I_3)x=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

← άπειρες λύσεις
↓
Υπόχωρο
↓
Ιδιοχώρος
$V_A(1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ -x_1+x_2+3x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-x_3 \\ x_1=2x_3 \end{cases}$$

Άρα $V_A(1)=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in M_{3\times 1}(\mathbb{R}) : x_2=-x_3,\ x_1=2x_3\right\}$

Να βρω τη βάση του $V_A(1)$ <
σύνολο γεννητόρων
γραμμικώς ανεξάρτητο

$V_A(1)\ni\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ άρα το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ παράγει τον $V_A(1)$

γραμμική ανεξαρτησία $\lambda\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda=0$

Άρα το $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ γραμ. ανεξάρτητο $\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ βάση του $V_A(1)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1=1$.

$\dim V_A(1)=1 \ =(\nu_1=1)$

Για $\lambda_2 = 3$: Φτιάχνω το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$(A - 3I_3)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Άπειρες λύσεις Μορφή ?}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 + x_3$$

$$V_A(3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}) : x_1 = x_2 + x_3 \right\}$$ Βρίσκω μία βάση

$$V_A(3) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ σύνολο γεννητόρων

γραμμική ανεξαρτησία $\quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$ άρα γραμμικώς ανεξάρτητα

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ βάση του $V_A(3)$

$$\dim V_A(3) = 2. = (\nu_2 = 2)$$

και τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$

[μπορώ να πάρω ποια; ?

όχι !

Ιδιότητες

① Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του $A \in M_n(\mathbb{K})$ (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές)

τότε $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

② Αν $\lambda = 0 \Rightarrow A$ δεν είναι αντιστρέψιμος

③ A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \lambda_i \neq 0 \ \forall i$.

④ $\sigma(A) = \sigma(A^t)$

⑤ Τα χαρ. ποσά του A^k είναι λ^k, x όπου λ, x. τα χαρ. ποσά του A.

Θεώρημα Cayley-Hamilton Για κάθε $A \in M_n(\mathbb{R})$ ισχύει $\chi_A(A) = \mathbb{O}$

πολυωνυμικός πίνακας.

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n\left(\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0\right)$$

$$\Rightarrow \chi_A(A) = (-1)^n\left(A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I_n\right) = \mathbb{O}$$

$$\Rightarrow A \underbrace{\left[\frac{(-1)^{n+1}}{b_0}\left(A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + \dots + b_1 I_n\right)\right]}_{A^{-1}} = I_n$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_0}\left(A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + \dots + b_1 I_n\right)}$$

Διαγωνοποίηση Τετρ. Πίνακα

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$

Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος (ή διαγωνοποιείται) αν υπάρχει $P \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος : $P^{-1}AP = \Delta$.

όπου Δ διαγώνιος.

Κριτήριο Διαγωνοποίησης Ο A διαγωνοποιείται ανν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

$$\sum_i \dim V_A(\lambda_i) = n.$$

Τότε $P^{-1}AP = \Delta \iff A = P\Delta P^{-1}$

όπου $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ και $P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ Προσοχή τα v_i πρέπει να μπουν στην ίδια σειρά όπως έχουν μπει τα λ_i στον Δ.

Συνέχεια Άσκησης ο A έχει ιδιοτιμές $\sigma(A) = \{1, 3\}$

$$\dim V_A(1) = 1 \quad , \quad \dim V_A(3) = 2.$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad , \quad \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Άρα ο A είναι διαγωνοποιήσιμος γιατί $\dim V_A(1) + \dim V_A(3) = 3 = n$

και άρα $P^{-1}AP = \Delta \iff \boxed{A = P\Delta P^{-1}}$

με $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, 3, 3)$ και $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Που μας χρησιμεύει; $A^k = P\,\Delta^k P^{-1}$ $\quad \Delta^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$

Then $A^{-1} = (P \Delta P^{-1})^{-1} = P \Delta^{-1} P^{-1}$

the $\Delta^{-1} = \operatorname{diag}\left(1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_n\right)$

for $A^{-k} = (A^{-1})^k = (P \Delta^{-1} P^{-1})^k = P (\Delta^{-1})^k P^{-1}$

$\Delta^{-k} = \operatorname{diag}\left(1/\lambda_1^k, \ldots, 1/\lambda_n^k\right)$