Επισκόπηση Διαφορικών Εξισώσεων

3η Σειρά Ασκήσεων

Λύσεις

1. α) $(1+t^2)y' - 2ty = 2t(1+t^2)$

$1+t^2 \neq 0 \ \forall t$

$\Leftrightarrow \quad y' - \dfrac{2t}{1+t^2} y = 2t \quad (1)$

ολοκληρώνοντας παράγοντας $\mu(t) = \exp\left(\int -\dfrac{2t}{1+t^2} dt\right)$

Θέτω $u = 1+t^2$ οπότε $du = 2t\,dt$ και έχουμε $(*)$

$$\mu(t) = \exp\left(\int -\frac{1}{u}\, du\right) = \exp(-\ln u)$$

$$= \exp(\ln u^{-1}) = e^{\ln\frac{1}{u}} = \frac{1}{u} = \frac{1}{1+t^2}$$

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη την (1) με $\mu(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ και παίρνει τη μορφή

$$\left(y \cdot \frac{1}{1+t^2}\right)' = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \cdot \frac{1}{1+t^2} = \int \frac{2t}{1+t^2}\, dt + c$$

$$\Leftrightarrow \quad y \overset{*}{=} (1+t^2) \cdot \int \frac{1}{u}\, du + c(1+t^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = (1+t^2)\ln u + c(1+t^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = (1+t^2)\ln(1+t^2) + c(1+t^2), \quad c \in \mathbb{R}$$

γενική λύση

(β) $ty' + y = e^t$, $y(1) = 1$.

Για $t \neq 0$ έχω $y' + \frac{1}{t} y = \frac{e^t}{t}$ (1)

Επειδή $t_0 = 1 > 0$, το αντίστοιχο ΠΑΤ έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$. Άρα το αντίστοιχο διάστημα λύσης είναι το $(0, +\infty)$

και για $t > 0$ έχω ολοκληρώνοντα παράγοντα

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{1}{t}\, dt\right) = \exp(\ln t) = t \; ; \; t > 0$$

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη την (1) με $\mu(t) = t$ και παίρνω τη μορφή

$$(y t)' = \frac{e^t}{t} \cdot t = e^t$$

$$\Leftrightarrow y t = \int e^t\, dt + c$$

$$\Leftrightarrow y(t) = e^t + \frac{c}{t}$$ γενική λύση

Όμως $y(1) = 1 \Rightarrow e + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - e$

και έχουμε $y(t) = e^t + \frac{1-e}{t}, \; t > 0$

η ειδική λύση που είναι και λύση του ΠΑΤ

(2) $y' + \frac{1}{4}y = 3 + 2\cos 2t \quad , \quad y(0) = 0$

ολοκληρώνοντας παράγοντας $\mu(t) = \exp\left(\int \frac{1}{4}\,dt\right) = e^{t/4}$

πολ/λ/ζω κατά μέλη την εξίσωση με $\mu(t)$ και έχω

$$\left(y e^{t/4}\right)' = \left(3 + 2\cos 2t\right)e^{t/4}$$

$$\Leftrightarrow \quad y e^{t/4} = \int \left(3e^{t/4} + 2\cos 2t \cdot e^{t/4}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow \quad y e^{t/4} = 12e^{t/4} + \underbrace{\int 2\cos 2t\, e^{t/4}\,dt}_{}$$

Κάνω 2 φορές παραγοντική για τον υπολογισμό "I"

$$I = \int (\sin 2t)' e^{t/4}\,dt = \sin 2t \cdot e^{t/4} - \int \sin 2t \frac{e^{t/4}}{4}\,dt$$

$$= \sin 2t\, e^{t/4} - \frac{1}{8}\int (-\cos 2t)' e^{t/4}\,dt$$

$$= \sin 2t\, e^{t/4} + \frac{\cos 2t\, e^{t/4}}{8} - \frac{1}{32}\int \cos 2t\, e^{t/4}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad I = \sin 2t\, e^{t/4} + \frac{\cos 2t \cdot e^{t/4}}{8} - \frac{1}{32}\frac{I}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{64}\right)I = \sin 2t\, e^{t/4} + \frac{\cos 2t\, e^{t/4}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad I = \frac{64}{65}\sin 2t \cdot e^{t/4} + \frac{64}{65}\cdot\frac{\cos 2t\, e^{t/4}}{8}$$

$$= \frac{64}{65}\sin 2t \cdot e^{t/4} + \frac{8}{65}\cos 2t\, e^{t/4}$$

αρα $ye^{t/4} = 12e^{t/4} + \frac{64}{65}\sin 2t\, e^{t/4} + \frac{8}{65}\cos 2t\, e^{t/4} + c$

$\Leftrightarrow y(t) = 12 + \frac{64}{65}\sin 2t + \frac{8}{65}\cos 2t + c\,e^{-t/4}$ γενική λύση.

$y(0) = 0 \Leftrightarrow 12 + \frac{8}{65} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{788}{65}.$

$y(t) = 12 + \frac{64}{65}\sin 2t + \frac{8}{65}\cos 2t - \frac{788}{65}e^{-t/4}$ ειδική λύση του ΠΑΤ.

για $t \to \infty$ ο όρος $-\frac{788}{65}e^{-t/4} \to 0$

άρα η λύση $y(t)$ ταλαντώνεται γύρω από το 12, λόγω του τριγωνομετρικού όρου.

(3) $y' + \alpha y = be^{-\lambda t}$

ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(t) = \exp\int \alpha\, dt = e^{\alpha t}.$

πολλαπλασιάζω την εξίσωση κατά μέλη και έχω

$$(ye^{\alpha t})' = be^{-\lambda t}e^{\alpha t} = be^{(\alpha-\lambda)t}.$$

$$\Leftrightarrow ye^{\alpha t} = \int be^{(\alpha-\lambda)t}dt = \frac{b}{\alpha-\lambda}e^{(\alpha-\lambda)t} + c.$$

Άρα για $\alpha \neq \lambda$ έχω ότι $y = \frac{b}{\alpha-\lambda}e^{-\lambda t} + ce^{-\alpha t}$ για $\alpha \neq \lambda$.

ואז $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{b}{a-\lambda}e^{-\lambda t} + c e^{-at}\right) = \frac{b}{a-\lambda}\cdot 0 + c\cdot 0$

$= 0$

כי $e^{-\lambda t}, e^{-at} \longrightarrow 0$, $a,\lambda > 0$ כש $t\to\infty$

אם $a=\lambda$ אז $y' + ay = be^{-at}$.

$\mu(t) = e^{at}$:

$\Leftrightarrow \quad (ye^{at})' = b$

$\Leftrightarrow \quad ye^{at} = bt + c$

$\Leftrightarrow \quad y = bte^{-at} + ce^{-at}$.

$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(bte^{-at} + ce^{-at}\right) = b\cdot 0 + c\cdot 0 = 0$

ואז $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-at} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{at}} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{ae^{at}} \overset{a>0}{=} 0$

לכן $\forall\, a,\lambda > 0$ ו $b\in\mathbb{R}$ $y(t)\longrightarrow 0$ כש $t\to\infty$

④ (α) Έστω η ΣΔΕ $y' + y^2 \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{-y^2} = \sin x \, dx$$ χωριζόμενων μεταβλητών.

Ολοκληρώνω κατά μέλη.

$$\int \frac{dy}{-y^2} = \int \sin x \, dx \Leftrightarrow \frac{1}{y} = -\cos x + c.$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{-\cos x + c}.$$

(β) Έστω η ΣΔΕ. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$ χωριζόμενων μεταβλητών

$$\Leftrightarrow (y+e^{y})\,dy = (x - e^{-x})\,dx$$

Ολοκληρώνω κατά μέλη.

$$\int (y+e^{y})\,dy = \int (x - e^{-x})\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + e^{y} = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + c$$ πεπλεγμένη λύση

Όμως $y(0) = 1$.

Άρα για $x = 0$ έχω $\frac{1^2}{2} + e^{1} = \frac{0}{2} + 1 + c \Leftrightarrow c = e - \frac{1}{2}$.

οπότε $\frac{y^2}{2} + e^{y} = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + e - \frac{1}{2}$

(5) Η $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2} = 1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$ $\quad x\neq 0$ (1)

$= F(y/x)$ ομογενής

άρα θέτω $z=\frac{y}{x} \Leftrightarrow y = z\cdot x$

$\Leftrightarrow y' = z'\cdot x + z$ και έχω

με αντικατάσταση στην (1)

$$z'x + z = 1 + z + z^2 \Leftrightarrow z' = \frac{1+z^2}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1+z^2}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x}$$ χωριζόμενων μεταβλητών

Ολοκληρώνω κατά μέλη:

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \arctan(z) = \ln|x| + c$$

$$\Leftrightarrow \arctan(y/x) = \ln|x| + c$$

Σημείωση

$\arctan x = y \Leftrightarrow x = \tan y$ αντίστροφη της $\tan x$

με $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(x)$

(6) (α) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0 \quad , \quad x \neq 0$

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}y^3 \quad (1)$$ Εξίσωση Bernoulli. (k=3)

Θέτω $z = y^{1-k} = y^{1-3} = y^{-2}$ και

$$z' = -2y^{-3}\cdot y'$$

Πολλαπλασιάζω τη (1) κατά μέλη με $-2y^{-3}$ και έχω

$$y'(-2y^{-3}) + \frac{2}{x}(-2y^{-3})y = \frac{1}{x^2}y^3(-2y^{-3})$$

$$\Leftrightarrow \quad z' - \frac{4}{x}z = \frac{-2}{x^2} \quad (2), \quad x \neq 0$$ γραμμική 1ης τάξης

Ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{4}{x}dx\right) = \exp(-4\ln|x|) = \exp(\ln|x|^{-4}) = x^{-4}$

Πολλαπλασιάζω τη (2) κατά μέλη με x^{-4} και έχω

$$(z\cdot x^{-4})' = -\frac{2}{x^2}\cdot x^{-4}$$

$$\Leftrightarrow z\cdot x^{-4} = \int -2x^{-6}\,dx = -\frac{2x^{-5}}{-5} + c$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2}{5}\cdot\frac{x^4}{x^5} + cx^4 = \frac{2}{5x} + cx^4$$

$z = y^{-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{2}{5x} + cx^4.$$

(β) $xy' + y - y^2 e^{2x} = 0 \quad , x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad y' + \frac{1}{x} y = \frac{e^{2x}}{x} y^2 \quad (1)$$ Bernoulli με $k = 2$.

Θέτω $z = y^{1-2} = y^{-1}$ άρα $z' = -y^{-2} y'$

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη την (1) με $-y^{-2}$ και έχω

$$-y^{-2} y' - \frac{1}{x} y^{-1} = -\frac{e^{2x}}{x}$$

$$z' - \frac{1}{x} z = -\frac{e^{2x}}{x} \quad (2)$$ γραμμική 1ης τάξης

ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{1}{x} dx\right) = \frac{1}{x}$

πολλαπλασιάζω με $\mu(x)$ κατά μέλη την (2) και έχω

$$\left(z \cdot \frac{1}{x}\right)' = -\frac{e^{2x}}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad z \cdot \frac{1}{x} = \int -\frac{e^{2x}}{x^2} dx = \int -x^{-2} e^{2x} dx + c$$

$$\Leftrightarrow \quad z = -x \cdot \int \frac{e^{2x}}{x^2} dx + cx$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = -x \int \frac{e^{2x}}{x^2} + c \cdot x$$

(7) $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$ με ειδική λύση την $y_1(x) = \frac{1}{x}$

θέτω $y = y_1 + \frac{1}{v(x)} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v}$

άρα $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2}$ και $y^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2}$

αντικαθιστώ στην εξίσωση και έχω

$$-\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{v'}{v^2} = -\cancel{\frac{1}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{xv} + \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2}$$

$$\Leftrightarrow v' = -\frac{1}{x}v + \frac{1}{v^2} \Leftrightarrow v' + \frac{1}{x}v = \frac{1}{v^2} = v^{-2} \quad (2)$$

Bernoulli με $k = -2$.

θέτω $z = v^{1+2} = v^3$

$z' = 3v^2 v'$ πολλαπλασιάζω την (2) με $3v^2$

$$3v^2v' + \frac{3}{x}v^3 = 3 \Leftrightarrow z' + \frac{3}{x}z = 3 \quad (3)$$

γραμμική Δ.Ε.

$$\mu(x) = \exp\int \frac{3}{x}\,dx = x^3$$

άρα πολλαπλασιάζω την (3) με x^3 και έχω

$$(zx^3)' = 3 \Leftrightarrow zx^3 = 3x + c$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3}{x^2} + \frac{c}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow v^3 = \frac{3}{x^2} + \frac{c}{x^3} \Leftrightarrow \frac{1}{v^3} = \frac{1}{\frac{3}{x^2} + \frac{c}{x^3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{x}\right)^3 = \frac{1}{3/x^2 + c/x^3}$$

(8) (α) $y'' - 2y' - 3y = 0$

χαρ. εξίσωση $r^2 - 2r - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$r_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \Big< \begin{matrix} r_1 = 3 \\ \text{ή} \\ r_2 = -1. \end{matrix}$

γενική λύση της ομογενούς. $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

(β) $y'' + 9y = 0$

χαρ. εξίσωση $r^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -9 \Leftrightarrow r = \pm 3i$.
μιγαδικές ρίζες

άρα η γενική λύση της ομογενούς.

$y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$.

(γ) $y'' + 2y' + y = 0$

χαρ. εξίσωση $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1$
διπλή ρίζα.

άρα γενική λύση της ομογενούς η $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$.

(9) (α) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$ (1)

<u>Ομογενής</u>: $y'' - 2y' - 3y = 0 \Rightarrow y_{ομ}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

από 8(α).

<u>Ειδική λύση</u> Θεωρώ την $\hat{y}(x) = Ae^{2x}$ (παρατηρήστε ότι το 2 δεν είναι λύση της χ.ε)

τότε $y' = 2Ae^{2x}$ και $y'' = 4Ae^{2x}$

Αντικαθιστώ στην (1) και έχω

$$\cancel{4Ae^{2x}} - \cancel{4Ae^{2x}} - 3Ae^{2x} = 3e^{2x}$$

$\Leftrightarrow$ $A = -1$ και η ειδική λύση είναι

η $\hat{y}(x) = -e^{2x}$

οπότε η γενική λύση της (1) είναι $y(x) = y_{ομ}(x) + \hat{y}(x) \Leftrightarrow$

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - e^{2x}$$

(β) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$ (1)

<u>Ομογενής</u>: $y'' + 9y = 0 \Rightarrow y_{ομ}(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

από 8(β)

<u>Ειδική</u> Θεωρώ την $\hat{y}(x) = (Ax^2 + Bx + Γ)e^{3x} + Δ$.

$$\hat{y}'(x) = (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx + \Gamma)e^{3x}$$
$$= e^{3x}\left(3Ax^2 + (2A + 3B)x + (3\Gamma + B)\right)$$

$$\hat{y}''(x) = (6Ax + 2A + 3B)e^{3x} + e^{3x}\left(9Ax^2 + (6A + 9B)x + 9\Gamma + 3B\right)$$
$$= e^{3x}\left(9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B + 9\Gamma\right)$$

Αντικαθιστώ στην (1) και καταλήγω στο γραμμικό σύστημα συντελεστών.

$$18A = 1 \iff A = \frac{1}{18}$$
$$12A + 9B + 9B = 0 \iff B = -\frac{12}{18}A = -\frac{12}{(18)^2}$$
$$2A + 6B + 9\Gamma + 9\Gamma = 0 \iff \Gamma = -\frac{2}{18}A - \frac{6}{18}B = -\frac{2}{(18)^2} - \frac{6 \cdot 12}{(18)^3}$$
$$9\Delta = 6 \iff \Delta = 2/3$$

άρα $\hat{y}(x) = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{12}{(18)^2}x - \left(\frac{2}{(18)^2} - \frac{6 \cdot 12}{(18)^3}\right)\right)e^{3x} - \frac{2}{3}$

και η γενική λύση της (1) $\Rightarrow y(x) = y_{ομ}(x) + \hat{y}(x)$

(δ) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

<u>Ομογενής</u> $y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

<u>Ειδική</u> Επειδή ο συντελεστής (-1) στο $g(x) = 2e^{-x}$ είναι και ρίζα διπλή της χ.ε. της ομογενούς.

Θεωρώ ως ειδική $\hat{y}(x) = Ax^2 e^{-x}$ αντί της Ae^{-x}

$$\hat{y}' = 2Axe^{-x} - Ax^2 e^{-x}$$

$$\hat{y}'' = 2Ae^{-x} - 2Axe^{-x} - 2Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x}$$

αντικαθιστώ και έχω

$$\cancel{Ax^2e^{-x}} - \cancel{4Axe^{-x}} + 2Ae^{-x} + \cancel{4Axe^{-x}} \cancel{- 2Ax^2e^{-x}}$$

$$+ \cancel{Ax^2e^{-x}} = 2e^{-x} \Leftrightarrow 2A = 2$$

$$\Leftrightarrow A = 1$$

άρα $\hat{y}(x) = x^2 e^{-x}$

και η γενική λύση της (1)

$$y(x) = y_{ομ}(x) + \hat{y}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}$$