Πρόβλημα 1

A. Να λυθεί το γραμμ. σύστημα
$$\begin{cases} x+3y-5z+w=2 \\ 3x+9y-11z+11w=14 \\ -2x-6y+6z-10w=-12 \end{cases}$$

Λύση

$$(A|b)=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 11 & 11 & 14 \\ -2 & -6 & 6 & -10 & -12 \end{array}\right] \underset{R_3\to R_3+2R_1}{\overset{R_2\to R_2-3R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & -8 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_3\to R_3+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x+3y-5z+w=2 \\ 4z+8w=8 \end{array}$$

Έχουμε άπειρες λύσεις με μορφή $z=2-2w$

και $x+3y-10+10w+w=2 \Rightarrow x=12-3y-11w$

Άρα $(x,y,z,w)=(12-3k-11\lambda,\ k,\ 2-2\lambda,\ \lambda)$ $k,\lambda\in\mathbb{R}$.

B. Εξετάστε αν ο $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται και βρ. ο A^{-1}

Λύση

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0\cdot + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 4-2 = 2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ αντιστρέφεται}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}\,A = \frac{1}{2}\,\mathrm{adj}\,A.$$

$$\mathrm{adj}\,A=(A_{ij})^T$$

$$\alpha_{11}=+\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4 \qquad \alpha_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$\alpha_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-4 \qquad \alpha_{22}=+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1$$

$$\alpha_{13}=+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2 \qquad \alpha_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$d_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

$$d_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Γ. Δίνεται ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ να βρ ιδιοτιμές - ιδιοδιανύσματα, εξετάστε αν διαγωνοποιήσιμος και να βρ P^{-1}, Δ διαγ ώστε $A = P\Delta P^{-1}$

Λύση

χαρ. εξίσωση $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = 2$.

απλή (1 ιδιοδιάνυσμα)   διπλή (1 ή 2 ιδιοδιαν.)

$\sigma(A) = \{1, 2\}$

Για $\lambda = 1$: $(A - I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} x_2 = -x_1 \\ x_3 = x_1 \end{matrix} \Rightarrow$ ιδιοχώρος $V_A(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_2 = -x_1 \\ x_3 = x_1 \end{matrix} \right\}$

Βάση του $V_A(1)$ — γεννήτορες του $V_A(1)$ $\to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

— γραμμ. ανεξαρτησία. $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Άρα το ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Για $\lambda = 2$ έχω το $(A - 2I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = 0$ και $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

άρα $V_A(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} : x_1 = 0,\ x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

Βάση του $V_A(2)$ έχω $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

$$\lambda\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\ \lambda\\ k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = k = 0$$

Άρα για $\lambda = 2$ έχω ιδιοδιανύσματα: $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

$\dim V_A(1) = 1$ και $\dim V_A(2) = 2$

$\left.\begin{array}{l} \dim V_A(1) + \dim V_A(2) = 3 = n \\ \text{έχω 3 ιδιοδιανύσματα του } A \end{array}\right\} \Rightarrow A$ διαγωνοποιήσιμος

άρα $\exists P$ αντιστρέψιμος $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και

Δ διαγώνιος $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ώστε $P^{-1}AP = \Delta \Rightarrow A = P\Delta P^{-1}$

$$\Rightarrow A^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$A^{30} = P\Delta^{30}P^{-1} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{30} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{30} \end{bmatrix}P^{-1}$$

Πρέπει να βρω τον $\underline{P^{-1}}$ και να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί.

Πρόβλημα 2

(α) Εξετάστε αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,\frac{e^{n^2}}{(3n)!}$ συγκλίνει

Με κριτήριο λόγου για $a_n = n!\,\frac{e^{n^2}}{(3n)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,\frac{e^{(n+1)^2}}{(3n+3)!}}{n!\,\frac{e^{n^2}}{(3n)!}} = \frac{(n+1)\,e^{(n+1)^2-n^2}}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{2n+1}}{n^3\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}\right)}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{2n+1}}{n^2\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}\right)} =$$

$$f(x) = \frac{e^{2x+1}}{x^2}, \quad x>0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x+1}}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x+1}}{2x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x+1}}{1} = +\infty$$

Άρα $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n+1}}{n^2} = +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{3^3}\right)(+\infty) = +\infty$

άρα η σειρά αποκλίνει

B. Να βρεθεί $k\in\mathbb{R}$ ώστε $\int_0^{+\infty} k\,x^2 e^{-2x}\,dx = 1$. $f(x)$ πυκνότητα της Γάμμα$(3,2)$

$$k\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\,dx = 1.$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2 e^{-2t}\,dt$$

$$\int_0^x t^2 e^{-2t}\,dt = \int_0^x t^2\left(\frac{e^{-2t}}{-2}\right)' dt = \left[-\frac{1}{2}t^2 e^{-2t}\right]_0^x + \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^x \cancel{2}\,t\,e^{-2t}\,dt$$

$$= -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} + \int_0^x t\left(\frac{e^{-2t}}{-2}\right)' dt = -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} + \left[-\frac{1}{2}t\,e^{-2t}\right]_0^x$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\,dt = -\frac{x^2e^{-2x}}{2} - \frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{1}{4}\left[e^{-2t}\right]_0^x$$

$$= -\frac{x^2e^{-2x}}{2} - \frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2e^{-2t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2e^{-2x}}{2} - \frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-2x} \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2e^{2x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x} \overset{(0\cdot\infty)}{=} \dots = 0$$

Άρα $k\cdot\frac{1}{4} = 1 \Rightarrow k = 4$

<u>Γάμμα κατανομή</u> Γάμμα $(3,2) \Rightarrow f(x) = \frac{2^3}{\Gamma(3)}x^{3-1}e^{-2x}$

$\frac{2^3}{2} = 4$

<u>ολοκλήρωμα Γάμμα</u>

<u>$\Gamma(n+1) = n!$</u>

Γ. $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x, \; x > 0$

Να μελετήσει η f ως προς μονοτονία και ακρότατα, κυρτότητα και να σχεδ. η C_f

Να αποδείξετε ότι η $f(x) = 0$ ακριβώς μία ρίζα.

Να βρείτε και το $\int_{1/2}^{1} \sqrt{x}\, f(x)\, dx$

Λύση

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2} + 1\right)$$

$$f''(x) = \left(x^{-1/2}\left(\tfrac{1}{2}\ln x + 1\right)\right)' = -\tfrac{1}{2}x^{-3/2}\left(\tfrac{1}{2}\ln x + 1\right) + \frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$= x^{-3/2}\left(-\frac{1}{4}\ln x \cancel{-\tfrac{1}{2}} \cancel{+\tfrac{1}{2}}\right)$$

$$= -\frac{x^{-3/2}\ln x}{4}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{2} + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -2 \Leftrightarrow x > e^{-2}$

x	0		e^{-2}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ο.Ε

$f(e^{-2}) = \sqrt{e^{-2}}\,\ln e^{-2}$
$= e^{-2/2}(-2) = -2e^{-1}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\overset{>0}{x^{-3/2}}\ln x}{4} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

f'	0		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f		$\cup$		$\cap$	

Σκ. $(1, f(1)) = (1, 0)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x \overset{0(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} \overset{\infty/\infty}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -2x^{1/2} = 0$$

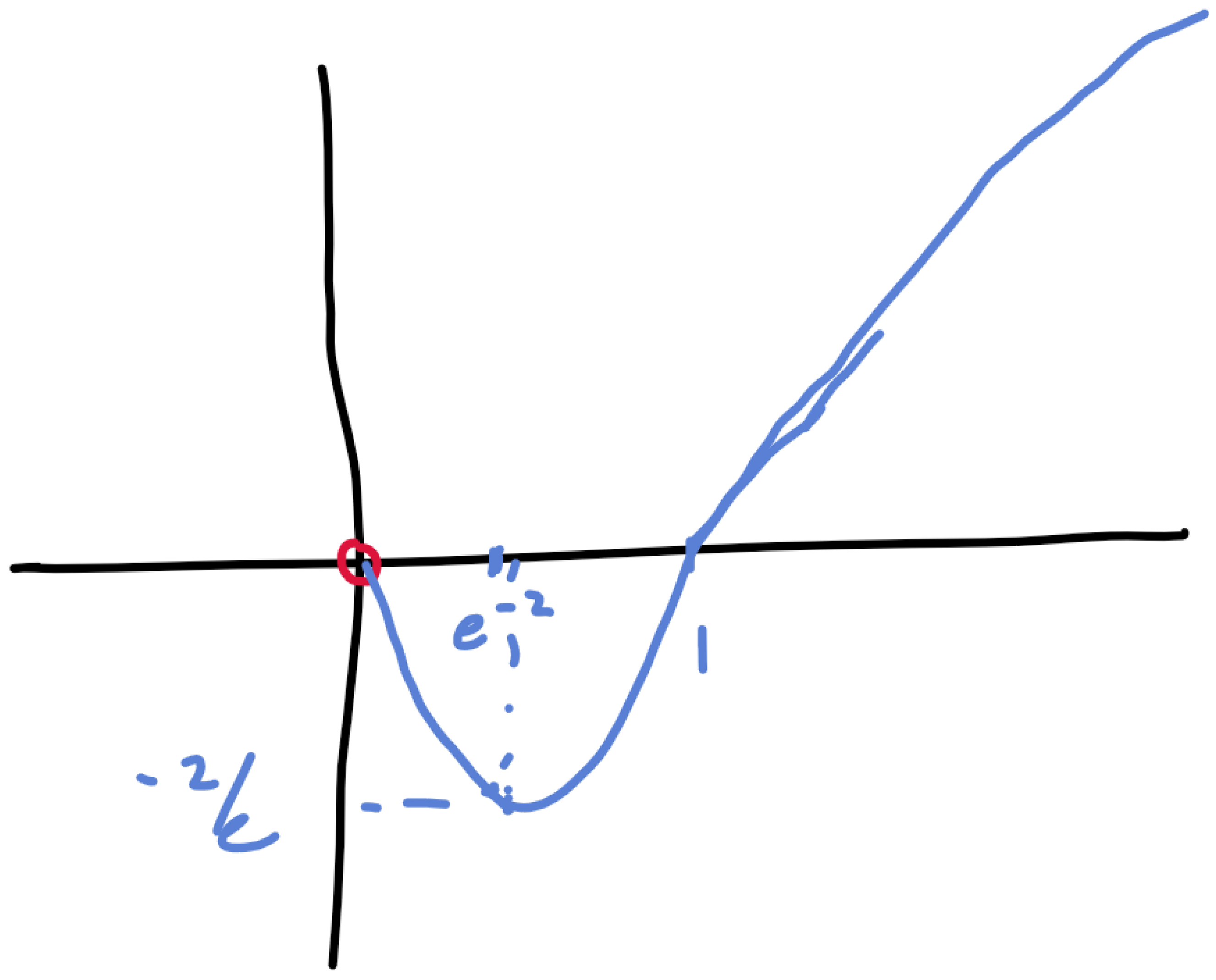
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \ln x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ [illegible] $+\infty$

Η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
f''		$+$		$+$	0	$-$	
f'		$-$	0	$+$		$+$	
f	0	$\searrow$	$-2/e$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$
			ΟΕ		ΣΚ		



$f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x=1$

Η f είναι συνεχής

$$f\left((0,e^{-2}]\right) \overset{f\searrow}{=} \left[f(e^{-2}), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = \left[-2/e, 0\right)$$

$$f\left([e^{-2},+\infty)\right) \overset{f\nearrow}{=} \left[f(e^{-2}), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = \left[-2/e, +\infty\right)$$

$$f(0,+\infty) = f\left((0,e^{-2}]\right) \cup f\left([-2/e,+\infty)\right) = \left[-2/e,+\infty\right)$$

$0 \in f(0,+\infty) \Rightarrow$ η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα

$$\int_{1/2}^{1} \sqrt{x}\, f(x)\, dx = \int_{1/2}^{1} (\sqrt{x})^2 \ln x\, dx = \int_{1/2}^{1} x \ln x\, dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\, dx = \left[\frac{x^2 \ln x}{2}\right]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx$$

$$= 0 - \frac{1}{8}\ln \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= +\frac{1}{8}\ln 2 - \frac{3}{16}$$

Πρόβλημα 3

A. Να λυθεί το ΠΑΤ $y' = \dfrac{e^{-y}(\ln x)^2}{x}$, $x>1$, $y(e)=0$

Λύση $e^y\,dy = \dfrac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ Χωριζόμενων Μεταβλητών

Ολοκληρώνω κατά μέλη $\int e^y\,dy = \int \dfrac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

$$\Rightarrow e^y = \frac{(\ln x)^3}{3} + c \quad \text{πεπλεγμένη λύση}$$

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx \overset{\substack{u=\ln x \\ du = \frac{dx}{x}}}{=} \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(\ln x)^3}{3} + c$$

$x = e$, $y = 0$

Πρέπει να βρω c ώστε $y(e)=0$

$$e^0 = \frac{(\ln e)^3}{3} + c \Rightarrow 1 = 1/3 + c \Rightarrow c = 2/3$$

Άρα $e^y = \dfrac{(\ln x)^3}{3} + \dfrac{2}{3}$ είναι η λύση του ΠΑΤ

$$\Rightarrow y = \ln\left(\frac{(\ln x)^3}{3} + 2/3\right)$$

B. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$ Μη ομογενής γραμμ. 2ης τάξης με σταθ. συντελεστές

ΟΜΟΓΕΝΗΣ $y'' + 2y' + y = 0$

Χ.Ε. $r^2 + 2r + 1 = 0$

$(r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1$

Γενική λύση. $y = \underset{\text{Χ.Ε.}}{y_{ομ}} + \underset{\text{προσδ. συντελ.}}{\hat{y}}$

Άρα $y_{ομ} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

Προσδιορισμός της $\hat{y}$: Παρατηρούμε ότι ο σταθερός όρος είναι $\underline{\underline{4e^{-x}}}$

$$\hat{y} = A x^2 e^{-x}$$

$4e^{-2x}$

$\downarrow$

$\tilde{y} = Ae^{-2x}$

Προσδιορίζουμε τον A με αντικατάσταση της $\hat{y}$ στην μη ομογενή.

$\hat{y}' = 2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x}$ $\qquad$ $\hat{y}'' = 2Ae^{-x} - 2Axe^{-x} - 2Axe^{-x} + Ax^2e^{-x}$

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$2Ae^{-x} - \cancel{4Axe^{-x}} + \cancel{Ax^2e^{-x}} + \cancel{4Axe^{-x}} - \cancel{2Ax^2e^{-x}} + \cancel{Ax^2e^{-x}} = 4e^{-x}$$

$$2A = 4 \Leftrightarrow \boxed{A = 2}$$

$\hat{y} = 2x^2e^{-x}$ και $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + 2x^2e^{-x}$