ΜΑΠ - Επισκόπηση Μαθηματικών

1$^{\eta}$ Σειρά Ασκήσεων – Οκτώβριος 2020

Επισκόπηση Γραμμικής Άλγεβρας

1 Πίνακες

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω:

   (α) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   (β) $3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (γ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T$

   (δ) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

2. Σε κάθε περίπτωση να βρείτε τις τιμές των s και t ώστε οι πίνακες να είναι συμμετρικοί:

   (α) $\begin{bmatrix} 1 & s \\ -2 & t \end{bmatrix}$

   (β) $\begin{bmatrix} 2 & s & t \\ 2s & 0 & s+t \\ 3 & 3 & t \end{bmatrix}$

3. Να βρεθεί πίνακας A ώστε $\left(2A^T - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)^T = 4A - 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

4. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός και ο $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός για κάθε τετραγωνικό πίνακα A.

5. Να βρεθούν τα παρακάτω γινόμενα:

   (α) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 2}$

   (β) $\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{3\times 1}$

   (γ) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{3\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -7 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}}_{3\times 2}$

6. Να βρεθούν όλα τα δυνατά μεταξύ τους γινόμενα, π.χ. A^2, AB, AC, κτλ. των πινάκων

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

7. Να αποδείξετε τα παρακάτω:

   (α) Αν οι A και B αντιμετατίθονται με τον πίνακα C, τότε το ίδιο ισχύει και για τον $A+B$

   (β) Για κάθε πίνακα A, οι AA^T και A^TA είναι συμμετρικοί.

   (γ) Αν A και B συμμετρικοί, τότε ο AB συμμετρικός αν και μόνο αν οι A και B αντιμετατίθονται.

   (δ) Για τετραγωνικούς $n \times n$ πίνακες A και B ισχύει ότι:

$$AB = BA \text{ αν και μόνο αν } (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

2 Ορίζουσες

8. Να βρεθούν οι ορίζουσες των παρακάτω πινάκων

   (α) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

   (β) $B = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$

   (γ) $C = \begin{bmatrix} 1^+ & 2^- & 3^+ \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

   (δ) $D = \begin{bmatrix} 1^+ & b^- & c^+ \\ b & c & 1 \\ c & 1 & b \end{bmatrix}$

   (ε) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

   (στ) $F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

9. Αν $G = \begin{bmatrix} p+x & q+y & r+z \\ a+x & b+y & c+z \\ a+p & b+q & c+r \end{bmatrix}$ και $H = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}$ να δείξετε ότι $\det(G) = 2\det(H)$.

10. Να βρεθεί ο $adj\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}\right)$

11. Να βρεθεί η τιμή του c ώστε ο $\begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & 2 & c \\ -1 & c & 5 \end{bmatrix}$ να είναι αντιστρέψιμος.

12. Να λύσετε τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο Cramer

   (α) $\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & + & 7y & = & -2 \end{array}$

   (β) $\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & y & - & z & = & -7 \\ 2x & - & y & - & 2z & = & 6 \\ 3x & & & + & 2z & = & -7 \end{array}$

13. Να αποδείξετε τα παρακάτω:

(α) Για οποιουσδήποτε δύο τετραγωνικούς A και B ισχύει ότι $\det(AB) = \det(BA)$.

(β) Αν για τον πίνακα A ισχύει $A^k = 0$ για κάποιο $k \geq 1$, να αποδείξετε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(γ) Δεν υπάρχει 3×3 πίνακας A τέτοιος ώστε $A^2 + I = 0$.

(δ) Για οποιουσδήποτε δύο τετραγωνικούς A και B ισχύει ότι $\det(A + B^T) = \det(A^T + B)$.

3 Γραμμικά Συστήματα - Απαλοιφή Gauss

14. Να λύσετε τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με απαλοιφή Gauss

(α)

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & 1 \\ 2x & - & 7y & = & 3 \end{array}$$

(β)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 2 \end{array}$$

(γ)

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 5 \\ -12x & + & 8y & = & -20 \end{array}$$

(δ)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 10 \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & -5 \\ x & + & 6y & + & 3z & = & 15 \end{array}$$

15. Να βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη που ικανοποιούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να είναι συμβιβαστό.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ 2x & + & y & + & 3z & = & b \\ x & - & 4y & + & 9z & = & c \end{array}$$

16. Να βρεθεί η τιμή του α σε κάθε περίπτωση ώστε τα παρακάτω ομογενή συστήματα να έχουν και μη τετριμένες λύσεις οι οποίες και να βρεθούν:

(α)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & \alpha y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

(β)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & \alpha y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 0 \end{array}$$

4 Αντίστροφος Πίνακας

17. Εξετάστε αν οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθεί ό αντίστροφος είτε με τον προσαυξημένο πίνακα (adj) είτε με μέθοδο Gauss

(α) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(β) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

18. Επαληθεύστε για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ότι ικανοποιεί την ισότητα $A^2 - 3A + 2I = 0$, και χρησιμοποιήστε την για να αποδείξετε ότι $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

19. Για τετραγωνικό πίνακα A, αν ισχύει ότι $A^2 = 0$, να αποδείξετε ότι $(I - A)^{-1} = I + A$.

5 Διανύσματα

20. Να βρεθεί το $\|v\|$ των παρακάτω διανυσμάτων:

(α) $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(β) $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(γ) $v = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

21. Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα στη κατεύθυνση του $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

22. Να βρεθούν οι τιμές των a, b, c ώστε το διάνυσμα $y = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. ($y = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w$)

6 Γραμμικοί Χώροι - Γραμμική Ανεξαρτησία - Βάση - Τάξη Πίνακα

23. Εξετάστε ποιοί από τους παρακάτω γραμμικούς χώρους είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$:

$$U=\{\begin{bmatrix}1\\s\\t\end{bmatrix}: s \text{ και } t\in\mathbb{R}\},\ ,U=\{\begin{bmatrix}r\\s\\t\end{bmatrix}: r,s \text{ και } t\in\mathbb{R},\ -r+3s+2t=0\}.$$

24. Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:
   (α) $\{(1,-1,0),(3,2,-1),(3,5,-2)\}$ στον $\mathbb{R}^3$.
   (β) $\{(1,-1,0),(3,2,-1),(3,5,-2)\}$ στον $\mathbb{R}^3$.

25. Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του σπαν$\{(1,-1,2,0),(2,3,0,3),(1,9,-6,6)\}$ υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$.

26. Να βρεθεί μία βάση του χώρου γραμμών και η τάξη του πίνακα $A=\begin{bmatrix}2&-4&6&8\\2&-1&3&2\\4&-5&9&10\\0&-1&1&2\end{bmatrix}$.

7 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα Πίνακα Διαγωνοποίηση Πίνακα - Τετραγωνικές Μορφές

26. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, καθώς και (αν υπάρχει) έναν αντιστρέψιμο πίνακα P ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος
   (α) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}$
   (β) $A=\begin{bmatrix}7&0&-4\\0&5&0\\5&0&-2\end{bmatrix}$
   (γ) $A=\begin{bmatrix}1&1&-3\\2&0&6\\1&-1&5\end{bmatrix}$
   (δ) $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&6&-6\\1&2&-1\end{bmatrix}$

27. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A έχει ιδιοτιμή τη $\lambda=0$ αν και μόνο αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

28. Για $n\times n$ τετραγωνικό πίνακα A, να αποδείξετε τα παρακάτω
   (α) ο A διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο A^T είναι διαγωνοποιήσιμος.
   (β) Για $r\neq 0$ οι ιδιοτιμές του rA είναι οι $r\lambda$, όπου λ ιδιοτιμή του A.

29. Για A αντιστρέψιμο $n\times n$ πίνακα
   (α) να αποδείξετε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι μη μηδενικές.
   (β) να αποδείξετε ότι οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι οι αριθμοί $1/\lambda$, όπου λ ιδιοτιμή του A.

30. Να βρεθεί η τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί σε κάθε έναν από τους παρακάτω συμμετρικούς πίνακες και να τη χαρακτηρίσετε (θετικά (αρνητικά) (ημί)ορισμένη).
   (α) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-2\end{bmatrix}$
   (β) $B=\begin{bmatrix}1&\frac{-1}{2}&2\\\frac{-1}{2}&1&0\\2&0&-\sqrt{2}\end{bmatrix}$