

ΜΑΠ - Επισκόπηση Μαθηματικών
2^η Σειρά Ασκήσεων – Νοέμβριος 2020
Επισκόπηση Ανάλυσης

1 Βασικές Έννοιες στις Συναρτήσεις

Να γίνουν οι παρακάτω ασκήσεις από τα συγγράμματα που σας έχουν προταθεί:

1. Από το βιβλίο των Pemberton and Rau
 - α. Κεφάλαιο 3: Η άσκηση 3.3 σελ. 51
 - β. Κεφάλαιο 4: Οι ασκήσεις 4.1.3 (σελ. 60), 4.2.2, 4.2.6 (σελ. 64-65), 4.3.3 (σελ. 67) και το Πρόβλημα 4.3 (σελ. 68)
2. Από το βιβλίο των Τουμπή και Γκιτζένη δείτε τις Ασκήσεις από το Κεφάλαιο 2: 2.4, 2.5, 2.9 και 2.15

2 Φράγματα - Ακολουθίες - Σειρές

3. Να βρεθούν τα sup , inf , max και min (αν υπάρχουν) των παρακάτω συνόλων:
 $(0, 1]$, $[0, 1)$, $\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\}$ και του $A = \{x : (x - \sqrt{2})(x - 3) \leq 0\}$.
4. Να βρεθούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών
 - (α) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^3+n^2+1}$.
 - (β) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n}$.
 - (γ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n}$.
 - (δ) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n^2}$.
 - (ε) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n^{10} + 20}{(n+1)^2}$.
5. Να εξετάσετε τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών.
 - (α) $\sum \frac{\cos \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n} + 1}$. (Εξετάστε τη σύγκλιση της $a_n = \frac{\cos \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n} + 1}$.)
 - (β) $\sum \frac{1}{n^5 - n^3 + 2}$. (Κριτήριο σύγκρισης με την $b_n = \frac{1}{n^2}$)
 - (γ) $\sum \sin(e^{-n})$. (με Κριτήριο Λόγου).
 - (δ) $\sum n! \frac{\exp\{n^2\}}{(3n)!}$. (με Κριτήριο Λόγου)
 - (ε) $\sum \exp\{-\frac{1+n^2 \log n}{n}\}$. (με Κριτήριο Ρίζας)
 - (στ) $\sum \log \frac{1}{n^2}$. (Εξετάστε τη σύγκλιση της $a_n = \log \frac{1}{n^2}$)

3 Όριο Συνάρτησης

6. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x}{x^3 + x^2 + x}$$

7. Να αποδείξετε με χρήση του ορισμού του ορίου ότι

- (α) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$.
- (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{x+5} = 10$.

8. Να αποδείξετε με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής τα παρακάτω:

(α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και μία συνάρτηση $g(x)$ φραγμένη ($|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ και $M > 0$), τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$. (όριο μηδενικής · φραγμένη)

(β) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και μία συνάρτηση $g(x)$ φραγμένη ($|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ και $M > 0$), τότε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)^n} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4 Συνέχεια και Παραγωγισιμότητα Συνάρτησης

9. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & 0 < x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και ότι $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

10. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \alpha, & x \leq 0 \\ e^{\beta x}, & x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

5 Θεώρημα Μέσης Τιμής - Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης - Σύνολο Τιμών

11. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(γ) Να αποδείξετε ότι $xf'(x) < f(x) + \ln 2$ για κάθε $x > 0$.

12. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, $0 < \alpha \neq 1$.

(α) Αν $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

(β) Για $\alpha = e$ να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

(γ) Να αποδείξετε ότι για $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, η εξίσωση

$$\frac{f(\beta) - 1}{\beta - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{\gamma - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$.

13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$.

(α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

(β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της f με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $k \in (x_1, x_2)$ τέτοιος ώστε $kf'(k) - f(k) = 0$.

6 Χάραξη Γραφικής Παράστασης

14. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι παρακάτω συναρτήσεις

(α) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$.

(β) $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(α) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

(β) Να αποδείξετε ότι $a^{a+1} > (a+1)^a$ για κάθε $a > e$.

16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - \lambda x$, $\lambda > 0$.

(α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της.

(β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

7 Ολοκληρώματα

17. Να υπολογιστούν τα παρακάτω άοριστα ολοκληρώματα

(α) $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx$.

(β) $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6} dx$.

(γ) $\int \frac{2}{x^2-1} dx$.

(δ) $\int \frac{1+x-x^2}{(1-x^2)^3} dx$.

(ε) $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$.

(στ) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

(ζ) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$.

(η) $\int e^x \cos 2x dx$.

18. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα

(α) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

(β) $\int_{-2}^2 \frac{e^x - e^{-x}}{1+x^2} dx$.

19. Να βρεθεί το $I = \int_0^3 f(x) dx$ της

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \in [1, 2] \\ (2-x)^2, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

20. Να αποδείξετε ότι

$$1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e.$$

21. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3}$$

22. Να υπολογιστούν τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα (αν υπάρχουν):

(α) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx.$

(β) $\int_0^{+\infty} 3e^{-3x} dx.$

(γ) $\int_0^{+\infty} 9x^2 e^{-3x} dx.$