

ΜΑΠ - Επισκόπηση Μαθηματικών
3^η Σειρά Ασκήσεων – Νοέμβριος 2020
Επισκόπηση Διαφορικών Εξισώσεων και Βελτιστοποίηση

1 Γραμμικές ΣΔΕ 1ης Τάξης

1. Να λυθούν οι παρακάτω ΣΔΕ 1ης τάξης ή τα αντίστοιχα ΠΑΤ:

(α) $(1 + t^2)y' - 2ty = 2t(1 + t^2), t \in \mathbb{R}.$

(β) $ty' + y = e^t, y(1) = 1.$

2. Θεωρήστε το ΠΑΤ $y' + \frac{1}{4}y = 3 + 2\cos(2t), y(0) = 0.$

Να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ και να εξεταστεί η συμπεριφορά της για $t \rightarrow \infty.$

3. Να αποδείξετε ότι αν α, λ θετικές σταθερές και b οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός τότε κάθε λύση της εξίσωσης $y' + \alpha y = be^{-\lambda t}$ έχει την ιδιότητα $y \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty.$

2 Μη Γραμμικές ΣΔΕ 1ης Τάξης

4. Να λυθούν οι παρακάτω ΣΔΕ 1ης τάξης ή τα αντίστοιχα ΠΑΤ:

(α) $y' + y^2 \sin x = 0, x \in \mathbb{R}.$

(β) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}, y(0) = 1.$

5. Να λυθεί η ΣΔΕ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$ (ομογενής εξίσωση).

6. Να λυθούν οι παρακάτω ΣΔΕ (Εξίσωση Bernoulli)

(α) $x^2 y' + 2xy - y^3 = 0.$

(β) $xy' + y - y^2 e^{2x} = 0.$

7. Να λυθεί η ΣΔΕ $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2, y_1(x) = \frac{1}{x}.$ (εξίσωση Ricatti).

3 Γραμμικές ΣΔΕ 2ης Τάξης με σταθερούς συντελεστές

8. Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές ομογενείς ΣΔΕ 2ης τάξης

(α) $y'' - 2y' - 3y = 0.$

(β) $y'' + 9y = 0.$

(γ) $y'' + 2y' + y = 0$

9. Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές ΣΔΕ 2ης τάξης με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών

(α) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}.$

(β) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6.$

(γ) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}.$