Ανισοτητα του Young

$p>1, q>1$, (1) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (p,q συζυγεις)

(2) $|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q$

Απ

Χωρις βλαβη της γενικοτητος $a \geq 0$, $b \geq 0$

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Θεταμε $\alpha = p-1$, $\beta = q-1$

(1) $\iff \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \iff \frac{p}{q} = p-1 , \quad \frac{q}{p} = q-1$

$$\therefore \quad \alpha\beta = 1$$

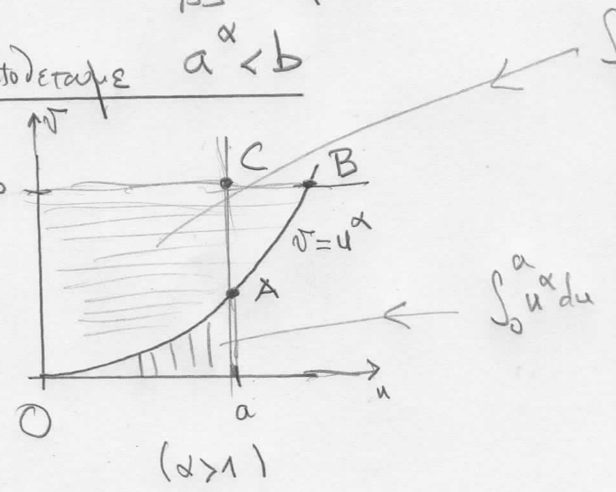
Εχουμε δυο περιπτωσεις:

(I) $a^\alpha \leq b$

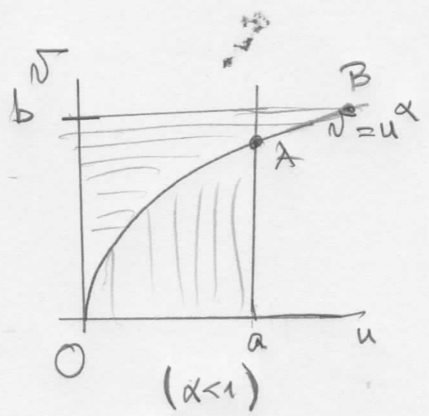
(II) $a^\alpha > b$

Παρατηρουμε οτι (II) $\iff a > b^{1/\alpha} \iff a > b^\beta$, που ειναι η (I) για εαν a, b αλλαξουν ρολους.

Υποθεταμε $a^\alpha < b$



$(\alpha>1)$



$(\alpha<1)$

$\int_0^a u^\alpha du = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{a^p}{p}$, Εμβαδον OaA

$\int_0^b v^{\frac{1}{\alpha}} dv = \int_0^b v^\beta dv = \frac{b^{\beta+1}}{\beta+1} = \frac{b^q}{q}$, Εμβ. ObB

Προφανως Εμβ OaA + Εμβ ObB > ab

$\int_0^a u^\alpha du = \frac{a^p}{p}$, Εμβαδον OaA

$\int_0^b v^{\frac{1}{\alpha}} dv = \frac{b^q}{q}$, Εμβαδον ObB

Προφανως |OaA| + |ObB| > ab

∎