1.1.4. Τριγωνική Ανισότητα. *Για* $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|x+y| \le |x| + |y|.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $y = \lambda x$ *ή* $x = \lambda y$ *για κάποιο* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \ge 0$.

Απόδειξη. Οι αποδεικτέοι ισχυρισμοί έπονται από τις ταυτότητες

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2(x \cdot y) \text{ και } (|x|+|y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|,$$

και την ανισότητα των *Cauchy-Schwarz*.

Παραλλαγές της Τριγωνικής Ανισότητας.

1. $|x-y| \le |x-z| + |z-y|$ ($x, y, z \in \mathbb{R}^n$).

2. $|x-y| \le |x| + |y|$ και $\big||x|-|y|\big| \le |x-y|$.

3. $|v_1 + v_2 + \cdots + v_m| \le |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_m|$, για $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$.

1.1.5. Ταυτότητα του Lagrange.

Για $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *και* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *στον* $\mathbb{R}^n$,

$$|x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j\right)^2 = \sum_{1\le j<k\le n} (x_j y_k - x_k y_j)^2 .$$

Απόδειξη. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε:

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j\right)^2 = \sum_{1\le j,k\le n} x_j^2 y_k^2 - \sum_{1\le j,k\le n} x_j y_j x_k y_k$$

$$= \left(\sum_{1\le j\le n} x_j^2 y_j^2 + \sum_{1\le j<k\le n} x_j^2 y_k^2 + \sum_{1\le j<k\le n} x_k^2 y_j^2\right)$$

$$- \left(\sum_{1\le j\le n} x_j y_j x_j y_j + \sum_{1\le j<k\le n} x_j y_j x_k y_k + \sum_{1\le j<k\le n} x_k y_k x_j y_j\right)$$

$$= \sum_{1\le j<k\le n} x_j^2 y_k^2 + \sum_{1\le j<k\le n} x_k^2 y_j^2 - 2\sum_{1\le j<k\le n} x_j y_k x_k y_j = \sum_{1\le j<k\le n} (x_j y_k - x_k y_j)^2 .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.1

1. Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\left||x|^2 y - (x \cdot y)x\right|^2 = |x|^2\left(|x|^2|y|^2 - |x \cdot y|^2\right) \text{ (για } x, y \in \mathbb{R}^n\text{)}$$

και δώστε μια εναλλακτική απόδειξη των ισχυρισμών της §1.1.3.

2. Δείξτε ότι αν $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ και $v_j \cdot v_k = 0$ για κάθε $j < k$, τότε

$$|v_1 + v_2 + \cdots + v_m|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_m|^2$$

3. Ποιά είναι η σχέση της ανισότητας των *Cauchy-Schwarz* (συμπεριλαμβανομένης της περίπτωσης της ισότητας) με την ταυτότητα του *Lagrange*;

4. Αν $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ και

$$|v_1 + v_2 + \cdots + v_m| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_m|,$$

τί συμπέρασμα βγάζετε;

5. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχουν $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $v_j \neq 0$ για κάθε j και $v_j \cdot v_k = 0$ για κάθε $j < k$, δείξτε ότι $m \leq n$.

6. Δείξτε ότι για $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2$.

7. Δείξτε ότι αν $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_j > 0$, και $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ τότε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq n^2.$$

8. Υπολογίστε το

$$\min\{x_1^{16} + x_2^{16} + \cdots + x_n^{16} : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \ \mu\varepsilon \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}.$$

9. Δοθέντων $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, υπολογίστε το

$$\max\{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \ \mu\varepsilon \ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Γενικότερα υπολογίστε το

$$\max\{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n : \mu\varepsilon \ \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \cdots + \lambda_nx_n^2 = 1\}$$

όταν οι αριθμοί $\lambda_j > 0$, είναι επίσης δοσμένοι. Ακόμη γενικότερα υπολογίστε το

$$\max\{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n : \mu\varepsilon \ \lambda_1x_1^{2m_1} + \lambda_2x_2^{2m_2} + \cdots + \lambda_nx_n^{2m_n} = 1\},$$

με δοσμένους $m_j \in \mathbb{N}$.

10. Δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$

11. Είναι σωστό ότι $\left|\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\right| \leq \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2}$;

Είναι σωστό ότι

$$\left|\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} - \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}\right| \leq \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2};$$

1.2 Το $xy-$επίπεδο και ο $xyz-$χώρος

Όπως τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ αντιστοιχούν στα σημεία της ευθείας, έτσι τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχούν στα σημεία του επιπέδου, τα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ αντιστοιχούν στα σημεία του χώρου, κ.ο.κ. Η πράξη της πρόσθεσης στον $\mathbb{R}^n$ σχετίζεται με την γεωμετρική έννοια της **παραλληλίας** και ο αριθμητικός