

Επιλέξτε f κατάλληλο πολυώνυμο έτσι ώστε να υπάρχουν ακριβώς 3 περιστασιακές λύσεις για $\varepsilon \ll 1$. Για το παράδειγμα που θα κατασκευάσετε ερευνηθείτε την ευστάθεια των περιοδικών λύσεων.

18 (X. Ιοακίμ) Θεωρείστε την εξίσωση τύπου Van der Pol

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon[16\dot{x}^5 - 80\dot{x}^3 + 175\dot{x}](1 - x^2)$$

Δείξτε ότι για $\varepsilon \ll 1$ (π.χ. $\varepsilon=0.001$) έχουμε 3 οριακούς κύκλους, 2 ευσταθείς με πλάτη $x_1^2 + x_2^2 = 4 + O(\varepsilon)$ και $x_1^2 + x_2^2 = 7 + O(\varepsilon)$ και έναν ευσταθή με πλάτος $x_1^2 + x_2^2 = 5 + O(\varepsilon)$.

2 Αλγεβρικές Εξισώσεις

2.1 Κλίμακες και το πολύγωνο του Νεύτωνα

Το ΘΠΣ δίνει ύπαρξη λύσεων της

$$F(x, y) = 0 \quad (\text{ή } F(z, w) = 0) \quad (21)$$

κάτω από υποθέσεις σε περιοχή σημείου $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας) που ικανοποιεί την εξίσωση, $F(x_0, y_0) = 0$. Στην περίπτωση που η F είναι πολυώνυμο 2 μεταβλητών, ή γενικότερα

$F : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ αναλυτική ως προς 2 μεταβλητές σε περιοχή του $(0, 0)$ της μορφής (βλ. υπόμνημα θεώρημα προπαρασκευής του Weierstrass)

$$F(z, w) = w^k + a_{k-1}(z)w^{k-1} + \dots + a_0(z) \quad (22)$$

$$a_j(z) = a_j^{(p_j)} z^{p_j} + a_j^{(p_j+1)} z^{p_j+1} + \dots$$

$$a_0^{(p_0)} \neq 0, \quad a_j^{(p_j)} \neq 0$$

όπου $a_j(z)$ αναλυτικές μιγαδικές συναρτήσεις $j = 0, 1, \dots, k-1$

Οι υποθέσεις του ΘΠΣ προφανώς δεν ικανοποιούνται διότι $F_w(0, 0) = 0$. Παρόλα αυτά, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε όλες τις λύσεις $w = f_l(z)$ σε περιοχή του $(0, 0)$, $l = 1, \dots, k$.

Σημ: $f_l(z)$ δεν είναι αναβαθμική συνάρτηση του z , αλλά κλάσμα που διαβαθμίζει τα z ($z^{1/3}$ κ.χ.). Προφανώς $l=1, \dots, k$ διότι η F , ως προς w , είναι βαθμωτό k βαθμίου.

Παρατήρηση 2.1 *Εν γένει ενδιαφερόμαστε για πραγματικές λύσεις όταν η (21) είναι της μορφής $F(\varepsilon, y) = 0$ (ή $F(\lambda, y) = 0$) όπου ε, λ πραγματικές παράμετροι. Ως γνωστόν όμως από την περίπτωση του τριωνύμου, η μιγαδοποίηση του προβλήματος είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος μελέτης των πραγματικών ριζών.*

Παρατήρηση 2.2 *Το ΘΠΣ ισχύει για $x, y \in \mathbb{C}$ με αντίστοιχες υποθέσεις και αντίστοιχα συμπεράσματα (η συνθήκη $F_y \neq 0$ αντικαθίσταται από $F_w \neq 0$ όπου $\frac{\partial F}{\partial w}$ η μιγαδική παράγωγος) και θα το πάρουμε ως δεδομένο.*

Εάν η F έχει περισσότερη ομαλότητα, αντίστοιχη ομαλότητα έχει και η f . Ειδικά, εάν η F είναι αναλυτική, τότε η f είναι επίσης αναλυτική.

Παράδειγμα 2.3 *Να μελετηθούν οι λύσεις της*

$$w^2 + a_0^{(1)}z + a_0^{(3)}z^3 = 0, \quad a_0^{(1)} \neq 0 \quad (23)$$

σε περιοχή του $(0,0)$.

Προφανώς, $(z,w)=(0,0)$ είναι λύση. ^{Αναζητούμε} ~~Θέτουμε~~ $w=f(z)$. Παρατηρούμε ότι για $|z| \ll 1$, η (23) προσεγγίζεται από στην

$$w^2 + a_0^{(1)}z = 0, \quad a_0^{(1)} \neq 0 \quad (24)$$

που έχει λύσεις

$$w = \pm (-a_0^{(1)})^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}.$$

Αναζητάμε λοιπόν για την (23) λύσεις της μορφής

$$w = v(z)z^{\frac{1}{2}}, \quad v(0) \neq 0 \quad (25)$$

όπου $v(z)$ συνάρτηση υπό προσδιορισμό, δηλαδή εισάγουμε την αλλαγή μεταβλητών $w = v z^{\frac{1}{2}}$.

Αντικατάσταση της (25) στην (23) δίνει κατόπιν απλοποίησης

$$v^2 + a_0^{(1)}v + a_0^{(3)}z^2 = 0$$

από όπου προκύπτει ότι

$$v_{\pm}(z) = \pm \left(-a_0^{(1)} - a_0^{(3)}z^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

και κατά συνέπεια η

$$w_{\pm}(z) = v_{\pm}(z)z^{\frac{1}{2}}$$

δίνει τις λύσεις της (23).

Σχόλιο 2.4 Η βασική ιδέα του Παραδείγματος είναι η εισαγωγή της κλίμακας $z^{\frac{1}{2}}$.

(iii) Αναμένουμε ότι οι λύσεις της (21) με F όπως στην (22), είναι δυναμοσειρές με κλασματικές δυνάμεις. Αυτό συμβαίνει να ισχύει και μάλιστα η κλάση της F που είναι δυναμοσειρές με κλασματικές δυνάμεις (πεπερασμένο αριθμό αρνητικών) είναι αλγεβρικά κλειστή κάτω από αυτή τη διαδικασία ([W], σελ. 98).

Παράδειγμα 2.5 Να μελετηθούν οι λύσεις της

$$w^3 + a_2^{(1)}zw^2 + a_1^{(3)}z^3w + a_0^{(4)}z^4 = 0, \quad a_i^{(j)} \neq 0 \quad (26)$$

σε περιοχή του $(0,0)$, $i = 0, 1, 2, j = 1, 3, 4$.

Υποκινούμενοι από την (25) αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$w = v(z)z^{\alpha} \quad (27)$$

όπου α υπό προσδιορισμό. Αντικατάσταση της (27) στην (26) δίνει

$$z^{3\alpha}v^3 + a_2^{(1)}z^{2\alpha+1}v^2 + a_1^{(3)}z^{3+\alpha}v + a_0^{(4)}z^4 = 0, \quad |z| \leq \delta \quad (28)$$

Προφανώς χρειαζόμαστε το α να είναι τέτοιο ώστε τουλάχιστον δύο όροι να έχουν την ίδια δύναμη για να αλληλοαναιρούνται.

Έχουμε λοιπόν τη μέθοδο εξισορρόπησης:

(1) $3\alpha = 2\alpha + 1$	(4) $2\alpha + 1 = \alpha + 3$	
(2) $3\alpha = \alpha + 3$		(5) $2\alpha + 1 = 4$
(3) $3\alpha = 4$		(6) $3 + \alpha = 4$

Η (1) δίνει $\alpha=1$, με εκθέτες $(3,3,4,4)$ και η (31) παίρνει τη μορφή

$$z^3v^3 + a_2^{(1)}z^3v^2 + a_1^{(3)}z^4 + a_0^{(4)}z^4 = 0,$$

που μετά από απλοποίηση δίνει

$$v^3 + a_2^{(1)}v^2 + a_1^{(3)}z + a_0^{(4)}z = 0. \quad (29)$$

Η (29) για $z = 0$ δίνει $v = -a_2^{(1)}$. Τώρα κάνουμε χρήση του ΘΠΣ: Θέτουμε

$$\begin{cases} F(z, v) = v^3 + a_2^{(1)}v^2 + a_1^{(3)}z + a_0^{(4)}z \\ F(0, -a_2^{(1)}) = 0 \\ F_v(0, -a_2^{(1)}) = (a_2^{(1)})^2 \end{cases}$$

εχόμε

Από τις υποθέσεις μας ότι $F_v(0, -a_2^{(1)}) \neq 0$, παίρνουμε $v_1(z)$ αναλυτική να επιλύει την (29) με $v_1(0) = -a_2^{(1)}$.

Εν συνεχεία θεωρούμε την (2) που δίνει $\alpha = \frac{3}{2}$ και αντίστοιχους εκθέτες $(\frac{9}{2}, 4, \frac{9}{2}, 4)$ και η (28) παίρνει τη μορφή

$$z^{\frac{9}{2}}v^3 + a_2^{(1)}z^4v^2 + a_1^{(3)}z^{\frac{9}{2}}v + a_0^{(4)}z^4 = 0,$$

που μετά από απλοποίηση δίνει

$$z^{\frac{1}{2}}v^3 + a_2^{(1)}v^2 + a_1^{(3)}z^{\frac{1}{2}}v + a_0^{(4)} = 0. \quad (30)$$

Τώρα θα κάνουμε χρήση του ΘΠΣ.

Θέτουμε $s = z^{\frac{1}{2}}$, οπότε η (30) παίρνει τη μορφή

$$F(s, v) = sv^3 + a_2^{(1)}v^2 + a_1^{(3)}sv + a_0^{(4)} = 0. \quad (31)$$

Για $s=0$, η (31) δίνει

$$a_2^{(1)}v^2 + a_0^{(4)} = 0 \Rightarrow v = \pm \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

με

$$F_v \left(0, \pm \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \pm 2a_2^{(1)} \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

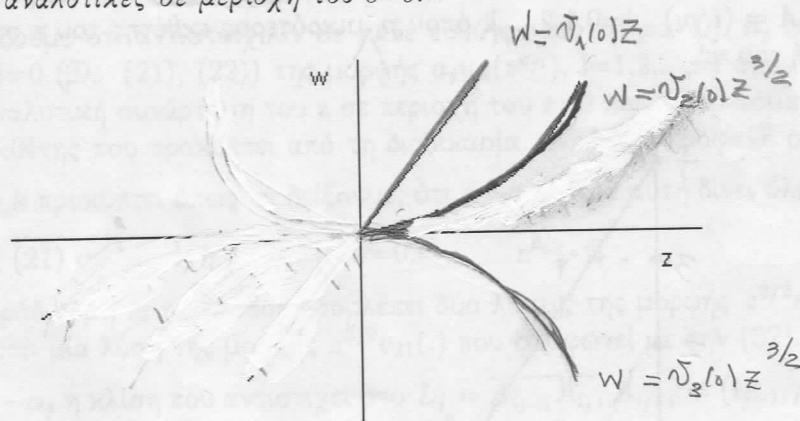
Υποθέτοντας ότι $F_v \left(0, \pm \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \neq 0$, παίρνουμε μέσω του ΘΠΣ τις $v_2(s), v_3(s)$ αναλυτικές συναρτήσεις, να επιλύουν την (31), με $v_{2,3}(0) = \pm \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}}$. Δηλαδή παίρνουμε μέχρι τούδε 3 λύσεις για την (26):

και τις

X

$$\begin{cases} w = v_1(z)z, & v_1(0) = -a_2^{(1)}, \\ w = v_2(z^{\frac{1}{2}})z^{\frac{3}{2}}, & v_2(0) = \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ w = v_3(z^{\frac{1}{2}})z^{\frac{3}{2}}, & v_3(0) = -\left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (32)$$

όπου $v_i(s)$ αναλυτικές σε περιοχή του $s=0$.



Σχ. 7: Οι λύσεις της (26) σε περιοχή του $(0,0)$, σχηματικά.

Άσκηση 2.6 Έστω $F(x,\lambda) \in C^1$ συνάρτηση ορισμένη σε περιοχή του $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Καλούμε την λ παράμετρο και την x άγνωστη και θεωρούμε την εξίσωση ως προς x

$$F(x, \lambda) = 0 \quad (33)$$

Υποθέτουμε ότι $F(x_0, \lambda_0) = 0$.

Για κάθε λ (σε περιοχή του λ_0) έστω $n(\lambda)$ ο αριθμός των λύσεων της $(??)$ εντός της περιοχής. Καλούμε (x_0, λ_0) σημείο διακλάδωσης αν ο $n(\lambda)$ αλλάζει καθώς η λ μεταβάλλεται περίξ του λ_0 . (33)

Δείξτε ότι αναγκαία συνθήκη για να είναι το (x_0, λ_0) σημείο διακλάδωσης είναι $F_x(x_0, \lambda_0) = 0$, δηλαδή οι υποθέσεις του ΘΠΣ δεν ικανοποιούνται.

[Handwritten notes and scribbles at the bottom of the page, including some mathematical symbols and a large arrow pointing right.]

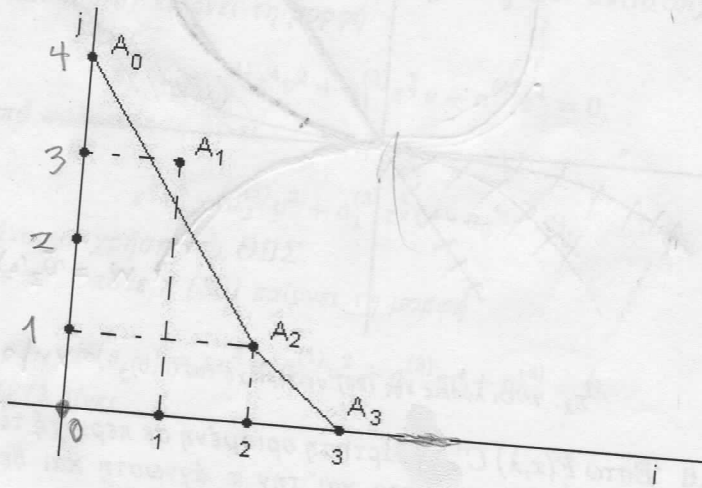
Άσκηση 2.7 (i) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της $F(x, \lambda) = \lambda x - x^3$ και να σχεδιαστεί το σύνολο των λύσεων της $F(x, \lambda) = 0$ στο x - λ επίπεδο.
 (ii) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της

$$F(y, \lambda) := y^2 + 3y + \lambda = 0$$

και να σχεδιαστεί το σύνολο λύσεων της $F(y, \lambda) = 0$ στο y - λ επίπεδο.

Το πολύγωνο του Νεύτωνα συστηματοποιεί την επίλυση εξισώσεων όπως της (26) και γενικότερα της (21) για F όπως στην (22).

Εισάγουμε καρτεσιανές συντεταγμένες (i, j) και θεωρούμε τα σημεία $A = (i, p_i)$, $i=0, 1, 2, \dots, k$ όπου p_i μικρότερος εκθέτης του z στον συντελεστή του w^i .



Σχ. 8: Πολύγωνο Νεύτωνα για το Παράδειγμα 2.

Επί παραδείγματι, Για το Παράδειγμα 2.5 έχουμε

$$A_0 = (0, 4), A_1 = (1, 3), A_2 = (2, 1), A_3 = (3, 0) \quad (34)$$

Θεωρούμε τώρα την κυρτή πολυγωνική γραμμή L που περνάει μέσω κάποιων σημείων A_i που ενώνει τα $(0, p_0)$ και $(k, 0)$ και είναι τέτοια ώστε να έχει όλα τα A_i ή επί ή από πάνω. Στο σχήμα 8 έχουμε την κυρτή πολυγωνική γραμμή (Πολύγωνο του Νεύτωνα) για το Παράδειγμα 2.5

Το Πολύγωνο του Νεύτωνα συνίσταται από τον πεπερασμένο αριθμό ευθυγράμμων τμημάτων $L_j (= A_{i_{j-1}} A_{i_j})$ αντίστοιχων κλίσεων $-\alpha_j, j=1, \dots, r$. Θετούμε $n_j = i_j - i_{j-1}$. Για το Παράδειγμα 2.5 έχουμε τα ευθύγραμμα τμήματα

$$\begin{aligned} & \varphi_k = 0 \rightarrow \\ & L_j = A_{i_{j-1}} A_{i_j} \\ & -\alpha_j, \quad j=1, \dots, r \\ & n_j = i_j - i_{j-1} = \text{ευρος των } L_j \end{aligned}$$

$$L_1 = \overline{A_0 A_2} \quad \text{και} \quad L_2 = \overline{A_2 A_3}$$

με κλίσεις

$$-\alpha_1 = \frac{4-1}{0-2} = -\frac{3}{2}, \quad -\alpha_2 = \frac{1-0}{2-3} = -1 \quad \left((-\alpha_j, n_j) \text{ κλίση των } L_j \right)$$

και

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 1 \quad \left(\text{εμφ. το ευρος των } L_j \right)$$

Θα αποδείξουμε ότι αντιστοιχούν σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα L_j , n_j λύσεις της $F(z,w)=0$ (βλ. (21), (22)) της μορφής $a_j v_{jl}(z^{\sigma_{jl}})$, $l=1,2,\dots,n_j$ όπου κάθε v_{jl} είναι αναλυτική συνάρτηση του z σε περιοχή του $z=0$ και σ_{jl} κλασματικός εν γένει εκθέτης που προκύπτει από τη διαδικασία. Από την προφανή σχέση δε $\sum_{j=1}^r n_j = k$ προκύπτει όπως θα δείξουμε, ότι η διαδικασία αυτή δίνει όλες τις λύσεις της (21) σε περιοχή του $z=0, w=0$. 2.5

Για το Παράδειγμα 2, η μέθοδος προβλέπει δύο λύσεις της μορφής $z^{3/2} v_{11}(\cdot)$, $z^{3/2} v_{12}(\cdot)$ και μία λύση της μορφής $z^{3/2} v_{21}(\cdot)$ που συμφωνεί με την (32).

Εάν τώρα $-\alpha_j$ η κλίση που αντιστοιχεί στο $L_j = \overline{A_{i_{j-1}} A_{i_j}}$, $A_{i_{j-1}} = (i_{j-1}, p_{i_{j-1}})$, $A_{i_j} = (i_j, p_{i_j})$

Έχουμε ότι

$$p_{i_{j-1}} + \alpha_j i_{j-1} = p_{i_j} + \alpha_j i_j \leq p_j + \alpha_j i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, k \quad (35)$$

Η σχέση (35) γεωμετρικά αντιστοιχεί στο ότι τα $A_{i_{j-1}}$ ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα L_j που κείται επί της ευθείας η οποία ευρίσκεται κάτω από τα άλλα σημεία A_i . Η σχέση (35) αλγεβρικά είναι αναμενόμενη και προκύπτει από την απαίτηση ότι η $F(z,w)=0$ έχει λύση της μορφής $w = z^{\alpha_j} v(\cdot)$ διότι σε τέτοια περίπτωση η αντικατάσταση της w στην $F(z,w)$ θα πρέπει να δώσει τουλάχιστον δ δύο όρους $(z^m)^m$ που έχουν την ίδια δύναμη ως προς z ώστε να αλληλοαναιρούνται. Η (35) εκφράζει την ισότητα των δύο χαμηλότερων (εκθέτικα) όρων. ^

Αντικαθιστώντας την

$$w = z^{\alpha_j} v(\cdot) \quad (36)$$

$$L_1 = \overline{A_0 A_2} \quad \text{και} \quad L_2 = \overline{A_2 A_3}$$

με κλίσεις

$$-\alpha_1 = \frac{4-1}{0-2} = -\frac{3}{2}, \quad -\alpha_2 = \frac{1-0}{2-3} = -1 \quad \left((-\alpha_j, n_j) \text{ κλίση των } L_j \right)$$

και

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 1 \quad \left((n_j, \text{το ευρος των } L_j) \right)$$

Θα αποδείξουμε ότι αντιστοιχούν σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα L_j , n_j λύσεις της $F(z,w)=0$ (βλ. (21), (22)) της μορφής $a_j v_{jl}(z^{\sigma_{jl}})$, $l=1,2,\dots,n_j$ όπου κάθε v_{jl} είναι αναλυτική συνάρτηση του z σε περιοχή του $z=0$ και σ_{jl} κλασματικός εν γένει εκθέτης που προκύπτει από τη διαδικασία. Από την προφανή σχέση $\sum_{j=1}^r n_j = k$ προκύπτει όπως θα δείξουμε, ότι η διαδικασία αυτή δίνει όλες τις λύσεις της (21) σε περιοχή του $z=0, w=0$. 2.5

Για το Παράδειγμα 2, η μέθοδος προβλέπει δύο λύσεις της μορφής $z^{3/2} v_{11}(\cdot)$, $z^{3/2} v_{12}(\cdot)$ και μία λύση της μορφής $z^{3/2} v_{21}(\cdot)$ που συμφωνεί με την (32).

Εάν τώρα $-\alpha_j$ η κλίση που αντιστοιχεί στο $L_j = \overline{A_{i_{j-1}} A_{i_j}}$, $A_{i_{j-1}} = (i_{j-1}, p_{i_{j-1}})$, $A_{i_j} = (i_j, p_{i_j})$

Έχουμε ότι

$$p_{i_{j-1}} + \alpha_j i_{j-1} = p_{i_j} + \alpha_j i_j \leq p_j + \alpha_j i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, k \quad (35)$$

Η σχέση (35) γεωμετρικά αντιστοιχεί στο ότι τα $A_{i_{j-1}}$ ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα L_j που κείται επί της ευθείας η οποία ευρίσκεται κάτω από τα άλλα σημεία A_i . Η σχέση (35) αλγεβρικά είναι αναμενόμενη και προκύπτει από την απαίτηση ότι η $F(z,w)=0$ έχει λύση της μορφής $w = z^{\alpha_j} v(\cdot)$, διότι σε τέτοια περίπτωση η αντικατάσταση της w στην $F(z,w)$ θα πρέπει να δώσει τουλάχιστον δ δύο όρους $(z^m)^m$ που έχουν την ίδια δύναμη ως προς z ώστε να αλληλοαναιρούνται. Η (35) εκφράζει την ισότητα των δύο χαμηλότερων (εκθέτικα) όρων. ^

Αντικαθιστώντας την

$$w = z^{\alpha_j} v(\cdot) \quad (36)$$

στην εξίσωση (21) με τις υποθέσεις (22) και μετά από απλοποίηση που προκύπτει διαιρώντας την εξίσωση με $w = z^{p_j + a_j i_j}$ (χρήση της ανισότητας στην (35)) έχουμε

$$a_{i_j}^{p_j} v^{i_j} + a_{i_j-1}^{p_j-1} v^{i_j-1} + g_{i_j}(z, v) = 0, \quad (37)$$

όπου $g_{i_j}(z, w)$ είναι αναλυτική ως προς v και ως προς κάποια κλασματική δύναμη του z , κοντά στο $(0,0)$, $g_{i_j}(0, v) = 0$.

Θέτοντας $z=0$ στην (37) παίρνουμε

$$a_{i_j}^{p_j} v^{n_j} + a_{i_j-1}^{p_j-1} = 0 \quad (38)$$

διότι $n_j = i_j - i_{j-1}$. Αυτή η εξίσωση έχει n_j διακεκριμένες λύσεις. Μέσω του ΘΠΣ (βλ. παρατήρηση 2.2) προκύπτει ότι η (38) έχει ισάριθμες λύσεις $v = v(z^\sigma)$, όπου σ κλασματικός εκθέτης και v αναλυτική συνάρτηση. Κατά συνέπεια, η (21) έχει n_j λύσεις αυτής της μορφής. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία παίρνουμε όλες τις λύσεις της (21) σε περιοχή του $(0,0)$.

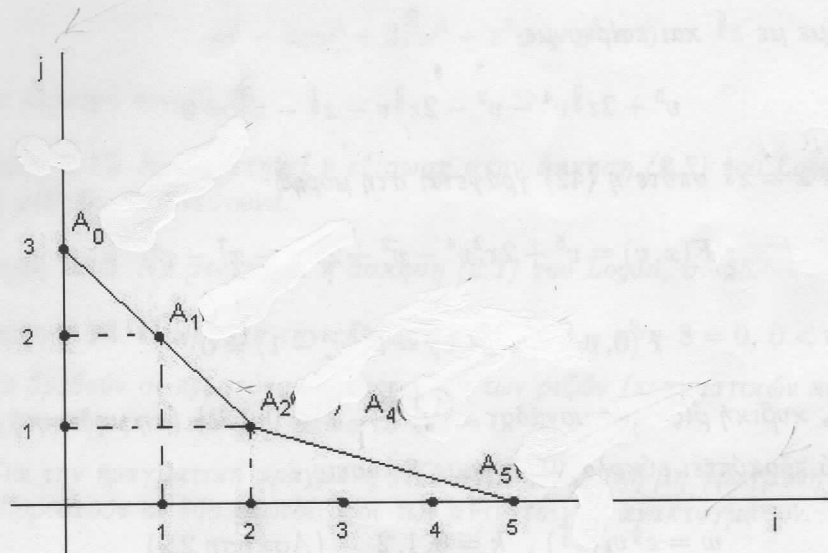
Στην περίπτωση που στην (35) περισσότεροι των δύο αριθμοί $p_j + a_j i_j$ είναι ίσοι τότε η αντίστοιχη (39) εμπλέκει περισσότερες δυνάμεις του v με ενδεχομένως πολλαπλές ρίζες. Το παρακάτω παράδειγμα είναι αντιπροσωπευτικό και βοηθάει στην κατανόηση αυτής της περίπτωσης.

Παράδειγμα 2.8 Να μελετηθούν οι λύσεις της

$$w^5 + 2zw^4 - zw^2 - 2z^2w - z^4 - z^3 = 0 \quad (39)$$

σε περιοχή του $(0,0)$.

Ξεκινάμε με την κατασκευή του πολυγώνου του Νεύτωνα:



Σχ. 9

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = (0, 3), \quad A_1 = (1, 2), \quad A_2 = (2, 1), \quad A_3 = \text{απων} \\ A_4 = (4, 1), \quad A_5 = (5, 0) \\ L_1 = \overline{A_0 A_2}, \quad L_2 = \overline{A_2 A_5} \\ -\alpha_1 = \frac{3-1}{0-2} = -1, \quad -\alpha_2 = \frac{1-0}{2-5} = -\frac{1}{3} \\ n_1 = 2, \quad n_2 = 3 \end{array} \right. \quad (40)$$

Κατά συνέπεια αναμένουμε

3 λύσεις της μορφής $z^{\frac{1}{3}} v_k(z^{\sigma_1})$

2 λύσεις της μορφής $z v_i(z^{\sigma_2})$

v_k, v_i αναλυτικές συναρτήσεις, σ_1, σ_2 κλασματικοί (εν γένει) εκθέτες.

Ξεκινάμε με τη λύση της μορφής $z^{\frac{1}{3}} v, v(0) \neq 0$. Αντικατάσταση στην (39) δίνει

$$(z^{\frac{1}{3}}v)^5 + 2z(z^{\frac{1}{3}}v)^4 - z(z^{\frac{1}{3}})^2 - 2z^2(z^{\frac{1}{3}}v) - z^4 - z^3 = 0 \quad (41)$$

Διαιρούμε με $z^{\frac{5}{3}}$ και παίρνουμε

$$v^5 + 2z^{\frac{2}{3}}v^4 - v^2 - 2z^{\frac{2}{3}}v - z^{\frac{7}{3}} - z^{\frac{4}{3}} = 0 \quad (42)$$

Θέτουμε $x = z^{\frac{1}{3}}$ οπότε η (42) γράφεται στη μορφή

$$F(x, v) = v^5 + 2x^2v^4 - v^2 - 2x^2v - x^7 - x^4$$

$$F(0, v_*) = v_*^5 - v_*^2 = v_*^2(v_*^3 - 1) = 0$$

$\Rightarrow v_*$ κυβική ρίζα της μονάδας = $\{e^{\frac{2\pi ki}{3}}, k = 0, 1, 2\}$ (μη μηδενική ρίζα)

Από εδώ προκύπτει εύκολα ότι έχουμε 3 λύσεις

$$w = z^{\frac{1}{3}}v_k(z^{\frac{1}{3}}), \quad k = 0, 1, 2 \quad (\text{Άσκηση 2.9}) \quad (43)$$

Στην συνέχεια εξετάζουμε λύσεις της μορφής zv .

Άσκηση 2.9 Δείξτε πως προκύπτει η (43).

Άσκηση 2.10 (i) Αντικαταστήσατε την zv στην (39). Πόσοι όροι εξισορροπούν (χαμηλότερης τάξης);

(ii) Μετά από απλοποίηση δείξτε ότι η εξίσωση που προκύπτει είναι

$$(*) \quad F(z, v) = z^2v^5 + 2z^2v^4 - v^2 - 2v - z - 1 = 0,$$

$$F(0, v_*) = (1 + v_*)^2 = 0.$$

Εφόσον η v_* είναι διπλή ρίζα δεν εφαρμόζεται στο το ΘΠΣ

(iii) Θέσατε $\bar{v} = v + 1$ και γράψτε την (*) ως προς τη μεταβλητή \bar{v} . Αναζητήστε λύσεις κοντά στο $\bar{v} = 0, z = 0$ εφαρμόζοντας το πολύγωνο του Νεύτωνα. Δείξτε ότι υπάρχουν 2 λύσεις της μορφής $\bar{v} = z^{\frac{1}{2}}g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}})$.

μσα
ΘΠΣ

Άσκηση 2.11 Να μελετηθούν οι λύσεις της

$$w^7 - 3zw^5 + 3z^2w^3 - z^3w + z^4 = 0$$

z^2

σε περιοχή του $(0,0)$.

Άσκηση 2.12 Να μελετηθεί η εξίσωση στην άσκηση (2.3) του Logan σ. 65 με τη μέθοδο του Νεύτωνα.

Άσκηση 2.13 Να μελετηθεί η άσκηση (2.1) του Logan, σ. 65.

Άσκηση 2.14 Θεωρήστε την εξίσωση $\epsilon x^5 - \epsilon x^4 - x^3 + 8 = 0$, $0 < \epsilon \ll 1$.

(i) Να βρεθούν οι πρωτεύοντες όροι όλων των ριζών (πραγματικών και μιγαδικών), φραγμένων και μη, όπως το $\epsilon \rightarrow 0$.

(ii) Για την πραγματική φραγμένη ρίζα και την θετική μη φραγμένη ρίζα να προσδιοριστούν οι δύο πρώτοι όροι των αντίστοιχων αναπτυγμάτων.

Λύσεις ασκήσεων 1.4, 1.5, 2.6, 2.7

1) $\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0$

Μορφή συστήματος

$x_1 = x, x_2 = \dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \epsilon x_1^3 \end{cases}$$

$\dot{E}(x_1, x_2) = -\epsilon x_1^3$

$$F(A) = - \int_0^{2\pi} A^2 \sin^3(t - t_0) dt \equiv 0$$

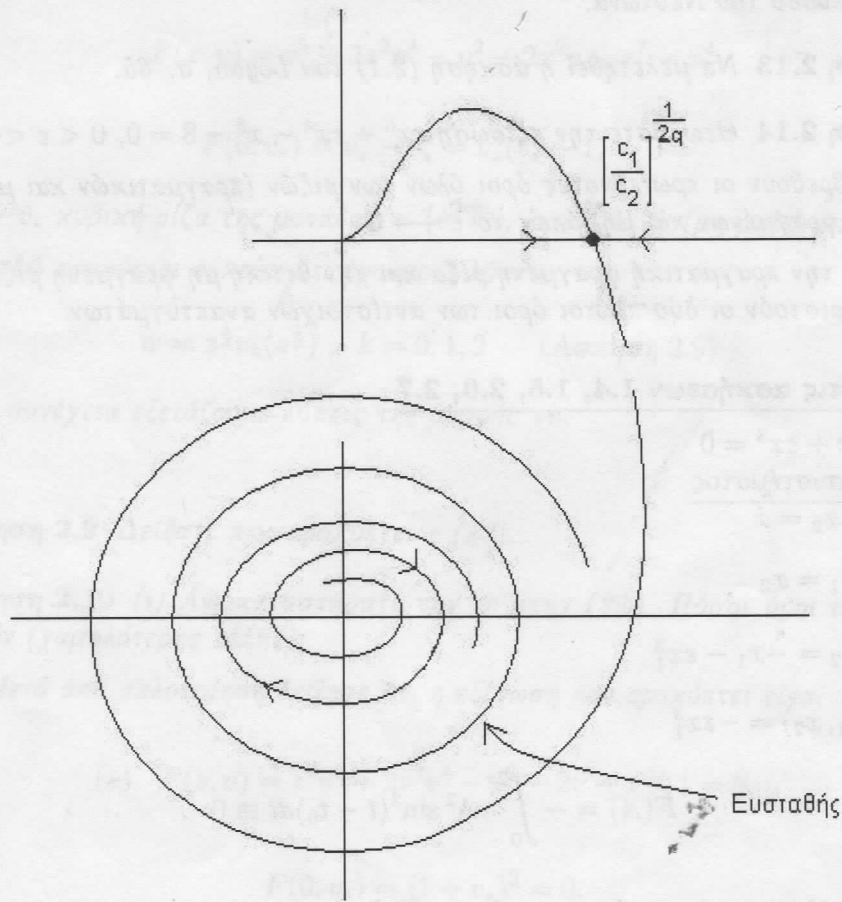
Ουδμία πληροφορία παρέχεται από τη μέθοδο.

2) $\ddot{x} = -x + \epsilon |\dot{x}|^p \dot{x} (1 - x^{2q})$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ -x_1 + \epsilon |x_2|^p x_2 (1 - x_1^{2q}) \end{cases}$$

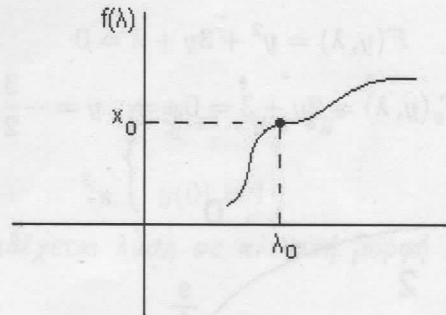
$$F(A) = A^{p+1} \left\{ \int_0^{2\pi} \sin^p(t - t_0) dt - A^{2q} \int_0^{2\pi} \sin^p(t - t_0) \cos^{2q}(t - t_0) dt \right\} =$$

$$= A^{p+1} \{ C_1 - C_2 A^{2q} \}$$



Σχ. 10

3) Έστω $F_x(x_0, \lambda_0) \neq 0$. Από το ΘΠΣ έπεται ότι υπάρχει $x=f(\lambda)$, $x_0 = f(\lambda_0)$ ορισμένη σε περιοχή $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ τέτοια ώστε όλες οι λύσεις της (1) σε περιοχή του (x_0, λ_0) ευρίσκονται στο $\{(f(\lambda), \lambda)/\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)\}$. Κατά συνέπεια, $n(\lambda)=1$ σε αυτή την περιοχή του (x_0, λ_0) .



Σχ. 11

4)(i) Από την Ασκ. 3 προκύπτει ότι τα σημεία διακλάδωσης δίδονται από τις εξισώσεις

$$F(x, \lambda) = 0$$

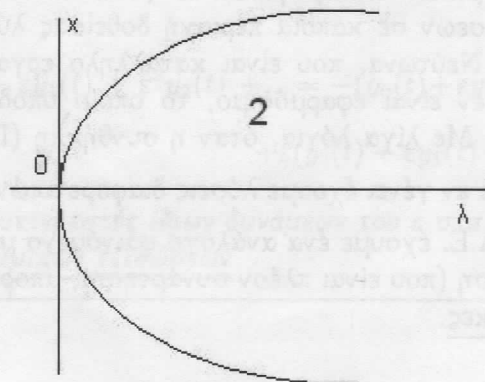
$$F_x(x, \lambda) = 0$$

Κατά συνέπεια

$$\lambda x - x^3 = 0$$

$$\lambda - 3x^2 = 0$$

Από όπου προκύπτει ότι $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$ είναι το μοναδικό (ενδεχομένως) σημείο διακλάδωσης.



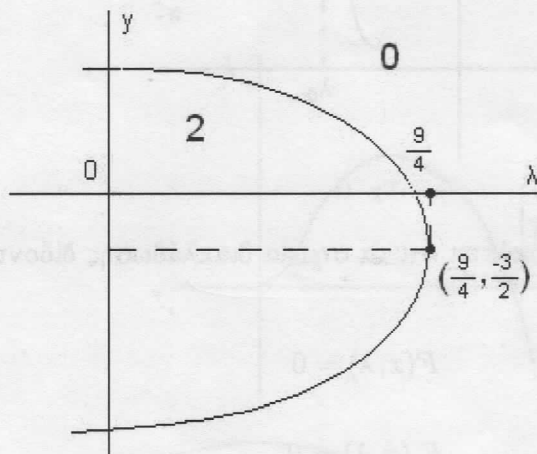
Σχ. 12: Το σύνολο λύσεων $\lambda x - x^3 = 0$.

Από το γράφημα (Σχ. 12) βλέπουμε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο διακλάδωσης.

(ii)

$$F(y, \lambda) = y^2 + 3y + \lambda = 0$$

$$F_y(y, \lambda) = 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}, \lambda = \frac{9}{4}$$



Σχ. 13: $y^2 + 3y + \lambda = 0$

3 Σύνηθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Από την προηγούμενη μελέτη μας των αλγεβρικών εξισώσεων αποκομίσαμε ότι το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων εν γένει δεν επαρκεί για την κατασκευή όλων των λύσεων σε κάποια περιοχή δοθείσας λύσης. Εισαγάγαμε το πολύγωνο του Νεύτωνα, που είναι κατάλληλο εργαλείο στην περίπτωση που το ΘΠΣ δεν είναι εφαρμόσιμο, το οποίο υποδεικνύει λύσεις διαφορετικών κλιμάκων. Με λίγα λόγια, όταν η συνθήκη (II) του Θεωρήματος 1.1 δεν ισχύει τότε εν γένει έχουμε λύσεις διαφορετικών κλιμάκων.

Στην περίπτωση των Σ.Δ.Ε. έχουμε ένα ανάλογο φαινόμενο με την επιπλέον διαφορά ότι στην ίδια λύση (που είναι πλέον συνάρτηση), μπορεί να συνυπάρχουν διαφορετικές κλίμακες.

3.1 Η μέθοδος των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων - η ομαλή περίπτωση

Παράδειγμα 3.1

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y + \varepsilon y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (44)$$

Το Π.Α.Τ. (44) επιδέχεται λύση σε κλειστή μορφή γιατί η εξίσωση είναι τύπου Bernoulli.

Έχουμε

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{1 + \varepsilon(e^{-t} - 1)} \quad (45)$$

Η (45) γράφεται επίσης σαν ανάπτυγμα Taylor περί το $\varepsilon=0$ ως εξής

$$y(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \varepsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}) + \dots$$

Προσποιούμενοι τώρα ότι δεν γνωρίζουμε την λύση (45) θα αποπειραθούμε να τη βρούμε σε μορφή αναπτύγματος σε περιοχή του $\varepsilon=0$,

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots \quad (46)$$

προσδιορίζοντας διαδοχικά $y_0(t)$, $y_1(t)$, ...

Αντικαθιστώντας την (46) στην (44) έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots = -(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots) + \\ + \varepsilon(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots)^2 \end{aligned} \quad (47)$$

Εξισώνοντας συντελεστές ίδιων δυνάμεων του ε στα δυο μέλη παίρνουμε την ακολουθία γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \dot{y}_0 + y_0 = 0 \\ \dot{y}_1 + y_1 = y_0^2 \\ \dot{y}_2 + y_2 = 2y_0 y_1 \\ \vdots \end{cases} \quad (48)$$

Αξιοσημείωτα είναι:

(α) Η (44) \Leftrightarrow Άπειρο σύστημα εξισώσεων

(β) Οι εξισώσεις είναι γραμμικές και το σύστημα μπορεί να λυθεί λύνοντας διαδοχικά τις εξισώσεις (Τριγωνική μορφή)

Για την αρχική συνθήκη εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία:

$$1 = y_0(0) + \epsilon y_1(0) + \dots \quad (49)$$

Από όπου παίρνουμε

$$y_0(0) = 1, \quad y_1(0) = 0, \dots \quad (50)$$

Επιλύοντας τώρα το σύστημα (48), (50) παίρνουμε

$$\begin{cases} y_0(t) = e^{-t} \\ y_1 = e^{-t} - e^{-2t} \\ y_2 = e^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t} \\ \vdots \end{cases} \quad (51)$$

Ουδόλως περιέργως κατασκευάζουμε ξανά το ανάπτυγμα της $y(t)$ στην (45).

Παρατηρούμε ότι :

Εάν κρατήσουμε έναν αριθμό n όρων από την (49) παίρνουμε μια ομοιόμορφη προσέγγιση $O(\epsilon^{n+1})$ της λύσης

Πχ για τρεις όρους

$$y_{\text{προσ}}(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \varepsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t}) \quad (*)$$

$$|y_{\text{ακρ}} - y_{\text{προσ}}| < C \varepsilon^3, \text{ ομοιομορφα για } t > 0.$$

όπου $y(t)$ η ακριβής λύση που δίνεται στην (45). Η ομοιομορφία προκύπτει από το ότι οι όροι της σειράς είναι ομοιόμορφα φραγμένοι για $t > 0$ και ~~δύο~~ η σειρά συγκλίνει. από το ότι

Σχόλιο 3.2 Στην περίπτωση του Παραδείγματος 3.1 η ασυμπτωτική σειρά συγκλίνει, και η προσέγγιση ισχύει ομοιόμορφα. Όπως θα δούμε όταν το πρόβλημα δεν είναι ομαλό (δηλ. απλή εφαρμογή αντίστοιχου ΘΠΣ σε χώρο Banach) η ασυμπτωτική σειρά δεν θα συγκλίνει κατ' ανάγκη και η προσέγγιση δεν θα είναι αναγκαστικά ομοιόμορφη. Παρόλα αυτά η μέθοδος των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων (που είναι ανάλογη της μεθόδου σειρών στις Σ.Δ.Ε.) κατάλληλα τροποποιημένη δίνει χρήσιμη πληροφορία και σε αυτές τις ιδιόμορφες περιπτώσεις.

Άσκηση 3.3 Δείξτε αυστηρά την εκτίμηση $|y_{\text{ακρ}}(t) - y_{\text{προσ}}(t)| < C\varepsilon^3$ στην (*), ομοιόμορφα για $t \in [\delta, \infty)$, $\delta > 0$.

Παράδειγμα 3.4 θεωρούμε την εξίσωση Duffing

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (52)$$

Αναζητούμε τη λύση για $\varepsilon \ll 1$ στη μορφή ασυμπτωτικού αναπτύγματος

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)'' + (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + \varepsilon (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)^3 &= 0 \Leftrightarrow \\ (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)'' + (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + \varepsilon (u_0^3 + 3u_0^2 \varepsilon u_1 + \dots) &= 0 \end{aligned}$$

Και κατά συνέπεια εξισώνοντας τους συντελεστές παίρνουμε

$$\varepsilon^0 : \ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad \dot{u}_0(0) = 0$$

\ddot{u}_0
 u_0

$$\varepsilon^1 : \ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0$$

$$\varepsilon^2 : \ddot{u}_2 + u_2 + 3u_0^2 u_1 = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad \dot{u}_2(0) = 0$$

⋮

Επιλύοντας διαδοχικά τις εξισώσεις έχουμε

$$u_0(t) = \cos t$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3 = -\cos^3 t \Rightarrow u_1(t) = \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8}t \sin t \quad (53)$$

⋮

Παρατήρηση 3.5 Η εξίσωση (53) επιλύεται με τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών [AK]. Παρατηρήστε ότι

$$\cos^3 t = \frac{\cos 3t + 3 \cos t}{4}$$

και ότι ο όρος $\cos t$ είναι επίσης λύση της ομοιογενούς εξίσωσης. Αυτό οδηγεί στον όρο $t \sin t$. Εδώ έχουμε το φαινόμενο του συντονισμού που οδηγεί σε δυσκολίες ουσίας.

Η προσέγγιση

$$u_{\text{προσ}}(t) = \cos t + \varepsilon \left(\frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8}t \sin t \right) \quad (**)$$

θα μπορούσαμε να πούμε ότι αντιστοιχεί με την (*) του προηγούμενου παραδείγματος και συνεπώς αναμένουμε την εκτίμηση

$$|u_{\text{ακρ}} - u_{\text{προσ}}| < C\varepsilon^2 \quad (54)$$

Έυκολα όμως παρατηρούμε ότι η εκτίμηση (54) δεν είναι δυνατόν να ισχύει ομοιόμορφα για $t > 0$ διότι η $u_{\text{προσ}}$ δεν είναι καν φραγμένη, αντίθετα με την $u_{\text{ακρ}}$ (βλ. επιχείρημα ενέργειας (55), (56)).

Επίσης η $u_{\text{προσ}}$ είναι ανεπαρκής ποιοτικά διότι δεν είναι περιοδική συνάρτηση του t και αυτό οδηγεί στο (λανθασμένο) συμπέρασμα ότι ενδεχομένως η διαταραχή στην (52) με τον ε όρο καταστρέφει την περιοδικότητα των λύσεων του προβλήματος αναφοράς $\ddot{u} + u = 0$ ($\varepsilon = 0$).

Υπόδειξη Ασκ. 1.6

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon f(\dot{x})(1 - x^2) \quad (*)$$

Επιλέγουμε $f(\dot{x}) = \dot{x}g(\dot{x})$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon x_2 g(x_2)(1 - x_1^2)$$

$$\dot{E}(x_1, x_2) = \varepsilon x_2^2 g(x_2)(1 - x_1^2), \quad x_1 = A \cos t, \quad x_2 = A \sin t$$

$$F(A) = A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t g(A \sin t)(1 - A^2 \cos^2 t) dt$$

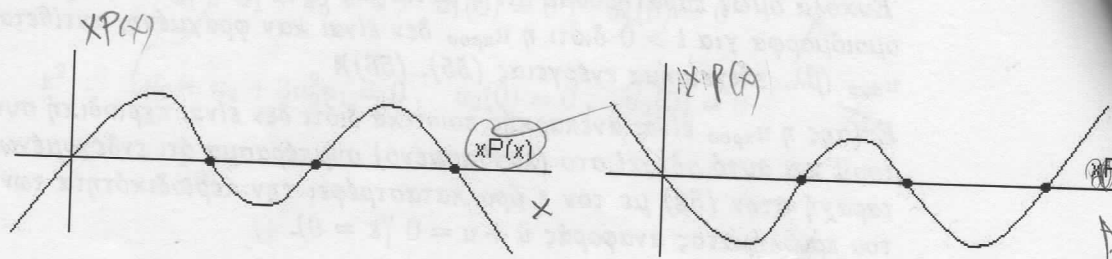
Έστω $g(x_1) = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1^4$, όπου a_0, a_1, a_2 θα επιλεγούν στην πορεία.

$$\begin{aligned} F(A) &= A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t (a_0 + a_1 A^2 \sin^2 t + a_2 A^4 \sin^4 t)(1 - A^2 \cos^2 t) dt \\ &= A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \{ a_0 + A^2 (a_1 \sin^2 t - a_0 \cos^2 t) + A^4 (a_2 - a_1 \sin^2 t \cos^2 t) \\ &\quad + A^6 (-a_2 \sin^4 t \cos^2 t) \} dt \\ &= A^2 [\bar{a}_0 + \bar{a}_1 A^2 + \bar{a}_2 A^4 + \bar{a}_3 A^6] =: A^2 P(A^2), \quad \text{οπου} \end{aligned}$$

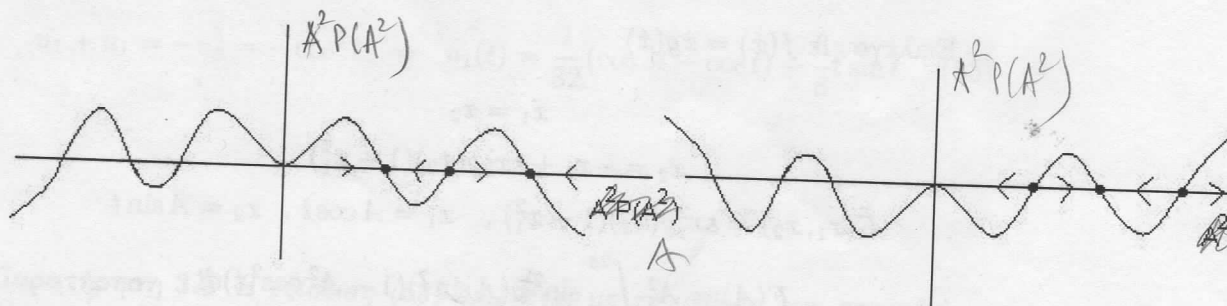
(α) Υπολογίστε τα $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_3$ συναρτήσει των a_0, a_1, a_2 .

(β) Δώστε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα a_0, a_1, a_2 έτσι ώστε η (*) να έχει ακριβώς 3 περιοδικές λύσεις.

(γ) Διερευνήστε την ευστάθεια των περιοδικών λύσεων.



Σχ. 14



Σχ. 15

Άσκηση 3.6 Να λυθεί η άσκηση 2.1 στο βιβλίο του Logan.

Λύση άσκησης 2.10

$$(*) F(z, v) = z^2 v^5 + 2z^2 v^4 - (v + 1)^2 - z = 0$$

$$F(0, v_*) = -(v_* + 1)^2 = 0 \Rightarrow v_* = 1 \text{ διπλή ρίζα}$$

κατά συνέπεια το ΘΠΣ δεν εφαρμόζεται.

Μεταφορά των αξόνων μέσω του μετασχηματισμού $\bar{v} := v + 1$ δίνει

$$(**) z^2 (\bar{v} - 1)^5 + 2z^2 (\bar{v} - 1)^4 - \bar{v}^2 - z = 0$$

Αναζήτηση λύσεων σε περιοχή του $\bar{v} = 0, z = 0$. Παρατηρούμε ότι στα αναπτύγματα

$$(\bar{v} - 1)^5 = \bar{v}^5 + \dots + 5\bar{v} - 1$$

$$(\bar{v} - 1)^4 = \bar{v}^4 + \dots - 4\bar{v} + 1$$

οι μόνοι όροι που έχουν σημασία είναι οι δύο τελευταίοι (διότι οι άλλοι είναι αμελητέοι σε σχέση με το \bar{v}^2). Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στο βοηθητικό πρόβλημα:

Βοηθητικό Πρόβλημα

$$(***) \quad z^2(5\bar{v} - 1) + 2z^2(-4\bar{v} + 1) - \bar{v}^2 - z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bar{v}^2 + 3z^2\bar{v} - z^2 + z = 0$$

που μπορούμε να το μεταχειριστούμε μέσω του πολυγώνου του Νεύτωνα:

$$A_0 = (0, 1) \quad A_1 = (1, 2) \quad A_2 = (2, 0)$$

Συμπεραίνουμε ότι η (***) έχει 2 λύσεις της μορφής $z^{\frac{1}{2}}g$.

Τώρα επανερχόμαστε στην (**). Το βοηθητικό πρόβλημα μας οδηγεί στο μετασχηματισμό $(z, \bar{v}) \mapsto (z, g)$, όπου $\bar{v} = z^{\frac{1}{2}}g$. Η (**) μετασχηματίζεται στην

$$z^2(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^5 + 2z(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^4 - g^2z - z = 0,$$

και απλοποιώντας (\Leftrightarrow θεραπεία της πολλαπλότητας 2 του $v_* = 1$) έχουμε

$$R(z, g) := z(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^5 + 2(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^4 - g^2 - 1 = 0$$

Τώρα είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε το ΘΠΣ: θέτουμε $z^{\frac{1}{2}} =: s$. Τότε

$$\bar{R}(s, g) := s^2(sg - 1)^5 + 2(sg - 1)^4 - g^2 - 1 = 0$$

$$\bar{R}(0, g_*) := -g_*^2 + 1 = 0 \Rightarrow g_* = \pm 1.$$

$$\frac{\partial \bar{R}(0, g_*)}{\partial g} = -2g_* \neq 0$$

2 !

x

x

x x

Κατά συνέπεια η $R(z, g) = 0$ έχει 2 λύσεις της μορφής $g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}})$ με $g_{\pm}(0) = \pm 1$.

Καταλήγουμε στο ότι $\bar{v}_{\pm} = z^{\frac{1}{2}}g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow v_{\pm} = z^{\frac{1}{2}}g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}}) - 1$. \square

Λύση άσκησης 2.14

(i) Να βρεθούν οι πρωτεύοντες όροι όλων των ριζών (πραγματικών, μιγαδικών, φραγμένων και μη) όπως το $\varepsilon \rightarrow 0$.

A. Φραγμένες Ρίζες

$$F(\varepsilon, x) = \varepsilon x^5 - \varepsilon x^4 - (x^3 - 8) = 0$$

$$F(0, x) = -(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x_k = 2e^{\frac{2\pi ki}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$F_x(0, x) \Big|_{x=x_k} = -3x_k^2 \neq 0$$

Το ΘΠΣ εφαρμόζεται και δίνει 3 ρίζες $x_k(\varepsilon)$, $k = 0, 1, 2$ με $x_k(0) = 2e^{\frac{2\pi ki}{3}}$.

Χρειαζόμαστε άλλες 2 ρίζες (5ου βαθμού).

B. Μη Φραγμένες Ρίζες

Εισάγουμε το μετασχηματισμό $x = \frac{1}{w}$. Η (*) παίρνει τη μορφή

$$(**) \quad 8w^5 - w^2 - \varepsilon w + \varepsilon = 0.$$

Εφαρμόζουμε το πολύγωνο του Νεύτωνα:

$$A_0 = (0, 1), \quad A_1 = (1, 1), \quad A_2 = (2, 0), \quad A_5 = (5, 0)$$

Έχουμε 2 λύσεις $w = z^{\frac{1}{2}}v$, 3 λύσεις $w = z^0v$ (όπου $z = \varepsilon$). Αγνοούμε τις 3 λύσεις (διότι συμπίπτουν με τις φραγμένες). Άρα έχουμε

$$8z^{\frac{5}{2}}v^5 - zv^2 - z^{\frac{3}{2}}v + z = 0 \Rightarrow 1 - z^{\frac{1}{2}}v - v^2 + 8z^{\frac{3}{2}}v^5 = 0$$

$$F(s, v) = 1 - sv - v^2 + 8s^3v^5 = 0$$

$$F(0, v) = 1 - v^2 \Rightarrow v = \pm 1.$$

$$\Theta\Pi\Sigma \Rightarrow w_{\pm}(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}v_{\pm}(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}[\pm 1 + \dots].$$

Κατά συνέπεια η $R(z, g) = 0$ έχει 2 λύσεις της μορφής $g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}})$ με $g_{\pm}(0) = \pm 1$.

Καταλήγουμε στο ότι $\bar{v}_{\pm} = z^{\frac{1}{2}}g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow v_{\pm} = z^{\frac{1}{2}}g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}}) - 1$. \square

Λύση άσκησης 2.14

(i) Να βρεθούν οι πρωτεύοντες όροι όλων των ριζών (πραγματικών, μιγαδικών, φραγμένων και μη) όπως το $\varepsilon \rightarrow 0$.

A. Φραγμένες Ρίζες

$$F(\varepsilon, x) = \varepsilon x^5 - \varepsilon x^4 - (x^3 - 8) = 0$$

$$F(0, x) = -(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x_k = 2e^{\frac{2\pi ki}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$F_x(0, x) \Big|_{x=x_k} = -3x_k^2 \neq 0$$

Το ΘΠΣ εφαρμόζεται και δίνει 3 ρίζες $x_k(\varepsilon)$, $k = 0, 1, 2$ με $x_k(0) = 2e^{\frac{2\pi ki}{3}}$.

Χρειαζόμαστε άλλες 2 ρίζες (5ου βαθμού).

B. Μη Φραγμένες Ρίζες

Εισάγουμε το μετασχηματισμό $x = \frac{1}{w}$. Η (*) παίρνει τη μορφή

$$(**) \quad 8w^5 - w^2 - \varepsilon w + \varepsilon = 0.$$

Εφαρμόζουμε το πολύγωνο του Νεύτωνα:

$$A_0 = (0, 1), \quad A_1 = (1, 1), \quad A_2 = (2, 0), \quad A_5 = (5, 0)$$

Έχουμε 2 λύσεις $w = z^{\frac{1}{2}}v$, 3 λύσεις $w = z^0v$ (όπου $z = \varepsilon$). Αγνοούμε τις 3 λύσεις (διότι συμπίπτουν με τις φραγμένες). Άρα έχουμε

$$8z^{\frac{5}{2}}v^5 - zv^2 - z^{\frac{3}{2}}v + z = 0 \Rightarrow 1 - z^{\frac{1}{2}}v - v^2 + 8z^{\frac{3}{2}}v^5 = 0$$

$$F(s, v) = 1 - sv - v^2 + 8s^3v^5 = 0$$

$$F(0, v) = 1 - v^2 \Rightarrow v = \pm 1.$$

$$\Theta\Pi\Sigma \Rightarrow w_{\pm}(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}v_{\pm}(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}[\pm 1 + \dots].$$

Κατά συνέπεια οι 2 μη φραγμένες ρίζες είναι

$$x_{\pm}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}[\pm 1 + \dots]} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}[\pm 1 + \dots]$$

(ii) Για την πραγματική φραγμένη ρίζα και την αρνητική μη φραγμένη ρίζα να προσδιοριστούν οι 2 πρώτοι όροι των αντίστοιχων αναπτυγμάτων

A. $\varepsilon x^5(\varepsilon) - \varepsilon x^4(\varepsilon) = (x(\varepsilon))^2 - 8$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^5(\varepsilon) + 5\varepsilon x^4(\varepsilon)x'(\varepsilon) - x^4(\varepsilon) - 4\varepsilon x^3(\varepsilon)x'(\varepsilon) &= \\ &= 2x^2(\varepsilon)x'(\varepsilon) \end{aligned}$$

Για $\varepsilon=0$: $x^5(0) - x^4(0) = 3x^2(0)x'(0) \Leftrightarrow$

$$x^4(0) - x^3(0) = 2x'(0)$$

$$\Rightarrow x'(0) = 4 \quad (\text{αφού } x(0) = 2)$$

Κατά συνέπεια,

$$x_0(\varepsilon) = 2 + 4\varepsilon + \dots$$

B. $F(s, v) = 1 - sv - v^2 + 8s^3v^5 = 0$, όπου $v = v(s)$. Διαφορίζοντας ως προς s έχουμε

$$v'(0) = -\frac{F_s(0, v(0))}{F_v(0, v(0))}$$

Κάνοντας χρήση του $v(0) = +1$ βρίσκουμε $v'(0) = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow v(s) = 1 - \frac{1}{2}s + \dots \Leftrightarrow$$

$$v(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots \Leftrightarrow w(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots)$$

$$\Rightarrow x(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \dots} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots]$$

$$= \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \dots$$

□

Υποδείξεις Ασκ. 2.14

Οι ασκήσεις αυτές δεν είναι της μορφής (22), $F(z,w)=0$, όπου $z=\varepsilon$, $w=x$, και κατά συνέπεια η θεωρία δεν εφαρμόζεται άμεσα. Όπως θα δούμε όμως ανάγονται¹ εύκολα στην (22). Για παράδειγμα, θεωρήστε την

$$F(\varepsilon, x) = \varepsilon x^2 + 2x + 1 = 0$$

Θέτοντας $\varepsilon=0$ έχουμε το πρόβλημα αναφοράς

$$F(0, x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$F_x(0, -\frac{1}{2}) = 2 \neq 0$$

Το ΘΠΣ δίνει λύση $x_1(\varepsilon)$, $x_1(0) = -1$. Επίσης εγγυάται ότι όλες οι λύσεις με $\varepsilon x^2 \ll 1$ καλύπτονται από την $x_1(\varepsilon)$. Ενδεχομένως υπάρχουν και άλλες λύσεις με εx^2 όχι μικρό. Για να τις μελετήσουμε ένας τρόπος είναι να αλλάξουμε μεταβλητές $x = \varepsilon^{-\sigma} y$ (εx^2 όχι μικρό συνεπάγεται x μεγάλο όπως $\varepsilon \rightarrow 0$).

Αντικατάσταση δίνει

$$\varepsilon^{1-2\sigma} y^2 + 2\varepsilon^{-\sigma} y + 1 = 0$$

Εξισορρόπηση συνεπάγεται $1 - 2\sigma = -\sigma \Leftrightarrow \sigma = 1$. Κατά συνέπεια

$$\varepsilon^{-1} y^2 + 2\varepsilon^{-1} y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y + \varepsilon = 0$$

που είναι της μορφής που εξετάσαμε:

$$G(\varepsilon, y) = y^2 + 2y + \varepsilon = 0,$$

$$G(0, y) = y^2 + 2y = y(y + 2) = 0 \Rightarrow y = 0, y = -2,$$

¹Υπάρχουν 2 ειδών λύσεις: (I) φραγμένες όπως $\varepsilon \rightarrow 0$, (II) μη φραγμένες όπως $\varepsilon \rightarrow 0$. Τις (I) τις μελετάμε με το ΘΠΣ. Τις (II) μέσω του μετασχηματισμού $x = \frac{1}{w}$ ($x \approx \infty \Leftrightarrow w \approx 0$) που τις αναγάγει στην μορφή (22) όπου εφαρμόζεται το πολύγωνο του Νεύτωνα.

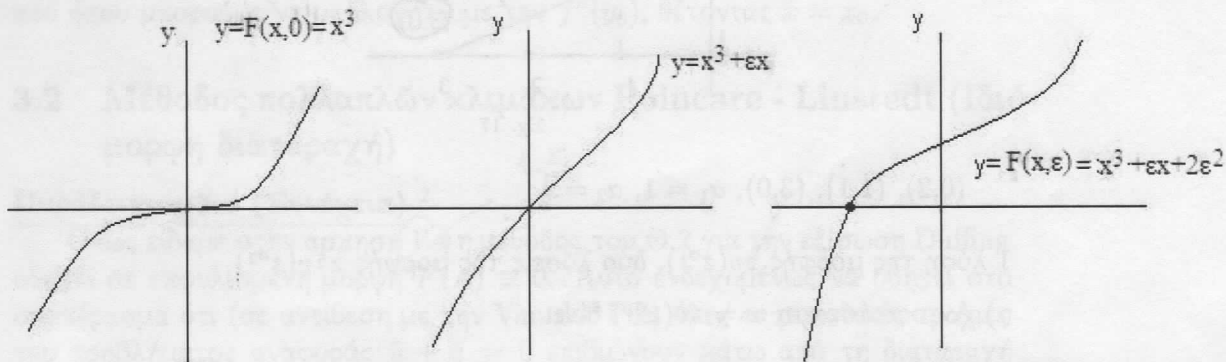
$$G_y(0, y) = 2y + 2, \quad G_y(0, 0) = 2, \quad G_y(0, -2) = -2.$$

Το ΘΠΣ εφαρμόζεται και δίνει ακόμα 2 λύσεις $y_2(\varepsilon), y_3(\varepsilon), x_2(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}y_3(\varepsilon), x_3(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}y_3(\varepsilon)$

Λύση Άσκησης 2.12

(a) Στοιχειώσης λύση

$$F(\varepsilon, x) = x^3 + \varepsilon x + 2\varepsilon^2 = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$



Υπάρχει μοναδική πραγματική

Σχ. 16

$$x(\varepsilon) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots$$

$$(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots)^3 + \varepsilon(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots) + 2\varepsilon^2 = 0$$

$$\varepsilon^0 \text{ όροι: } x_0^3 = 0$$

$$\varepsilon^1 \text{ όροι: } 3x_0^2x_1 + x_0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ (ουδεμία πληροφορία),}$$

$$\varepsilon^2 \text{ όροι: } x_0(\dots) + x_1 + 2 \Rightarrow x_1 = -2$$

$$\varepsilon^3 \text{ όροι: } x_1^3 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 8$$

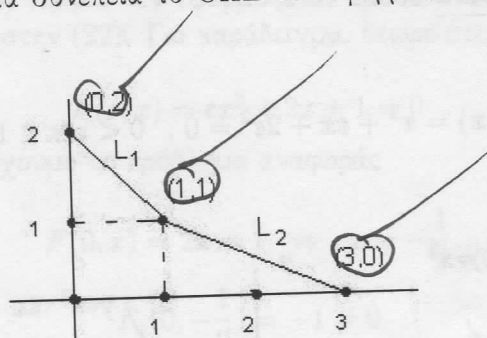
$$x(\varepsilon) = -2\varepsilon + 8\varepsilon^2 + \dots$$

(b) Μέσω του Πολυγώνου του Νεύτωνα (που θα μας δώσει και τις μιγαδικές)

$$F(z, w) = w^3 + zw + 2z^2 = 0$$

$$F(0, w) = w^3 = 0 \Rightarrow w = 0$$

$F_w(0, 0) = 0$; Κατά συνέπεια το ΘΠΣ δεν εφαρμόζεται. Καταφεύγουμε στο Π.Ν.:



Σχ. 17

$$(0,2), (1,1), (3,0), \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

1 λύση της μορφής $zv(z^{\sigma_1})$, δύο λύσεις της μορφής $z^{\frac{1}{2}}v(z^{\sigma_2})$

α) Αντικατάσταση $w = zv(z^{\sigma_1})$ δίνει

$$z^3v^3 + zv + 2z^2 = 0, \quad \bar{F}(z, v) = zv^3 + v + 2$$

$\bar{F}(0, 0) = 2, \quad \bar{F}_v(0, 0) = 1$. Το ΘΠΣ δίνει $v(z) = -2 + \dots$ ($\sigma_1 = 1$) και κατά συνέπεια $w(z) = z(-z + \dots)$.

β) Εκ νέου αντικατάσταση της $z^{\frac{1}{2}}v(z^{\sigma_2})$ δίνει $v^3 + v + 2z^{\frac{1}{2}} = 0$. Θέτουμε $s = z^{\frac{1}{2}}$.

$$\bar{\bar{F}}(s, v) = v^3 + v + 2s = 0$$

$$\bar{\bar{F}}(0, v) = v^3 + v = v(v^2 + 1) = 0 \Rightarrow v = 0.$$

$v = \pm i, \quad \bar{\bar{F}}_v(0, \pm i) = -2 \neq 0$. Κατά συνέπεια το ΘΠΣ δίνει δύο λύσεις $v^{\pm}(s) = \pm i + s + \dots$, και σε αρχικές μεταβλητές $w^{\pm}(z) = z^{\frac{1}{2}}v(z^{\frac{1}{2}}) = z^{\frac{1}{2}}(\pm i + z^{\frac{1}{2}} \pm \dots)$

$$(\sigma_2 = \frac{1}{2})$$

Σημείωση (Υπολογισμός διαδοχικών παραγώγων μέσω ΘΠΣ)

$$F(x, f(x)) = 0 \Rightarrow F_x + F_y f'(x) = 0 \Rightarrow F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0) f'(0) = 0$$

Για την 2η παράγωγο διαφορίζουμε:

$$\frac{d}{dx} (F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) f'(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$F_{xx} + F_{yx} f'(x) + F_{xy} f'(x) + F_{yy} (f'(x))^2 + F_y f''(x) = 0,$$

από όπου μπορούμε να υπολογίσουμε την $f''(y_0)$, θέτοντας $x = x_0$.

3.2 Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων Poincare - Linstedt (Ιδιόμορφη διαταραχή)

1.5

Παράδειγμα 3.4 (Συνέχεια)²

Όπως είδαμε στην άσκηση 1.4 η μέθοδος του Θ.2 για την εξίσωση Duffing οδηγεί σε εκφυλισμένη μορφή $F(A) \equiv 0$. Αυτό ενδεχομένως να οδηγεί στο συμπέρασμα ότι (σε αντίθεση με την Van der Pol) όλες οι περιοδικές τροχιές του προβλήματος αναφοράς $\ddot{u} + u = 0$ επιβιώνουν κάτω από τη διαταραχή της εξίσωσης με τον εu^3 όρο. Αυτό τελικά είναι σωστό και αποδεικνύεται με το ακόλουθο επιχειρήμα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (βλ. [AK], σελ. 60):

Η ποσότητα

$$H(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 + \frac{\varepsilon}{4} u^4 \quad (\text{Χαμιλτονιανη})$$

διατηρείται από την εξίσωση στην (52):

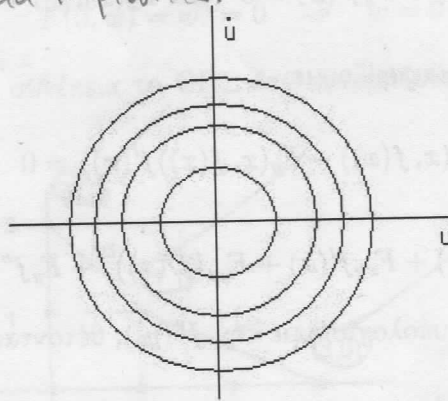
$$\frac{d}{dt} [H(u, \dot{u})] = \dot{u} \ddot{u} + u \dot{u} + \varepsilon u^3 \dot{u} = \dot{u} [\ddot{u} + u + \varepsilon u^3] \stackrel{(52)}{=} 0. \quad (55)$$

Κατά συνέπεια οι λύσεις ικανοποιούν την σχέση

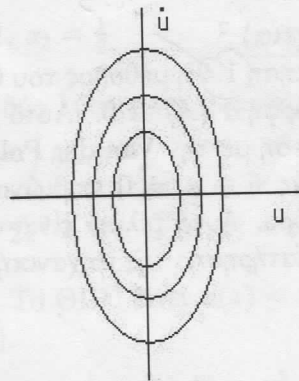
²Ο Poincaré είναι γνωστός βέβαια σε όλους. Ο Lindstedt ήταν διάσημος αστρονόμος.

$$H(u, \dot{u}) = C \tag{56}$$

που στο επίπεδο φάσης, τουλάχιστον για $0 < \varepsilon \ll 1$, είναι σχεδόν περιφέρειες και κατά συνέπεια **περιοδικές**.



Σχ. 18



Σχ. 19: Επίπεδο φάσης για $\varepsilon=0$.

Επίπεδο φάσης για $\varepsilon=1$ (βλ. [BO], σελ. 547)

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε την Poincaré-Lindstedt μέθοδο η οποία παράγει περιοδικές προσεγγίσεις που προσεγγίζουν τις λύσεις της Duffing ομοιόμορφα για $t \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} \ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \\ u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (57)$$

Εισάγουμε τη νέα κλίμακα χρόνου

$$t = (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)\tau, \quad \omega_1, \omega_2, \dots \text{ παράμετροι υπό προσδιορισμό} \quad (58)$$

Ως προς τη νέα κλίμακα χρόνου, το (57) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^2 [u + \varepsilon u^3] = 0. \quad (59)$$

Χρησιμοποιώντας τα ανάπτυγματα

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad u_0(0) + \varepsilon u_1(0) + \dots = 1, \quad \frac{du_0}{d\tau}(0) + \varepsilon \frac{du_1}{d\tau}(0) + \dots = 0,$$

και ομαδοποιώντας τους όρους στην (59) ως προς τις δυνάμεις του ε παίρνουμε

$$\frac{d^2u_0}{d\tau^2} + u_0 = 0 \quad (\varepsilon^0 \text{ όροι}),$$

που δίνει $u_0(\tau) = \cos \tau$,

$$\frac{d^2u_1}{d\tau^2} + u_1 = -u_0^3 - 2\omega_1 u_0 = -(\cos \tau)^3 - 2\omega_1 \cos \tau \quad (60)$$

$$= -\left(\frac{3}{4} + 2\omega_1\right) \cos \tau - \frac{1}{4} \cos 3\tau \quad (\varepsilon^1 \text{ όροι}).$$

Η ιδέα τώρα είναι να επιλέξουμε το ω_1 ώστε να αποφύγουμε το συντονισμό στην εξίσωση (60). Επιλέγουμε λοιπόν

$$\omega_1 = -\frac{3}{8}, \quad (61)$$

και επιλύοντας την (60) παίρνουμε

$$u_1 = \frac{1}{32} (\cos 3\tau - \cos \tau) \quad (62)$$

Κατά συνέπεια, η προσέγγιση που παίρνουμε από τους πρώτους δύο όρους είναι

$$u_{\text{προσ}} = \cos \tau + \frac{\varepsilon}{32} (\cos 3\tau - \cos \tau) \quad (63)$$

$$= \cos\left[t + \frac{3}{8}\varepsilon t\right] + \frac{\varepsilon}{32} \left[\cos 3\left(t + \frac{3}{8}\varepsilon t\right) - \cos\left(t + \frac{3}{8}\varepsilon t\right) \right]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε

$$\tau = (1 + \varepsilon\omega_1 + \dots)^{-1}t \simeq (1 - \varepsilon\omega_1)t = \left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon\right)t,$$

και οτι αγνοούμε τα ε πολλαπλασιασμού των ω στην 2^η ισότητα.
 Παρατηρούμε ότι πράγματι η προσέγγιση $u_{\text{προσ}}(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση του t . Παρατηρούμε επίσης ότι υπάρχουν σαφώς 2 κλίμακες χρόνου, η t και η εt . Αν και δεν αποδεικνύουμε εδώ την αντίστοιχη εκτίμηση της (54), $|u_{\text{ακρ}}(t) - u_{\text{προσ}}(t)| < C\varepsilon^2$ (βλ. [N]), βλέπουμε καθαρά την υπεροχή της (63) σε σχέση με την (**) στη σελ. 31.

Η μέθοδος Poincaré - Lindstedt λέγεται επίσης και μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων.

Παρατήρηση 3.7 Βλέπουμε την αναλογία με τις αλγεβρικές εξισώσεις και την παρουσία πολλαπλών κλιμάκων όταν το ΘΠΣ δεν εφαρμόζεται. Και εδώ έχουμε αδυναμία εφαρμογής του ΘΠΣ οφείλεται στην μη αντιστρεψιμότητα του γραμμικού μέρους:

Ο τελεστής $Lu = \ddot{u} + u$ δεν είναι αντιστρέψιμος στο χώρο των 2π -περιοδικών συναρτήσεων. Το νέο στοιχείο στην περίπτωση των ΣΔΕ είναι ότι οι πολλαπλές κλίμακες εμφανίζονται στην ίδια λύση.

Άσκηση 3.8 Θεωρείστε την Ασκ. 1.4, σ. 56 Logan και λύστε την ακολουθώντας τη σημείωση στη σελ. 40.

Άσκηση 3.9 Ασκ. 1.5, Logan σ. 56, μέρος γ). Πώς συγκρίνεται αυτή η εξίσωση με την εξίσωση Van der Pol; Είναι όλες οι λύσεις τις περιοδικές;

Άσκηση 3.10 * Μια σημαντική διαφορά μεταξύ της Duffing ($\varepsilon > 0$) και της γραμμής ($\varepsilon = 0$) είναι ότι η περίοδος των λύσεων εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης. Τι μπορείτε να συνάγετε επ' αυτού μέσω της μεθόδου Poincaré - Lindstedt;

Γραμμικός

3.3 Ανάλυση οριακού στρώματος - Ιδιόμορφη διαταραχή

Παράδειγμα 3.11 ([BO]) Θεωρούμε το πρόβλημα Σ.Τ.

$$\varepsilon y'' + (1 + \varepsilon)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (64)$$

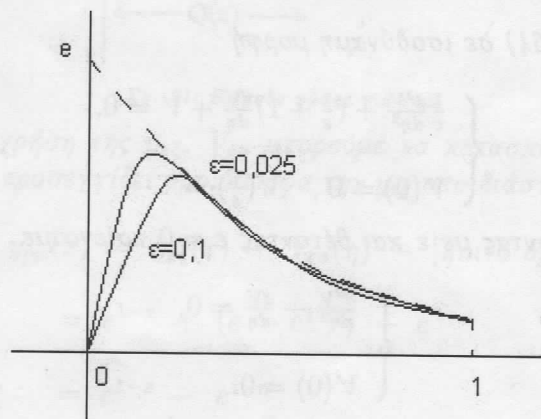
Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις οι οποίες να προσεγγίζουν την ακριβή λύση σε όλο το διάστημα $[0,1]$. Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι η μέθοδος του (ομαλού) ασυμπτωτικού αναπτύγματος (46) οδηγεί στην εξής δυσκολία: Το πρόβλημα τάξης ε^0 είναι

$$y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (65)$$

το οποίο είναι υπερπροσδιορισμένο (εξίσωση 1ης τάξης με δύο συνοριακές συνθήκες).

Εξικινάμε με παρατηρήσεις επάνω στον τύπο της λύσης που σε αυτή την περίπτωση να γραφτεί σε κλειστή μορφή

$$y_\varepsilon(x) = \frac{e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (66)$$



Σχ. 20: Επίπεδο φάσης για $\varepsilon=0$.

Γραφήματα της $y(x)$ για $\varepsilon=0,1$ και $0,025$.

Παρατηρούμε 2 κλίμακες: x και $\frac{x}{\varepsilon}$, και δύο αντίστοιχα διακεκριμένα όρια. Πρώτον

Θεωρείστε το πρόβλημα

$$(1) \quad \varepsilon y'' - x^\alpha y' - y = 0, \quad y(0) = y(1) = 1$$

για $0 < \varepsilon \ll 1$, $\alpha \gg 0$.

Να διερευνήσει για ποιες τιμές του α το (1) έχει οριακό στρώμα στο $x=0$.

#

3) Να περιγράψουν όλες οι (μικροσκοπικές) ρίζες w της εξίσωσης

$$(2) \quad w^7 - 3zw^5 + 3z^2w^3 - z^3w + z^4 = 0$$

σε περιοχή του $(0,0)$, και να προσδιοριστεί ο 1^{ος} μη μηδενικός όρος τους.

#

4) Η σχετικιστική διορδωση του περίηλου του Ερμή

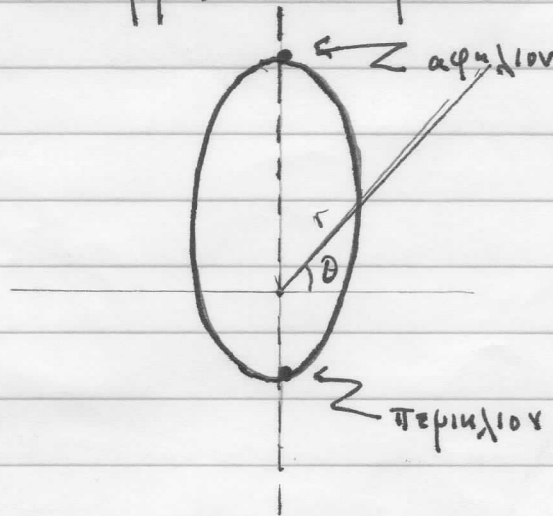
Σύμφωνα με την Νευτώνια Μηχανική η τροχιά δίνεται από την εξίσωση

$$(3) \quad \frac{du^2}{d\theta^2} + u = a$$

(συνεχίζεται)

οπου $a = \frac{GM}{h^2}$, M η μάζα του ηλίου, G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας, $r = \frac{1}{u}$ η απόσταση από τον ηλιο, θ η γωνία με τον μεγάλο άξονα της ελλείψης,

η η γωνιακή ορμή κατά μονάδα μάζας :



Η (3) έχει την λύση

$$(4) \quad r = \frac{1}{a + A \sin \theta}$$

Κανονώς χρήση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας ο Schwarzschild έδειξε ότι η (3) τροποποιείται ~~απλά~~ με γραμμικά ως εξής :

$$(5) \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = a(1 + \epsilon u^2)$$

(συνεχίζεται)

οπou $a\varepsilon = \frac{3GM}{c^2}$, c η ταχύτητα των φωτος.

Ερώτημα 1

ΘΕΤΟΝΤΑΣ

$$(6) \quad u(\theta) = u_0(\theta) + \varepsilon u_1(\theta) + \dots$$

οπou $u_0(\theta) = a + A \sin \theta$ (βλ (4)), δείξτε
οτι u_1 ικανοποιεί την

$$(7) \quad \frac{d^2 u_1}{d\theta^2} + u_1 = a u_0^2,$$

και κανοντας χρήση της μεθοδου των απροσδιοριστων
συντελεστων δείξτε οτι η (7) δεν έχει 2π -περιοδικη
λύση.

Ερώτημα 2

Εισαγοντας την αλλαγη κλιμακας $x = \omega \theta$
(μεθοδος Poincare-Linstedt) και συμβολιζοντας
με $'$ την παραγωγισι ως προς x δείξτε οτι
η ~~(7)~~ (7) παιρνει την μορφη

$$(8) \quad \omega^2 u'' + u = a(1 + \varepsilon u^2), \quad u = u(x).$$

Στη σχεσια επιλεγοντας $\omega = 1 + \varepsilon \omega_1$ και
(συνεχίζεται)

Κανοντας χρηση του ασυμπτωτικου αναπτυχματος

$$(9) \quad u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots$$

δειξτε οτι η u_1 ικανοποιει την εξισωση

$$(10) \quad u_1'' + u_1 = a \left(a^2 + 2aA \sin x + A^2 \sin^2 x \right) + 2\omega_1 A \sin x$$

Κανοντας χρηση της μεθοδου Poincaré-Lindstedt

επιλεξετε την παραμετρο ω_1 καταλληλα και βρετε την 2π -περιοδικη (σε x -μεταβλητες) της (10).

Ερωτημα 3

Κανοντας χρηση των Ερωτηματος 2 δειξτε οτι ως προς τις αρχικες μεταβλητες εχουμε την εκφραση

$$(11) \quad u(\theta) = a + A \sin \left((1 - \alpha^2 \varepsilon + O(\varepsilon^2)) \theta \right) + O(\varepsilon),$$

και κατα συνεπεια (δειξτε) οτι η περιοδος αυξανεται κατα την ποσοτητα

$$(12) \quad \Delta P = 2\pi \alpha^2 \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Μεσω των 3^{ων} Νομων των Kepler (π.χ. Αλκιμαχος - Κορο-
γεωργιος ΣΔΕ, §1.10)
(συνεχίζεται)

Προκύπτει ότι

$$(13) \quad \Delta P = \frac{6\pi}{1-e^2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{2\pi GM}{T} \right)^{2/3}$$

Καθίστας χρήση των :

(i) $e =$ εκκεντρικότητα $\overset{\text{Ερημ}}{\text{Αφροδίτης}} = 0.205$

(ii) $T =$ περίοδος $\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = 87.97$ ημερες

(iii) $M =$ μάζα ηλιου $= 1.990 \times 10^{30}$ kg

(iv) $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m²/kg²

(v) $c = 3 \times 10^8$ m/sec

Υπολογίστε των ΔP .

#

5)

Δείξτε ότι οι μεγάλες ιδιοτιμές των προβλημάτων

$$y'' + \lambda(x+\pi)^4 y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

δίνονται κατά προσέγγιση από τα τρία τύπους

$$(14) \quad \lambda = \frac{9n^2}{49\pi^4}$$

για μεγάλα n , και βρείτε τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις.

(βλ Logan, WKB).

(ΤΕΛΟΣ)

□

