$$h'(x_1) = \frac{\partial H}{\partial x_1} = g(x_1).$$

Έπεται ότι το σύστημα είναι Χαμιλτονιανό με Χαμιλτονιανή

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + G(x_1),$$

όπου $G'(x_1) = g(x_1)$. Οι λύσεις ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{1}{2}x_2^2 + G(x_1) = \text{ σταθερά.}$$

1.10 Οι νόμοι του Kepler

Οι νόμοι του Kepler

1. Κάθε πλανήτης περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο πάνω σε ελλειπτική τροχιά με τον ήλιο στη θέση της μίας εστίας.

2. Η επιβατική ακτίνα με αρχή τον ήλιο και πέρας τον πλανήτη διανύει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.

3. Το τετράγωνο της περιόδου της περιστροφής είναι ευθέως ανάλογο με τον κύβο του μήκους του κύριου ημιάξονα της έλλειψης.

Ο Johannes Kepler (1571-1630) κατέληξε στη διατύπωση των νόμων του μετά από πολυετή ανάλυση πειραματικών δεδομένων.

Κάνοντας χρήση των νόμων του Νεύτωνα

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad \vec{F} = -\frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \tag{1.92}$$

όπου $|\cdot|$ η Ευκλείδια νόρμα, M η μάζα του ήλιου και m η μάζα της γής, θα δείξουμε, όπως ο Νεύτωνας, ότι αν αγνοήσουμε την επίδραση των άλλων πλανητών, **η τροχιά της γης είναι ελλειπτική, με τον ήλιο στη μία εστία.** Έχουμε διατυπώσει τους νόμους του Νεύτωνα σε διανυσματική μορφή. Με λόγια οι νόμοι περιγράφονται ως εξής: ο μεν πρώτος λέει ότι ένα αντικείμενο αντιδρά στη δύναμη που του ασκείται αναπτύσσοντας επιτάχυνση στην κατεύθυνση της δύναμης που είναι αντίστροφα ανάλογη της μάζας του. Ο δεύτερος νόμος λέει ότι κάθε αντικείμενο έλκει κάθε άλλο με μία δύναμη που για δύο αντικείμενα είναι ανάλογη των μαζών και αντιστρόφως ανάλογη των τετραγώνων της απόστασής τους. Η G είναι σταθερά της βαρύτητας, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$.

Θα δώσουμε την απόδειξη σε βήματα.

1. Σύστημα Συντεταγμένων

Ξεκινάμε τοποθετώντας τον ήλιο στην αρχή O των αξόνων. $\vec{r}$ είναι η επιβατική ακτίνα. Κατ' αρχήν η ακτίνα $\vec{r}$ θεωρείται σαν διάνυσμα στο χώρο, στην πορεία όμως θα δείξουμε ότι η κίνηση είναι πάνω σε ένα σταθερό επίπεδο.

2. Η Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

Εξισώνοντας στην (1.92) παίρνουμε

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{1.93}$$

που είναι εξίσωση δεύτερης τάξης ειδικής μορφής και θα δείξουμε ότι μπορεί να αναχθεί σε εξίσωση πρώτης τάξης όπως στην ενότητα 1.7.

Έστω

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.94}$$

Τότε η (1.93) γράφεται

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Θα δείξουμε ότι η ποσότητα

$$\frac{m}{2}|\vec{V}|^2 - \frac{mMG}{r} =: E_\kappa + E_\Delta = E, \tag{1.95}$$

όπου $r = |\vec{r}|$, διατηρείται, δηλαδή η E είναι σταθερά, ανεξάρτητη του t.

Πράγματι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}|\vec{V}|^2\right] &= \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}(\vec{V}\cdot\vec{V})\right] \\ &= m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{V} \\ &= -\frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{GmM}{r}\right), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η (1.95) με ολοκλήρωση.

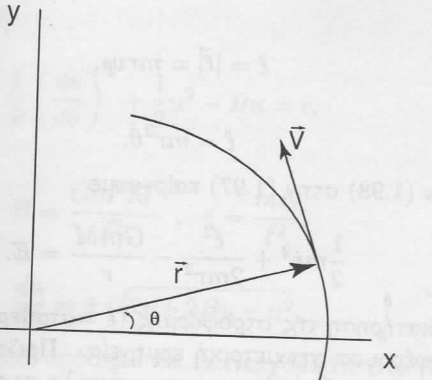
3. Η Διατήρηση της Στροφορμής

Έστω $\vec{p} = m\vec{V}$ και $\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p}$, η **ορμή** και **στροφορμή** αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι

$$\vec{\ell} = \text{σταθερά}, \tag{1.96}$$

δηλαδή ότι το $\vec{\ell}$ είναι σταθερό διάνυσμα. Από την (1.96) προκύπτει ότι η κίνηση είναι πάνω σε ένα σταθερό επίπεδο, και έτσι το πρόβλημα υποβιβάζεται από τις 3 στις 2 διαστάσεις. Πράγματι το $\vec{\ell}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν η $\vec{r}$ και η $\vec{V}$ που είναι εφαπτόμενη στην τροχιά. Εφ' όσον η κατεύθυνση του $\vec{\ell}$ είναι αμετάβλητη το επίπεδο κίνησης είναι σταθερό. Η απόδειξη της (1.96) είναι απλή:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{V}\times m\vec{V} + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{0} + \vec{r}\times\left(-\frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right) = \vec{0}.$$



[illegible] Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο κίνησης με τον ήλιο στην αρχή των [illegible]

[illegible] Πολικές Συντεταγμένες στο Επίπεδο Κίνησης

[illegible] ορθογώνιο σύστημα αξόνων x–y στο επίπεδο κίνησης, όπου πλέον η [illegible] έχει την αναπαράσταση $\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ (βλ. Σχήμα 1.13). Κατά [illegible] (1.94) γράφεται

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\
&= \frac{dr}{dt}(\cos\theta, \sin\theta) + \frac{d\theta}{dt} r(-\sin\theta, \cos\theta) \\
&=: \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + \frac{d\theta}{dt} r\vec{e}_\theta \\
&=: \vec{V}_r + \vec{V}_\theta
\end{aligned}$$

[illegible] τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_r$ και $\vec{e}_\theta$ στην κατεύθυνση της επιβατικής [illegible] κάθετη κατεύθυνση αντίστοιχα. Πράγματι

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

[illegible] οι αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας. Εάν $v_r := |\vec{V}_r|$, $v_\theta := |\vec{V}_\theta|$, [illegible] παίρνει τη μορφή

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GmM}{r} = E, \tag{1.97}$$

[illegible] $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$. Με άλλα λόγια απαλλαχθήκαμε από τα διανύσματα.

[illegible] επίσης γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\vec{\ell} &= \vec{r} \times m\vec{V} = \vec{r} \times m(v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta) = \vec{r} \times mv_r\vec{e}_r + \vec{r} \times mv_\theta\vec{e}_\theta = \vec{r} \times mv_\theta\vec{e}_\theta \\
&= mrv_\theta\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \times \vec{e}_\theta,
\end{aligned}$$

2. Η Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας
Εξισώνοντας στην (1.92) παίρνουμε

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

που είναι εξίσωση δεύτερης τάξης ειδικής μορφής και θα δείξουμε ότι μπορεί να α
σε εξίσωση πρώτης τάξης όπως στην ενότητα 1.7.

Έστω

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Τότε η (1.93) γράφεται

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Θα δείξουμε ότι η ποσότητα

$$\frac{m}{2}|\vec{V}|^2 - \frac{mMG}{r} =: E_\kappa + E_\Delta = E,$$

όπου $r = |\vec{r}|$, διατηρείται, δηλαδή η E είναι σταθερά, ανεξάρτητη του t.

Πράγματι

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}|\vec{V}|^2\right] &= \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}(\vec{V}\cdot\vec{V})\right] \\
&= m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{V} \\
&= -\frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{GmM}{r}\right),
\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η (1.95) με ολοκλήρωση.

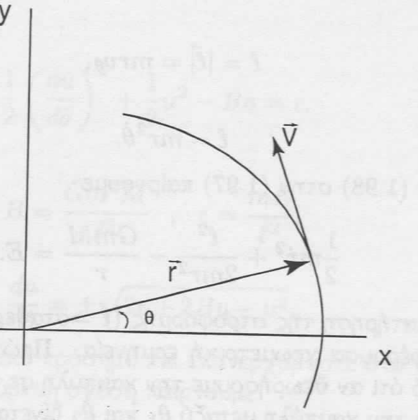
3. Η Διατήρηση της Στροφορμής

Έστω $\vec{p} = m\vec{V}$ και $\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p}$, η ορμή και στροφορμή αντίστοιχα. Θα δε
ότι

$$\vec{\ell} = \text{σταθερά}$$

δηλαδή ότι το $\vec{\ell}$ είναι σταθερό διάνυσμα. Από την (1.96) προκύπτει ότι η κίνησ
πάνω σε ένα σταθερό επίπεδο, και έτσι το πρόβλημα υποβιβάζεται από τις 3
διαστάσεις. Πράγματι το $\vec{\ell}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν η $\vec{r}$ και η $\vec{V}$ πο
εφαπτόμενη στην τροχιά. Εφ' όσον η κατεύθυνση του $\vec{\ell}$ είναι αμετάβλητη το ε
κίνησης είναι σταθερό. Η απόδειξη της (1.96) είναι απλή:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{V}\times m\vec{V} + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{0} + \vec{r}\times\left(-\frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right) = \vec{0}$$



Σχήμα 1.13: Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο κίνησης με τον ήλιο στην αρχή των αξόνων.

4. Πολικές Συντεταγμένες στο Επίπεδο Κίνησης

Εισάγουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων x–y στο επίπεδο κίνησης, όπου πλέον η επιβατική εκτίνα έχει την αναπαράσταση $\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ (βλ. Σχήμα 1.13). Κατά συνέπεια η σχέση (1.94) γράφεται

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\
&= \frac{dr}{dt}(\cos\theta, \sin\theta) + \frac{d\theta}{dt} r(-\sin\theta, \cos\theta) \\
&=: \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + \frac{d\theta}{dt} r\vec{e}_\theta \\
&=: \vec{V}_r + \vec{V}_\theta
\end{aligned}$$

όπου εισαγάγαμε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_r$ και $\vec{e}_\theta$ στην κατεύθυνση της επιβατικής ακτίνας και στην κάθετη κατεύθυνση αντίστοιχα. Πράγματι

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

και $\vec{V}_r, \vec{V}_\theta$ είναι οι αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας. Εάν $v_r := |\vec{V}_r|$, $v_\theta := |\vec{V}_\theta|$, τότε η (1.95) παίρνει τη μορφή

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GmM}{r} = E\,, \tag{1.97}$$

όπου $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$. Με άλλα λόγια απαλλαχθήκαμε από τα διανύσματα.

Η (1.96) επίσης γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\vec{\ell} &= \vec{r} \times m\vec{V} = \vec{r} \times m(v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta) = \vec{r} \times mv_r\vec{e}_r + \vec{r} \times mv_\theta\vec{e}_\theta = \vec{r} \times mv_\theta\vec{e}_\theta \\
&= mrv_\theta \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \times \vec{e}_\theta,
\end{aligned}$$

επομένως
$$\ell = |\vec{\ell}| = mrv_\theta,$$
ισοδύναμα
$$\ell = mr^2\dot{\theta}. \tag{1.98}$$

Αντικαθιστώντας την (1.98) στην (1.97) παίρνουμε
$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = E. \tag{1.99}$$

Σημείωση 1.2 Η διατήρηση της στροφορμής (ℓ =σταθερά, βλ. (1.96), (1.98)) έχει την ακόλουθη ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία. Πρώτον υπενθυμίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό ότι αν θεωρήσουμε την καμπύλη σε πολική μορφή $r = r(\theta)$, τότε το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη μεταξύ θ_1 και θ_2 δίνεται από τον τύπο
$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\,d\theta.$$

Στην περίπτωσή μας η θ είναι συνάρτηση του χρόνου, $\theta = \theta(t)$, και το εμβαδόν που έχει καλύψει η επιβατική ακτίνα από την θέση $t = 0$ μέχρι t είναι
$$A(t) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1(0)}^{\theta(t)} r^2(\theta)\,d\theta.$$

Διαφορίζοντας παίρνουμε
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2(\theta)\frac{d\theta}{dt} \overset{(1.98)}{=} \frac{1}{2}\frac{\ell}{m} = \text{σταθερά}.$$

Έπεται ότι τα εμβαδά που καλύπτει η επιβατική ακτίνα σε ίσους χρόνους $\Delta t = t_2 - t_1$ είναι ίσα. **Αυτός είναι ο δεύτερος νόμος του Kepler.**

5. Η Τροχιά

Έχουμε αναγάγει το πρόβλημα σε μία εξίσωση πρώτης τάξης, την (1.99), την οποία θα επιλύσουμε με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητών.

Μας ενδιαφέρει η γεωμετρική τροχιά. Συνεπώς είναι λογικό να απαλείψουμε το χρόνο και να θεωρήσουμε την θ ως την ανεξάρτητη μεταβλητή. Έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας
$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \overset{(1.98)}{=} \frac{dr}{d\theta}\frac{\ell}{mr^2} = -\frac{\ell}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Στη συνέχεια αλλάζουμε και την εξαρτημένη μεταβλητή θέτοντας
$$u = \frac{1}{r}.$$

Έχουμε
$$\dot{r} = -\frac{\ell}{m}\frac{du}{d\theta}$$

και η (1.99) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}u^2 - Bu = \epsilon,$$

όπου

$$B = \frac{Gm^2M}{\ell^2}\ ,\ \epsilon = \frac{mE}{\ell^2}.$$

Κατά συνέπεια

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{2\epsilon + 2Bu - u^2}.$$

Κατ΄ αρχήν επιλέγουμε το θετικό πρόσημο και επανερχόμαστε στο τέλος με εξηγήσεις. Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση παίρνουμε

$$\int \frac{du}{\sqrt{2\epsilon + 2B - u^2}} = \theta. \tag{1.100}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα. Γράφοντας την υπόριζη ποσότητα σαν διαφορά τετραγώνων

$$u^2 - 2Bu - 2\epsilon = (u-B)^2 - c^2,$$

όπου $c^2 := B^2 + 2\epsilon$, η (1.100) παίρνει την πιο οικεία μορφή

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\psi^2}} = \theta$$

όπου $\psi := \dfrac{u-B}{c}$. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\arcsin\psi = \theta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u-B}{c} = \sin\theta \quad \Leftrightarrow$$

$$r(\theta) = \frac{1}{B + c\sin\theta}. \tag{1.101}$$

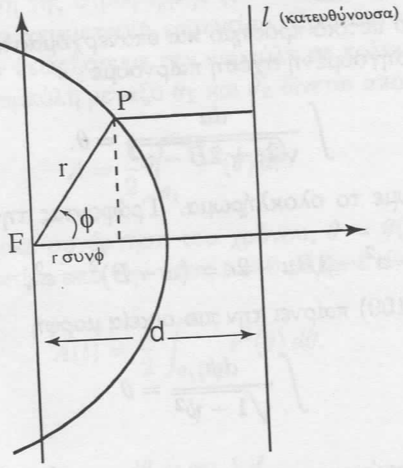
Προτιμούμε το συνημίτονο στην έκφραση της πολικής μορφής. Για το λόγο αυτό θέτουμε

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta\ ,\ e = \frac{c}{B}.$$

Τότε η (1.101) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= \frac{1}{B + c\cos\varphi} = \frac{\frac{1}{B}}{1 + \frac{c}{B}\cos\varphi} \\ &= \frac{\frac{e}{c}}{1 + e\cos\varphi} \\ &=: \frac{ed}{1 + e\cos\varphi}. \end{aligned}$$

Αυτή είναι η εξίσωση κωνικής τομής σε πολικές συντεταγμένες με τη μία εστία στην αρχή των αξόνων και την απόσταση της εστίας από την κατευθύνουσα ίση με $d\ \left(=\frac{1}{c}\right)$ (βλ. Σχήμα 1.14). Η σταθερά e λέγεται **εκκεντρικότητα** και ορίζεται ως ο λόγος της απόστασης του P από την εστία προς την απόσταση του P από την κατευθύνουσα. Ως γνωστόν η περίπτωση $e < 1$ αντιστοιχεί σε έλλειψη, η $e = 1$ σε παραβολή και η $e > 1$ σε υπερβολή. Στην περίπτωση της γης είναι $e \cong 0,017$. Υπενθυμίζουμε ότι η περίπτωση περιφέρειας κύκλου αντιστοιχεί σε $e = 0$. Η επαλήθευση του πρώτου νόμου είναι πλήρης.



Σχήμα 1.14: Στο σημείο F είναι η θέση του ήλιου και το P αντιπροσωπεύει τη γη που διαγράφει ελλειπτική τροχιά. Στην περίπτωση της γης ο κύριος άξονας της έλλειψης είναι $2,99 \times 10^8$χλμ.

Επανερχόμαστε τώρα στην εξήγηση του προσήμου. Έχουμε

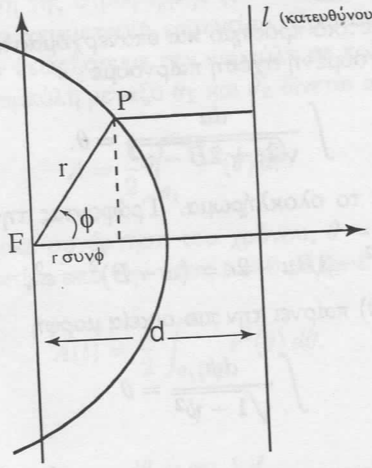
$$u' = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}.$$

Συνεπώς η επιλογή $u' \geq 0$ αντιστοιχεί στην $\frac{dr}{d\varphi} \geq 0$, δηλαδή στο αριστερό ήμισυ της έλλειψης (βλ. Σχήμα 1.15). Αντίθετα η επιλογή $u' \leq 0$ αντιστοιχεί στην $\frac{dr}{d\varphi} \leq 0$, δηλαδή στο δεξιό ήμισυ της έλλειψης.

Παράδειγμα 1.38 (Ο τρίτος νόμος του Kepler) Έστω T η περίοδος περιστροφής γύρω από τον ήλιο. Υποθέτουμε ότι a και b είναι τα μήκη των ημιαξόνων της ελλειπτικής τροχιάς, με $a > b$. Να δειχθεί ότι:

(α) $T = \frac{2\pi abm}{\ell}$,

Αυτή είναι η εξίσωση κωνικής τομής σε πολικές συντεταγμένες με τη μία εστία στην αρχή των αξόνων και την απόσταση της εστίας από την κατευθύνουσα ίση με $d \left(= \frac{1}{c}\right)$ (βλ. Σχήμα 1.14). Η σταθερά e λέγεται **εκκεντρικότητα** και ορίζεται ως ο λόγος της απόστασης του P από την εστία προς την απόσταση του P από την κατευθύνουσα. Ως γνωστόν η περίπτωση $e < 1$ αντιστοιχεί σε έλλειψη, η $e = 1$ σε παραβολή και η $e > 1$ σε υπερβολή. Στην περίπτωση της γης είναι $e \cong 0,017$. Υπενθυμίζουμε ότι η περίπτωση περιφέρειας κύκλου αντιστοιχεί σε $e = 0$. Η επαλήθευση του πρώτου νόμου είναι πλήρης.



Σχήμα 1.14: Στο σημείο F είναι η θέση του ήλιου και το P αντιπροσωπεύει τη γη που διαγράφει ελλειπτική τροχιά. Στην περίπτωση της γης ο κύριος άξονας της έλλειψης είναι $2,99 \times 10^8$χλμ.

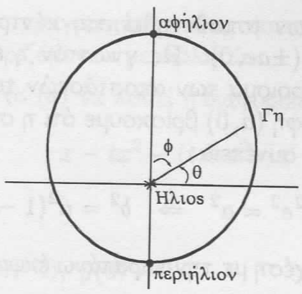
Επανερχόμαστε τώρα στην εξήγηση του προσήμου. Έχουμε

$$u' = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}.$$

Συνεπώς η επιλογή $u' \geq 0$ αντιστοιχεί στην $\frac{dr}{d\varphi} \geq 0$, δηλαδή στο αριστερό ήμισυ της έλλειψης (βλ. Σχήμα 1.15). Αντίθετα η επιλογή $u' \leq 0$ αντιστοιχεί στην $\frac{dr}{d\varphi} \leq 0$, δηλαδή στο δεξιό ήμισυ της έλλειψης.

Παράδειγμα 1.38 (Ο τρίτος νόμος του Kepler) Έστω T η περίοδος περιστροφής γύρω από τον ήλιο. Υποθέτουμε ότι a και b είναι τα μήκη των ημιαξόνων της ελλειπτικής τροχιάς, με $a > b$. Να δειχθεί ότι:

(α) $T = \frac{2\pi abm}{\ell}$,



Σχήμα 1.15: Η ελλειπτική τροχιά της γης γύρω από τον ήλιο.

(β) $\dfrac{\left(\frac{l}{m}\right)^2}{GM} = ed = \dfrac{b^2}{a},$

(γ) $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}a^3.$

Λύση : Από το δεύτερο νόμο του Kepler έχουμε

$$A(T) - A(0) = \frac{1}{2}\frac{\ell T}{m}.$$

Το εμβαδόν της έλλειψης ως γνωστόν είναι $ab\pi$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις παίρνουμε την (α). Το πρώτο σκέλος της (β) είναι αποτέλεσμα ορισμών και προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις

$$B = \frac{Gm^2M}{\ell^2},\ e = \frac{c}{B},\ d = \frac{1}{c}.$$

Το δεύτερο σκέλος της (β) είναι καθαρά γεωμετρικό. Υπενθυμίζουμε στοιχεία της πολικής μορφής

$$r(\varphi) = \frac{ed}{1 + e\cos\varphi}$$

και

$$\begin{aligned} 2a &= r(0) + r(\pi) = \frac{ed}{1+e} + \frac{ed}{1-e} \\ &= \frac{2ed}{1-e^2}, \end{aligned}$$

επομένως

$$a = \frac{ed}{1-e^2}.$$

Η απόσταση της εστίας F από το κέντρο της έλλειψης είναι ίση με

$$a - r(0) = a - \frac{ed}{1+e} = a - a(1-e) = ae.$$

Συνεπώς αν η αρχή των αξόνων τοποθετηθεί στο κέντρο της έλλειψης τότε οι συντεταγμένες των εστιών είναι $(\pm ae, 0)$. Ως γνωστόν η έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεών τους από τις δύο εστίες είναι σταθερό. Θεωρώντας την κορυφή $(a, 0)$ βρίσκουμε ότι η σταθερά είναι $2a$. Θεωρώντας την κορυφή $(0, b)$ έχουμε κατά συνέπεια

$$b^2 + a^2e^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2(1 - e^2).$$

Συνδυάζοντας τώρα αυτή τη σχέση με την παραπάνω έκφραση του a αποδεικνύουμε το δεύτερο σκέλος της (β).

Η (γ) τώρα προκύπτει αμέσως από τις (α) και (β). Πράγματι από την (β) έχουμε ότι

$$\frac{l}{m} = \left(\frac{GMb^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

οπότε από την (α) είναι

$$\begin{aligned} T &= 2\pi ab\frac{m}{\ell} = 2\pi ab\left(\frac{a}{GMb^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\pi a\left(\frac{a}{GM}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(αν και σε άλλη μορφή)

Επωδός

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε τις ρίζες των διαφορικών εξισώσεων. Οι τεχνικές και τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου αναπτύχθηκαν τον 17ο και 18ο αιώνα και αποδίδονται σε μεγάλο βαθμό στους Newton (Νεύτωνα), Leibniz, τους αδελφούς Bernoulli και τον Euler. Είναι εντυπωσιακό ότι ουσιαστικά με τα μαθηματικά της ενότητας 1.7 ο Νεύτωνας πέτυχε την περίφημη θεωρητική επαλήθευση των πειραματικών νόμων του Kepler στο βιβλίο του *Principia Mathematica* το 1687. Επειδή αυτά τα τόσο σημαντικά αποτελέσματα στην επιστήμη είναι εντός των πλαισίων αυτού του κεφαλαίου μεν, αλλά κάπως δυσκολότερα από τα περισσότερα παραδείγματα που δώσαμε, τα παραθέσαμε στο τέλος του κεφαλαίου.

1.11 Ασκήσεις

1.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$ty' = y(1 + y^2).$$

1.2 Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y'(t) = -3\left(y(t)\right)^{\frac{4}{3}} \sin t, \quad y(t_0) = y_0 > 0.$$

1.3 (α) Να δειχτεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$xf(tx) + tg(tx)x' = 0,$$