$1^η$ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $ν \in N^*$ ισχύει :

I. $1+2+3+...+ν = \frac{ν(ν+1)}{2}$.

II. $1+3+5+...+(2ν-1) = ν^2$.

III. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+ν(ν+1) = \frac{1}{3}ν(ν+1)(ν+2)$.

IV. $1^2+2^2+3^2+...+ν^2 = \frac{1}{6}ν(ν+1)(2ν+1)$.

V. $2^1+2^2+2^3+...+2^ν = 2^{ν+1} - 2$.

VI. $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots+\frac{1}{(3ν-2)(3ν+1)}=\frac{ν}{3ν+1}$.

2. Δίνεται η παρακάτω εσφαλμένη πρόταση με την απόδειξη της. Βρείτε που βρίσκεται το λάθος «Κάθε φυσικός αριθμός είναι ίσος με τον επόμενο του». Με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής υποθέτω ότι ισχύει η πρόταση για κάποιο φυσικό αριθμό κ. Τότε κ=κ+1. Θα αποδείξω ότι η πρόταση ισχύει για τον επόμενο του κ τον κ+1. Δηλαδή ότι κ+1 =κ+2. Επειδή κ=κ+1 από την υπόθεση προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον αριθμό 1 έχουμε ότι κ+1=κ+1+1 δηλαδή κ+1=κ+2. Άρα απόδειξα την αρχική εικασία.

3. **i)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $ν \in N^*$ ισχύει: $2+4+6+\cdots+2ν = ν(ν+1)$.

ii) Να δείξετε ότι η ισότητα $2+4+\cdots+2ν = ν(ν+1)-1$ αν αληθεύει για ν, τότε αληθεύει και για ν + 1. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $ν \in N^*$; Να τη συγκρίνετε με την ισότητα (i) και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $ν \in N^*$ για την οποία ισχύει η σχέση $2^ν > ν^2$. Στη συνέχεια να αποδειχθεί η σχέση για κάθε ν μεγαλύτερο ή ίσο από την τιμή που βρέθηκε.

5. Αν $α,β,γ,δ \in Z$, $α\neq0$, να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες (το σύμβολο $α\mid β$ σημαίνει ότι ο α διαιρεί τον β):

1. $α\mid β$, $β\neq0 \Rightarrow |α| \leq |β|$.
2. $α\mid β$ και $β\mid α \Rightarrow α = \pm β$.
3. $α\mid β$ και $α\mid γ \Rightarrow α\mid(χβ+ψγ)$, όπου $χ,ψ\in Z$.
4. $α\mid β$ και $γ\mid δ \Rightarrow αγ\mid βδ$.

6. Αποδείξτε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί ισχύουν πάντοτε, ισχύουν μερικές φορές, δεν ισχύουν ποτέ:

(α) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρεί δύο άλλους ακεραίους αριθμούς διαιρεί και τη διαφορά τους

(β) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρεί δύο άλλους ακεραίους αριθμούς διαιρεί και το γινόμενο τους

(γ) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρεί δύο άλλους ακεραίους αριθμούς διαιρεί και το πηλίκο τους (δ) Αν α είναι ένας ακέραιος αριθμός, τότε ο μόνο θετικός διαιρέτης του α και του α+1 είναι ο 1.

7. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid (\beta+1)$, δείξτε ότι α=1 ή α=-1.

8. Δίνονται α, β ακέραιοι αριθμοί, για τους οποίους ισχύει ότι $7|(\alpha+5)$ και $7|(19-\beta)$. Να δείξετε ότι $7|(\alpha+\beta)$.

9. Δίνεται ένας τετραψήφιος αριθμός αβγδ. Αποδείξτε για τον αριθμό αυτό το κριτήριο διαιρετότητας με το 3 (δηλαδή ότι ο αβγδ διαιρείται με το 3 αν και μόνο αν το άθροισμα α+β+γ+δ των ψηφίων του διαιρείται με το 3).

10. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει: $3 \mid 4^{\nu} - 1$.

11. Υπολογίστε με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο το ΜΚΔ των παρακάτω αριθμών:

α) 30 και 72.

β) 1769 και 2378.

12. Υπολογίστε με ανάλυση πρώτων παραγόντων το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των παρακάτω αριθμών:

α) 18 και 375.

β) 1769 και 2378.

13. i) Στη συγκέντρωση τροφίμων για άπορες οικογένειες συγκεντρώθηκαν 96 πακέτα μακαρόνια, 72 κουτιά γάλα και 48 πακέτα αλεύρι. Πόσα το πολύ ίδια δέματα μπορούν να γίνουν χωρίς να περισσέψει κανένα απ’ τα τρόφιμα που συγκεντρώθηκαν;

ii) Τρεις αντιπρόσωποι μίας εταιρείας συνηθίζουν όταν επιστρέφουν από τα ταξίδια τους να τρώνε μαζί. Αν ο Α χρειάζεται 6 ημέρες για να καλύψει την περιοχή του, ο Β χρειάζεται 9 ημέρες και ο Γ 12 ημέρες, να βρεθεί πόσο συχνά τρώνε μαζί.

14. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει: $6 \mid (\nu^3 - \nu)$.

15. Να αποδείξετε ότι:

(α) το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 2,

(β) το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 3.

16. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 3. Ισχύει αντίστοιχα για το άθροισμα τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων ότι διαιρείται με το 4;

17. Έστω α φυσικός αριθμός και ρ θετικός πρώτος αριθμός. Αν $\rho|\alpha^2$, να δείξετε ότι $\rho^2|\alpha^2$.

Μπορούμε με βάση το προηγούμενο να δείξουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος;

[Υπόδειξη: Θεωρείστε ότι $\sqrt{2} = \frac{\kappa}{\lambda}$ με (κ,λ)=1. Υψώστε στο τετράγωνο και οδηγηθείτε σε άτοπο].

18. Να αποδείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός ακεραίου α διαιρεθεί με το 4, τότε το υπόλοιπο είναι 0 ή 1.

19. Αν α,β ακέραιοι αριθμοί με (α,β)=1 (δηλαδή είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους), να δείξετε ότι:

1. (α+5β,β)=1.
2. (α, αβ+β)=1.