ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ
2018-2019
ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ:Κα.ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

- **ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**

***ΟΜΑΔΑ ΛΥΤΩΝ*:**
ΣΑΒΒΙΝΑ ΜΑΓΚΟΥ
ΙΩΑΝΝΑ ΝΑΣΗ
ΕΒΕΛΙΝΑ ΔΑΡΕΜΑ
ΡΑΦΑΗΛΙΑ ΦΕΡΜΑΝΗ

* Να βρεθούν όλες οι διαφορίσιμες συναρτήσεις f, $f(0)=-2$ για τις οποίες: $\underbrace{1+y^2\sin t}_{M(t,y)} + \underbrace{f(t)y}_{N(t,y)}\, y' = 0$ ① να είναι ακριβής και να λυθεί:

Η ① για να είναι ακριβής πρέπει: $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dt}$ δηλαδή:

$$\frac{d\,(1+y^2\sin t)}{dy}=\frac{d\,(f(t)y)}{dt}$$

$2y\sin t = f'(t)y$, $y\neq 0$.

$f'(t)=2\sin t$

$\left.\begin{array}{l} f(t)=-2\cos t+c \\ f(0)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow -2=-2\cos 0+c \Rightarrow c=0$

Άρα, $f(t)=-2\cos t$ και η ① γίνεται: $1+y^2\sin t-2\cos t\, y y'=0$

Έχω: $\frac{dM}{dy}=\frac{d\,(1+y^2\sin t)}{dy}=2y\sin t$

$\frac{dN}{dt}=\frac{d\,(-2\cos t\, y)}{dt}=2y\sin t$

δηλαδή $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dt}$ ② και η ① ακριβής.

Επομένως, υπάρχει F (γενική λύση $F(t,y)=c$) με $\frac{dF}{dt}=M=1+y^2\sin t$ ③

και $\frac{dF}{dy}=N=-2\cos t\cdot y$ ④

Ολοκληρώνω την ③ ως προς t: $F(t,y)=t-y^2\cos t+h(y)$ ⑤

Παραγωγίζω την ⑤ ως προς y και έχω: $h'(y)-\cancel{2y\cos t}=N=\cancel{-2y\cos t}$

Άρα, $h'(y)=0$ και συνεπώς $h(y)=c_1$ ⑥

Η ⑤ γίνεται: $F(t,y)=t-y^2\cos t+c_1=c_2$

δηλαδή: $\boxed{t-y^2\cos t=c_2-c_1=C \quad ⑦}$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση ⑦

* Να ελεγχθεί αν είναι ακριβής και να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$(t+y+1)\,dt+(t-y^2+3)\,dy=0$ ①

Ελέγχω: $\frac{dM}{dy}=\frac{d\,(t+y+1)}{dy}=1$

$\frac{dN}{dt}=\frac{d\,(t-y^2+3)}{dt}=1$

Παρατηρώ ότι: $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dt}$ ②

Άρα, η ① ακριβής.

Επομένως, υπάρχει F (Γενική Λύση $F(t,y)=c$) έτσι ώστε:

$\frac{dF}{dt} = M = \underset{③}{t+y+1}$ και $\frac{dF}{dy} = N = t-y^2+3$ ④

Ολοκληρώνω την ③ ως προς t: $F(t,y) = \frac{t^2}{2} + y \cdot t + t + h(y)$ ⑤

Παραγωγίζω την ⑤ ως προς y;

και συγκρίνω με την ④ : $h'(y) + \cancel{t} = \cancel{t} - y^2 + 3.$

$h'(y) = -y^2 + 3$ (Ολοκληρώνω ως προς y)

$h(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + c_1$ ⑥

Άρα, έχω: ⑤, ⑥ : $F(t,y) = \frac{t^2}{2} + yt + t - \frac{y^3}{3} + 3y + c_1 = c_2$

$$\boxed{\frac{t^2}{2} + yt + t - \frac{y^3}{3} + 3y = c_2 - c_1 = c'} \quad ⑦$$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση ⑦

* Να εξεταστούν οι: $e^y dt + (t \cdot e^y + 2y) dy = 0$

$(2ty + y \cdot e^t) dt + (t^2 + e^t) dy = 0$

Ⓐ $\underbrace{e^y}_{M(t,y)} dt + \underbrace{(t \cdot e^y + 2y)}_{N(t,y)} dy = 0$ ①

Ελέγχω την ① αν είναι ακριβής:

$\left.\begin{aligned} \frac{dM}{dy} &= \frac{d(e^y)}{dy} = e^y \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{d(t \cdot e^y + 2y)}{dt} = e^y \end{aligned}\right\}$ Άρα, $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dt}$ ② και η ① είναι ακριβής

Επομένως, υπάρχει F (Γενική Λύση $F(t,y)=c$) έτσι ώστε:

$\frac{dF}{dt} = M = \underset{③}{e^y}$ και $\frac{dF}{dy} = N = \underset{④}{t \cdot e^y + 2y}$

Ολοκληρώνω την ③ ως προς t: $F(t,y) = e^y t + h(y)$ ⑤

Παραγωγίζω την ⑤ ως προς y και συγκρίνω με την ④ :

$\cancel{e^y t} + h'(y) = \cancel{e^y t} + 2y$

$h'(y) = 2y$ (Ολοκληρώνω ως προς y)

$h(y) = y^2 + c_1.$ ⑥

Άρα, από: 5, 6: $F(t,y) = e^y t + y^2 + c_1 = c_2$

$$e^y \cdot t + y^2 = c_2 - c_1 = c$$

$$\boxed{t \cdot e^y + y^2 = c} \quad (7)$$

Η λύση της βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση 7

B $\underbrace{(2ty + y \cdot e^t)}_{M(t,y)} dt + \underbrace{(t^2 + e^t)}_{N(t,y)} dy = 0$ I

Ελέγχω την I: $\dfrac{dM}{dy} = \dfrac{d(2ty + y \cdot e^t)}{dy} = 2t + e^t$

$\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{d(t^2 + e^t)}{dt} = 2t + e^t$

Άρα, $\dfrac{dM}{dy} = \dfrac{dN}{dt}$ II και η I ακριβής.

Άρα, υπάρχει F (Γενική λύση $F(t,y) = c$) έτσι ώστε:

$\dfrac{dF}{dt} = M = 2ty + y \cdot e^t$ III και $\dfrac{dF}{dy} = N = t^2 + e^t$ IV

Ολοκληρώνω την III ως προς t: $F(t,y) = t^2 y + y \cdot e^t + h(y)$ V

Παραγωγίζω την V ως προς y και συγκρίνω με την IV:

$$\cancel{t^2} + \cancel{e^t} + h'(y) = \cancel{t^2} + \cancel{e^t}$$

$h'(y) = 0$ (Ολοκληρώνω ως προς y)

$h(y) = c_1$ VI

Άρα, V, VI: $F(t,y) = t^2 y + y \cdot e^t + c_1 = c_2$

$$\boxed{t^2 y + y \cdot e^t = c_2 - c_1 = c} \quad \text{VII}$$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση VII

* Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση: $\dfrac{y^2}{2} + 2ye^t + (y + e^t)y' = 0$ 1 αν είναι γνωστό ότι δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t)$

Η 1: $\underbrace{\dfrac{y^2}{2} + 2ye^t}_{M(t,y)} + \underbrace{(y + e^t)}_{N(t,y)} y' = 0$

Ελέγχω αν η 1 είναι ακριβής: $\dfrac{dM}{dy} = \dfrac{d\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^t\right)}{dy} =$

$= y + 2e^t$
$\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{d\,(y+e^t)}{dt} = e^t$ $\Bigg\}$ Άρα, $\dfrac{dM}{dy} \neq \dfrac{dN}{dt}$ και η ① όχι ακριβής.

Δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t)$. Άρα:

$\mu M_y = N \dfrac{d\mu}{dt} + \mu N_t$

$N \dfrac{d\mu}{dt} = \mu (M_y - N_t)$, $\mu \neq 0$

$\dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{d\mu}{dt} = \dfrac{M_y - N_t}{N}$ με $f(t) = \dfrac{M_y - N_t}{N}$

Άρα: $\dfrac{M_y - N_t}{N} = \dfrac{y + 2e^t - e^t}{y+e^t} = \dfrac{y+e^t}{y+e^t} = 1 = f(t)$ ②

Επομένως: $\ln|\mu(t)| = \int f(t)\,dt + c_1$

$|\mu(t)| = e^{c_1} \cdot e^{\int f(t)dt}$

$\mu(t) = \pm e^{c_1} \cdot e^{\int f(t)dt}$

$\mu(t) = c \cdot e^{\int f(t)dt}$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας: $\mu = \mu(t) = e^{\int f(t)dt}$

$= e^{\int 1\,dt} = e^t$ ③

Άρα, η ① γίνεται: $\underbrace{\frac{1}{2} e^t y^2 + 2ye^{2t}}_{\tilde{M}} + \underbrace{(ye^t + e^{2t})}_{\tilde{N}} y' = 0$ ④

$\dfrac{d\tilde{M}}{dy} = \dfrac{d\left(\frac{1}{2}e^t y^2 + 2ye^{2t}\right)}{dy} = \cancel{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}} e^t y + 2 \cdot e^{2t} = e^t y + 2e^{2t}$

$\dfrac{d\tilde{N}}{dt} = \dfrac{d\,(ye^t + e^{2t})}{dt} = y \cdot e^t + 2 \cdot e^{2t}$

Άρα, $\dfrac{d\tilde{M}}{dy} = \dfrac{d\tilde{N}}{dt}$ και η ④ ακριβής

Επομένως, υπάρχει F (Γενική Λύση $F(t,y) = c$), έτσι ώστε:

$$\frac{dF}{dt} = \tilde{M} = \frac{1}{2}e^t y^2 + 2ye^{2t} \quad (5) \quad \text{και} \quad \frac{dF}{dy} = \tilde{N} = y\cdot e^t + e^{2t} \quad (6)$$

Ολοκληρώνω την (5) ως προς t: $F(t,y) = \frac{1}{2}y^2 e^t + ye^{2t} + h(y)$ (7)

Παραγωγίζω την (7) ως προς y και συγκρίνω με (6): $\cancel{ye^t} + \cancel{e^{2t}} + h'(y) = \cancel{y\cdot e^t} + \cancel{e^{2t}}$

$h'(y) = 0$ (ολοκληρώνω ως προς y)

$h(y) = c_2$. (8)

Άρα (7) (8): $F(t,y) = \frac{1}{2}y^2 e^t + ye^{2t} + c_2 = C_3$

$$\frac{1}{2}y^2 e^t + ye^{2t} = C_3 - C_2$$

$$\boxed{y^2 e^t + 2ye^{2t} = 2C_3 - 2C_2 = C_K \quad (9)}$$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (9)

* Να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu(t+y^2)$ για τη διαφορική εξίσωση: $\underbrace{(3t + 2y + y^2)}_{M}dt + \underbrace{(t + 4ty + 5y^2)}_{N}dy = 0$ (1)

1.47/79 Βιβλίο

Ελέγχω

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d(3t+2y+y^2)}{dy} = 2y+2$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d(t+4ty+5y^2)}{dt} = 1+4y$$

$\frac{dM}{dy} \neq \frac{dN}{dt}$ και η (1) όχι ακριβής.

Δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(t+y^2)$ με $S(t,y) = t + y^2$

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{d\mu}{ds}\frac{ds}{dy} = 2y\frac{d\mu}{ds} \quad \text{και} \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\mu}{ds}\frac{ds}{dt} = 1\cdot\frac{d\mu}{ds}$$

Άρα, έχω: $2y\frac{d\mu}{ds} + \mu M_y = \frac{d\mu}{ds}N + \mu N_t$

$$(2yM - N)\frac{d\mu}{ds} = \mu(N_t - M_y) \quad , \mu \neq 0.$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds} = \frac{N_t - M_y}{2yM - N} = h(s). \quad (2)$$

$$\hat{g}(s) = \frac{N_t - M_y}{2yM - N} = \frac{1+4y-2y-2}{6yt+4y^2+2y^3-t-4ty-5y^2} = \frac{2y-1}{2ty-y^2+2y^3-t}$$

$$= \frac{2y-1}{t(2y-1)+y^2(2y-1)} = \frac{2y-1}{(2y-1)(t+y^2)} = \frac{1}{\underbrace{t+y^2}_{s}}$$

Άρα: $\mu = \mu(s) = e^{\int \frac{1}{s} ds} = e^{\ln s} = s = t+y^2$ (3)

Άρα, (1)(3): $dt\,(t+y^2)(3t+2y+y^2) + (t+y^2)(t+4ty+5y^2)\,dy = 0$

$dt(3t^2+2yt+y^2t+3y^2t+2y^3+y^4) + (t^2+4t^2y+5ty^2+y^2t+4ty^3+5y^4)dy = 0$

$$\underbrace{(4y^2t+2yt+2y^3+y^4+3t^2)}_{\tilde{M}}dt + \underbrace{(6y^2t+4t^2y+4ty^3+5y^4+t^2)}_{\tilde{N}}dy = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d\tilde{M}}{dy} = \frac{d(4y^2t+2yt+2y^3+y^4+3t^2)}{dy} = 8yt+2t+6y^2+4y^3$$

$$\frac{d\tilde{N}}{dt} = \frac{d(6y^2t+4t^2y+4ty^3+5y^4+t^2)}{dt} = 6y^2+8ty+4y^3+2t$$

Άρα, $\frac{d\tilde{M}}{dy} = \frac{d\tilde{N}}{dt}$ και η (4) ακριβής.

Άρα, υπάρχει F (Γενική Λύση $F(t,y)=c$) έτσι ώστε:

$\frac{dF}{dt} = \tilde{M} = 4y^2t+2yt+2y^3+y^4+3t^2$ (5) και

$\frac{dF}{dy} = \tilde{N} = 6y^2t+4t^2y+4ty^3+5y^4+t^2$ (6)

Ολοκληρώνω ως προς t την (5):

$F(t,y) = 2y^2t^2+yt^2+2y^3t+y^4t+t^3+h(y)$ (7)

Παραγωγίζω την (7) ως προς y και τη συγκρίνω με την (6):

$$h'(y) + \cancel{4y^3t} + \cancel{6y^2t} + \cancel{t^2} + \cancel{4yt^2} = \cancel{6y^2t} + \cancel{4t^2y} + \cancel{4ty^3} + 5y^4 + \cancel{t^2}$$

$h'(y) = 5y^4$

$h(y) = y^5 + C_1$ (8)

Άρα από (7), (8): $F(t,y) = 2y^2t^2 + yt^2 + 2y^3t + y^4t + t^3 + y^5 + C_1 = C_2$

$$\boxed{2y^2t^2 + yt^2 + 2y^3t + y^4t + t^3 + y^5 = C_2 - C_1 = C} \quad (9)$$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (9)

* Να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(xy)$, $S(x,y) = (x,y)$ για την: $\underbrace{(x^2y + y^2)}_{M}dx \underbrace{- x^3}_{N} dy = 0$ (1)

Ελέγχω:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d(x^2y + y^2)}{dy} = x^2 + 2y$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d(-x^3)}{dx} = -3x^2$$

Άρα, $\frac{dM}{dy} \neq \frac{dN}{dx}$ και η (1) όχι ακριβής

Αναζητώ ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής: $\mu = \mu(xy)$ με $S(x,y) = (xy)$

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{d\mu}{ds}\frac{ds}{dy} = x\frac{d\mu}{ds} \quad \text{και} \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{d\mu}{ds}\frac{ds}{dx} = y\frac{d\mu}{ds}$$

Άρα: $xM\frac{d\mu}{ds} + \mu M_y = y\frac{d\mu}{ds}N + \mu N_x$

$$\frac{d\mu}{ds}(xM - yN) = \mu(N_x - M_y) \quad \mu \neq 0$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds} = \frac{N_x - M_y}{xM - yN} \quad \text{με } h(s) = \frac{N_x - M_y}{xM - yN} \quad (2)$$

$$g(s) = \frac{-3x^2 - x^2 - 2y}{x^3y + xy^2 + yx^3} = \frac{-4x^2 - 2y}{2x^3y + xy^2} = \frac{-2(2x^2 + y)}{xy(2x^2 + y)} = \frac{-2}{xy} \to S$$

$$= \frac{-2}{S}, \quad S \neq 0$$

Άρα: $\ln|\mu(s)| = \int g(s)\,ds + C_1$

$$|\mu(s)| = e^{\int g(s)ds} \cdot e^{C_1}$$

$$\mu(s) = \pm e^{C_1} \cdot e^{\int g(s)ds} \quad \text{και} \quad \mu(s) = c \cdot e^{\int g(s)ds}$$

$$\int h(s)\,ds \qquad \int -\frac{2}{s}ds$$

Άρα, έχω: $\mu=\mu(x,y)=\mu(s)=e^{\int h(s)ds}=e^{\int -\frac{2}{s}ds}=e^{-2\ln s}=e^{\ln s^{-2}}$
$=s^{-2}=\frac{1}{s^2}=\frac{1}{x^2y^2}$, $x,y\neq 0$ (3)

Άρα, από (1),(3): $\frac{1}{x^2y^2}(x^2y+y^2)dx-\frac{1}{x^2y^2}x^3dy=0$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x^2}\right)}_{\tilde{M}}dx-\underbrace{\frac{1\cdot x}{y^2}}_{\tilde{N}}dy=0 \quad (4)$$

Άρα: $\frac{d\tilde{M}}{dy}=\frac{d\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x^2}\right)}{dy}=-\frac{1}{y^2}$

$\frac{d\tilde{N}}{dx}=\frac{d\left(-\frac{x}{y^2}\right)}{dx}=\frac{-1}{y^2}$

Άρα, η (4) είναι ακριβής αφού $\frac{d\tilde{M}}{dy}=\frac{d\tilde{N}}{dx}$

Άρα, υπάρχει F (Γενική λύση $F(x,y)=c$) έτσι ώστε:
$\frac{dF}{dy}=\tilde{N}=\frac{-x}{y^2}$ (5) και $\frac{dF}{dx}=\tilde{M}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x^2}$ (6)

Ολοκληρώνω την (6) ως προς x: $F(x,y)=\frac{1}{y}x-\frac{1}{x}+h(y)$ (7)
Παραγωγίζω την (7) ως προς y και συγκρίνω με (5): $-\frac{1}{\cancel{y^2}}\cdot x+h'(y)=\frac{-x}{\cancel{y^2}}$

$h'(y)=0$ (Ολοκληρώνω ως προς y)
$h(y)=c_2$ (8)

Άρα, (7),(8): $F(x,y)=\frac{1}{y}x-\frac{1}{x}+c_2=c_3$

$$\boxed{\frac{1}{y}x-\frac{1}{x}=c_3-c_2=c_k \quad (9)}$$

Άρα, η λύση της είναι σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση 9

*(Παραλλαγή) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $(x^2y+y^2)dx - x^3dy = 0$ αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής: $\mu = \mu(x,y) = x^\alpha y^\beta$ ② για να γίνει ακριβής

Αφού η ① δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα ②:

$$(x^\alpha y^\beta)(x^2y+y^2)\,dx - (x^\alpha y^\beta)x^3\,dy = 0$$

$$(x^{\alpha+2}y^{\beta+1} + x^\alpha y^{\beta+2})\,dx - x^{\alpha+3}y^\beta\,dy = 0 \quad ③$$

Η ③ για να είναι ακριβής:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d(x^{\alpha+2}y^{\beta+1} + x^\alpha y^{\beta+2})}{dy} = (\beta+1)x^{\alpha+2}y^\beta + (\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1}$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d(-x^{\alpha+3}y^\beta)}{dx} = -(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^\beta \quad \text{πρέπει } \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \Longleftrightarrow$$

$$(\beta+1)x^{\alpha+2}y^\beta + (\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1} = -(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^\beta$$

$$\begin{cases} \beta+1 = -\alpha-3 \\ \beta+2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = -2. \end{cases}$$

και άρα $\mu = \mu(x,y) = x^{-2}y^{-2} = \dfrac{1}{x^2y^2}$. Η συνέχεια όπως πριν.

* Να βρεθεί η γενική λύση της: $2t^2+2y^2+t+(t^2+y^2+y)y' = 0$ ① αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t^2+y^2)$

Έχω: $\dfrac{d\mu}{dy}M + \mu M_y = \dfrac{d\mu}{dt}N + \mu N_t$ Ⓐ και $S(t,y) = t^2+y^2$

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{d\mu}{ds}\frac{ds}{dy} = 2y\frac{d\mu}{ds} \;② \quad \text{και} \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\mu}{ds}\frac{ds}{dt} = 2t\frac{d\mu}{ds} \;③$$

Άρα, από Ⓐ, ②, ③: $2y\dfrac{d\mu}{ds}M + \mu M_y = 2tN\dfrac{d\mu}{ds} + \mu N_t$

$$\frac{d\mu}{ds}(2yM - 2tN) = \mu(N_t - M_y), \quad \mu \neq 0$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds} = \frac{N_t - M_y}{2yM - 2tN} \quad \text{με} \quad \hat{g}(s) = \frac{N_t - M_y}{2yM - 2tN} \;④$$

$$\ln|\mu(s)| = \int g(s)\,ds + c_1$$

$$|\mu(s)| = e^{c_1} \cdot e^{\int g(s)\,ds}$$

$$(\mu(s)) = \pm e^{c_1} \cdot e^{\int g(s)\,ds}$$

$$\mu(s) = c \cdot e^{\int g(s)\,ds}$$

Άρα, ④ $g(s) = \dfrac{2t-4y}{4yt^2+4y^3+\cancel{2yt}-2t^3-2ty^2-\cancel{2ty}}$

$$= \frac{2t-4y}{4y^3-2t^3-2ty^2+4yt^2} = \frac{2(t-2y)}{-2t^2(t-2y)-2y^2(t-2y)}$$

$$= \frac{2\cancel{(t-2y)}}{\cancel{(t-2y)}(-2t^2-2y^2)} = \frac{2}{-2t^2-2y^2} = \frac{\cancel{2}}{-\cancel{2}(t^2+y^2)}$$

$$= \frac{1}{-t^2-y^2} = -\frac{1}{\underbrace{t^2+y^2}_{s}}, \quad s \neq 0$$

Άρα, $\mu = \mu(s) = e^{\int g(s)\,ds} = e^{\int -\frac{1}{s}\,ds} = e^{-\ln s} = e^{\ln s^{-1}} = s^{-1} = \dfrac{1}{s}$

$$= \frac{1}{t^2+y^2}, \quad t, y \neq 0 \quad ⑤$$

Άρα, η ① $\xRightarrow{⑤}$ γίνεται:

$$\frac{1}{t^2+y^2}(2t^2+2y^2+t) + \frac{1}{t^2+y^2}(t^2+y^2+y)\,y' = 0 \quad ⑥$$

$$\left(\frac{2(t^2+y^2)}{t^2+y^2} + \frac{t}{t^2+y^2}\right) + \left(\frac{t^2+y^2}{t^2+y^2} + \frac{y}{t^2+y^2}\right) y' = 0$$

$$\underbrace{\left(2+\frac{t}{t^2+y^2}\right)}_{\tilde{M}}+\underbrace{\left(1+\frac{1}{t^2+y^2}y\right)}_{\tilde{N}}y'=0$$

$$\frac{d\tilde{M}}{dy}=\frac{d\left(2+\frac{t}{t^2+y^2}\right)}{dy}=\frac{-2yt}{(t^2+y^2)^2}$$

$$\frac{d\tilde{N}}{dt}=\frac{d\left(1+\frac{1}{t^2+y^2}y\right)}{dt}=\frac{-2ty}{(t^2+y^2)^2}$$

Άρα, $\frac{d\tilde{M}}{dy}=\frac{d\tilde{N}}{dt}$ και η ⑥ ακριβής.

Επομένως, υπάρχει F (Γενική Λύση $F(x,y)=c$) έτσι ώστε:

$\frac{dF}{dt}=\tilde{M}=2+\frac{t}{t^2+y^2}$ ⑦ και $\frac{dF}{dy}=\tilde{N}=1+\frac{y}{t^2+y^2}$ ⑧

Ολοκληρώνω την ⑦ ως προς t: $F(t,y)=2t+\frac{1}{2}\ln(t^2+y^2)+h(y)$ ⑨

Παραγωγίζω την ⑨ ως προς y και συγκρίνω με ⑧:

$$\cancel{\frac{1}{2}}\frac{\cancel{2}y}{t^2+y^2}+h'(y)=1+\frac{y}{t^2+y^2}\Rightarrow h'(y)=1$$

$$h(y)=y+c_2 \quad ⑩$$

Άρα, ⑨,⑩: $F(t,y)=2t+\frac{1}{2}\ln(t^2+y^2)+y+c_2=c_3$

$$\boxed{2t+\frac{1}{2}\ln(t^2+y^2)+y=c_3-c_2=c_k \quad ⑪}$$

Η λύση της βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση ⑪

$*$ $\underbrace{(3ty+y^2)}_{M}dt+\underbrace{(3ty+t^2)}_{N}dy=0$ με $\mu=\mu(t+y)$.

$\frac{dM}{dy}=\frac{d(3ty+y^2)}{dy}=2y+3t$ και $\frac{dN}{dt}=\frac{d(3ty+t^2)}{dt}=3y+2t$

Άρα $\frac{dM}{dy} \neq \frac{dN}{dt}$ και η ① όχι ακριβής

Η ① δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu = \mu(t+y)$ με $S(t,y) = t+y$

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{d\mu}{ds}\frac{ds}{dy} = 1\frac{d\mu}{ds}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d\mu}{ds}\frac{ds}{dt} = 1\frac{d\mu}{ds}$$

Άρα: $1 \cdot \frac{d\mu}{ds} M + \mu M_y = 1 \cdot \frac{d\mu}{ds} N + \mu N_t$

$$\frac{d\mu}{ds}(M-N) = \mu(N_t - M_y) \quad , \mu \neq 0$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds} = \frac{N_t - M_y}{M-N} \quad \text{με } \phi(s) = \frac{N_t - M_y}{M-N} \quad ②$$

$$\ln|\mu(s)| = \int \varphi(s)\,ds + c_1$$

$$|\mu(s)| = e^{c_1} \cdot e^{\int \varphi(s) ds}$$

$$\mu(s) = \pm e^{c_1} \cdot e^{\int \varphi(s) ds}$$

$$\mu(s) = c \cdot e^{\int \varphi(s) ds}$$

Άρα ②: $\phi(s) = \frac{3y + 2t - 2y - 3t}{\cancel{3ty} + y^2 - \cancel{3ty} - t^2} = \frac{y-t}{y^2-t^2} = \frac{y-t}{(y-t)(y+t)}$

$= \frac{1}{\underbrace{y+t}_{s}} \quad S \neq 0 \quad , y \neq t, -t$

Άρα, $\mu = \mu(t+y) = \mu(s) = e^{\int \frac{1}{s} ds} = e^{\ln s} = s = y+t$ ③

Άρα, η ① $\xrightarrow{③}$ γίνεται:

$$(y+t)(3ty + y^2)\,dt + (t+y)(3ty + t^2)\,dy = 0$$

$$\underbrace{(3ty^2 + y^3 + 3t^2y + y^2t)}_{\tilde{M}}\,dt + \underbrace{(3t^2y + t^3 + 3ty^2 + yt^2)}_{\tilde{N}}\,dy = 0 \quad ④$$

$$\frac{d\tilde{M}}{dy} = \frac{d\,(3ty^2 + y^3 + 3t^2y + y^2t)}{dy} = 6ty + 3y^2 + 3t^2 + 2ty$$

$$\frac{d\tilde{N}}{dt} = \frac{d(3t^2y + t^3 + 3ty^2 + yt^2)}{dt} = 3t^2 + 2yt + 6ty + 3y^2$$

Άρα $\frac{d\tilde{M}}{dy} = \frac{d\tilde{N}}{dt}$ και η ④ ακριβής

Επομένως υπάρχει F (Γενική Λύση $F(t,y) = c$) έτσι ώστε:

$$\frac{dF}{dt} = \tilde{M} = 3ty^2 + y^3 + 3t^2y + y^2t \quad ⑤ \quad \text{και}$$

$$\frac{dF}{dy} = \tilde{N} = 3t^2y + t^3 + 3ty^2 + yt^2 \quad ⑥$$

Ολοκληρώνω την ⑤ ως προς t: $F(t,y) = y^3t + t^3y + y^2\frac{t^2}{2} + 3\frac{1}{2}t^2y^2 + h(y)$ ⑦

Παραγωγίζω την ⑦ ως προς y και συγκρίνω με ⑥:

$$h'(y) + \cancel{3y^2t} + \cancel{t^3} + \cancel{yt^2} + \cancel{3t^2y} = \cancel{3t^2y} + \cancel{t^3} + \cancel{3ty^2} + \cancel{yt^2}$$

$h'(y) = 0$ (Ολοκληρώνω ως προς y)

$h(y) = C_2$ ⑧

Άρα ⑦ $\overset{⑧}{\Rightarrow}$ $F(t,y) = y^3t + t^3y + y^2\frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}t^2y^2 + C_2 = C_3$

$$\boxed{y^3t + t^3y + y^2\frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}t^2y^2 = C_3 - C_2 = C_K} \quad ⑨$$

Η λύση της ① βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση 9

* Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου ($\lambda \in \mathbb{R}$) για την οποία η διαφορική εξίσωση: $ty^2 + \lambda t^2y + t^2(t+y)y' = 0$ είναι ακριβής και να λυθεί η διαφορική εξίσωση για αυτήν την τιμή του λ.

$$\underbrace{ty^2 + \lambda t^2 y}_{M} + \underbrace{t^2(t+y)}_{N} y' = 0 \quad ①$$

Για να είναι η ① ακριβής: $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dt}$

$$\frac{d(ty^2 + \lambda t^2y)}{dy} = \frac{d(t^2(t+y))}{dt} \Leftrightarrow \cancel{2ty} + \lambda t^2 = 3t^2 + \cancel{2ty} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 3}$$

Άρα, η ① γίνεται: $ty^2 + 3t^2y + t^2(t+y)y' = 0$

Άρα, αφού για $\lambda = 3$ η ① είναι ακριβής σημαίνει ότι υπάρχει F (Γενική Λύση $F(t,y) = c$) έτσι ώστε:

$\frac{dF}{dt} = M = ty^2 + 3t^2y$ ② και $\frac{dF}{dy} = t^2(t+y) = N$ ③

Ολοκληρώνω την ② ως προς t: $F(t,y) = \frac{1}{2}t^2y^2 + t^3y + h(y)$ ④

Παραγωγίζω την ④ ως προς y και συγκρίνω με ③:

$$t^2y + t^3 + h'(y) = t^2(t+y)$$

$$\cancel{t^2y} + \cancel{t^3} + h'(y) = \cancel{t^3} + \cancel{t^2y}$$

$h'(y) = 0$ (Ολοκληρώνω ως προς y)

$h(y) = C_1$. ⑤

Άρα ④,⑤: $F(t,y) = \frac{1}{2}t^2y^2 + t^3y + C_1 = C_2$

$$\boxed{\frac{1}{2}t^2y^2 + t^3y = C_2 - C_1 = C \qquad ⑥}$$

Η λύση της βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση ⑥

* Να αποδειχθεί ότι: $(\alpha xy^2 + \beta y)dx + (\beta x^2y + \alpha x)dy = 0$ ① είναι ακριβής μόνο αν $\alpha = \beta$. Αν $\alpha \neq \beta$ δείξτε ότι x^my^n ολοκληρωτικός παράγοντας με $m = \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta}$, $n = \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta}$ 1.43/79 Βιβλίο

Για να είναι η ① ακριβής πρέπει: $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$.

$\frac{dM}{dy} = \frac{d(\alpha xy^2 + \beta y)}{dy} = 2\alpha xy + \beta$

$\frac{dN}{dx} = \frac{d(\beta x^2y + \alpha x)}{dx} = 2\beta xy + \alpha$

$2\alpha \cancel{xy} + \cancel{\beta} = 2\beta \cancel{xy} + \alpha$

$\alpha = \beta$

Αν $\alpha \neq \beta$ δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα x^my^n τότε η ① παίρνει τη μορφή: $x^my^n(\alpha xy^2 + \beta y)dx + (\beta x^2y + \alpha x)x^my^n dy = 0$

$$(\alpha x^{m+1} y^{n+2} + \beta y^{n+1} x^{m})\,dx + (\beta x^{2+m} y^{n+1} + \alpha x^{m+1} y^{n})\,dy = 0.$$

με $\tilde{M} = \alpha x^{m+1} y^{n+2} + x^{m} \beta y^{n+1}$ και $\tilde{N} = \beta x^{m+2} y^{n+1} + \alpha x^{m+1} y^{n}$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = (n+2) y^{n+1} \alpha x^{m+1} + (n+1) y^{n} \beta x^{m} \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = (m+2) \beta x^{m+1} y^{n+1} + (m+1) \alpha x^{m} y^{n} \quad \text{, οπότε:}$$

$$\left.\begin{array}{l} (n+2)\alpha = \beta(m+2) \\ (n+1)\beta = (m+1)\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \alpha(n+2) = \beta(m+2) \\ \alpha(m+1) = \beta(n+1) \end{array} \oplus$$

$$\alpha(n+m+3) = \beta(n+m+3)$$

$(\alpha-\beta)(n+m+3) = 0$ και αφού $\alpha \neq \beta$

$$m+n = -3 \Leftrightarrow m = -3-n.$$

Άρα: $\alpha(n+2) = \beta(-3-n+2)$

$\alpha n + 2\alpha = -3\beta - \beta n + 2\beta$

$\alpha n + 2\alpha = -\beta - \beta n$

$\alpha n + \beta n = -\beta - 2\alpha$

$(\alpha+\beta) n = -(2\alpha+\beta) \overset{\alpha \neq \beta}{\Leftrightarrow}$

$$n = -\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}$$

Άρα, τότε: $m = -3-n$

$$\boxed{m = -3 + \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$m = \frac{-3(\alpha+\beta) + 2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow m = \frac{-3\alpha-3\beta+2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow m = \frac{-\alpha-2\beta}{\alpha+\beta}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m = -\frac{2\beta+\alpha}{\alpha+\beta}}$$

* Έστω η διαφορική εξίσωση $M(t,y) + N(t,y)\dfrac{dy}{dt} = 0$ και

$$g(ty) = \frac{1}{yN - tM}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dt}\right)$$

Να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(ty)$ για την $(t^2y + y^2)dt - t^3 dy = 0$.

Αναζητώ ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(ty)$ με $S(t,y) = ty$.

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{d\mu}{ds}\frac{ds}{dy} = t \cdot \frac{d\mu}{ds} \quad \text{και} \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\mu}{ds}\frac{ds}{dt} = y\frac{d\mu}{ds}$$

Άρα η: $\dfrac{d\mu}{dy} M + \mu \dfrac{dM}{dy} = \dfrac{d\mu}{dt} N + \mu\dfrac{dN}{dt}$ γίνεται:

$$tM\frac{d\mu}{ds} + \mu\frac{dM}{dy} = yN\frac{d\mu}{ds} + \mu\frac{dN}{dt}$$

$$\frac{d\mu}{ds}(yN - tM) = \mu\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dt}\right) \quad \mu \neq 0$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds}(yN - tM) = \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dt}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds} = \underbrace{\frac{1}{yN - tM}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dt}\right)}_{h(s)} \quad (yN \neq tM)$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds} = h(s).$$

$$\ln|\mu(s)| = \int h(s)\,ds + c_1$$

$$|\mu(s)| = e^{c_1} \cdot e^{\int h(s)ds}$$

$$\mu(s) = \pm e^{c_1} \cdot e^{\int h(s)ds}$$

$$\mu(s) = c \cdot e^{\int h(s)ds}$$

* Να λυθεί : $y^2 dt + (ty-1)\,dy = 0$, $y>0$ αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα $t^a y^\beta$.

Αφού $t^a y^\beta$ ολοκληρωτικός παράγοντας:

$$\underbrace{t^a y^{\beta+2}}_{\bar{M}} dt + \underbrace{\left(t^{a+1} y^{\beta+1} - t^a y^\beta\right)}_{\bar{N}} dy = 0 \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\bar{M}}{dy} = \dfrac{d\left(t^a y^{\beta+2}\right)}{dy} = (\beta+2)\, t^a y^{\beta+1} \\[2ex] \dfrac{d\bar{N}}{dt} = \dfrac{d\left(t^{a+1} y^{\beta+1} - t^a y^\beta\right)}{dt} = (a+1)\, t^a y^{\beta+1} - a\, t^{a-1} y^\beta \end{array}\right\} \dfrac{d\bar{M}}{dy} = \dfrac{d\bar{N}}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+1 = \beta+2 \\ a = 0 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \mu = \mu(t,y) = t^0 y^{-1} = \frac{1}{y}$$ ο ολοκληρωτικός παράγοντας.

Άρα (1): $\dfrac{1}{y} y^2 dt + \dfrac{1}{y}(ty-1)\,dy = 0$

$$y\,dt + \left(t - \frac{1}{y}\right) dy = 0$$

$\dfrac{dM}{dy} = \dfrac{d(y)}{dy} = 1$ και $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{d\left(t - 1/y\right)}{dt} = 1$. Άρα, η (1) ακριβής και συνεπώς υπάρχει F (Γενική λύση $F(t,y)=0$) έτσι ώστε:

$\dfrac{dF}{dt} = M = y$ (2) και $\dfrac{dF}{dy} = N = t - \dfrac{1}{y}$ (3)

Ολοκληρώνω τη (2) ως προς t: $F(t,y) = t\cdot y + h(y)$ (4)

Παραγωγίζω την (4) ως προς y και συγκρίνω με (3):

$h'(y) + \cancel{t} = \cancel{t} - \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow h'(y) = -\dfrac{1}{y}$

$h(y) = -\ln y + c_1$ (5)

Άρα (4),(5): $F(t,y) = t\cdot y + c_1 - \ln y = c_2$

$$\boxed{ty - \ln y = c_2 - c_1 = c \quad (6)}$$

Η λύση της βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (6)

1.46/79 Βιβλίο.

* Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $3t + \frac{6}{x} + \left(\frac{t^2}{x} + \frac{3x}{t}\right)x' = 0$ αν έχει ολο-
-κληρωτικό παράγοντα της μορφής

$\mu(t,x) = t^a x^b$

$$3t + \frac{6}{x} + \left(\frac{t^2}{x} + \frac{3x}{t}\right)\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \left(3t + \frac{6}{x}\right)dt + \left(\frac{t^2}{x} + \frac{3x}{t}\right)dx = 0$$

$$t^a x^b\left(3t + \frac{6}{x}\right)dt + t^a x^b\left(\frac{t^2}{x} + \frac{3x}{t}\right)dx = 0$$

$$(\underbrace{3t^{a+1}x^b + 6t^a x^{b-1}}_{N})dt + (\underbrace{t^{a+2}x^{b-1} + 3x^{b+1}t^{a-1}}_{M})dx = 0 \quad ①$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\left(t^{a+2}x^{b-1} + 3x^{b+1}t^{a-1}\right)}{dt} = (a+2)t^{a+1}x^{b-1} + 3x^{b+1}(a-1)t^{a-2}$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d\left(3t^{a+1}x^b + 6t^a x^{b-1}\right)}{dx} = bx^{b-1}3t^{a+1} + (b-1)6t^a x^{b-2}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dN}{dx} \Leftrightarrow bx^{b-1}3t^{a+1} + (b-1)6t^a x^{b-2} = (a+2)t^{a+1}x^{b-1} + 3x^{b+1}(a-1)t^{a-2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b = a+2 \\ 6(b-1) = 0 \\ 3(a-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 1+2 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \quad \text{άρα } \mu(t,x) = t^1x^1 = tx.$$

Άρα ①: $(3t^2x^1 + 6tx^0)dt + (t^3x^0 + 3x^2t^0)dx = 0$

$$dt(\underbrace{3t^2x + 6t}_{\tilde{M}}) + (\underbrace{t^3 + 3x^2}_{\tilde{N}})dx = 0$$

$$\frac{d\tilde{M}}{dx} = \frac{d(3t^2x + 6t)}{dx} = 3t^2 \quad \text{και} \quad \frac{d\tilde{N}}{dt} = \frac{d(t^3 + 3x^2)}{dt} = 3t^2.$$

Άρα, η ① ακριβής. Επομένως, υπάρχει F(Γενική λύση $F(t,x) = c$)
έτσι ώστε: $\frac{dF}{dt} = \tilde{M}$ και $\frac{dF}{dx} = \tilde{N}$

$$\frac{dF}{dt} = 3t^2x + 6t \quad ② \quad \text{και} \quad \frac{dF}{dx} = t^3 + 3x^2 \quad ③$$

Ολοκληρώνω τη ② ως προς t: $F(t,x) = t^3x + 3t^2 + h(x)$ ④

Παραγωγίζω την ④ ως προς x και τη συγκρίνω με τη ③ :

$h'(x) + \cancel{t^3} = \cancel{t^3} + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2$

$h(x) = x^3 + C_1$ ⑤

Άρα, ④,⑤ : $F(t,x) = t^3x + 3t^2 + x^3 + c_1 = C_2$

$\boxed{t^3x + 3t^2 + x^3 = c_2 - c_1 = C}$ ⑥

Η λύση της βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση ⑥

* 1.36/76 Βιβλίο

Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 - 2y)dy = 0$ ① είναι ακριβής και να υπολογιστεί η γενική λύση της.

Θεωρώ $M = 2xy - 3x^2$ και $N = x^2 - 2y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2xy - 3x^2)}{\partial y} = 2x$ και $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 - 2y)}{\partial x} = 2x$

Επομένως, η ① είναι ακριβής και επομένως υπάρχει γενική λύση $F(x,y) = c$, έτσι ώστε: $\frac{\partial F}{\partial x} = M = 2xy - 3x^2$ ② και $\frac{\partial F}{\partial y} = N = x^2 - 2y$ ③

Ολοκληρώνω την ② ως προς x: $F(x,y) = x^2y - x^3 + h(y)$ ④

Παραγωγίζω την ④ ως προς y και συγκρίνω με την ③ :

$x^2 + h'(y) = x^2 - 2y \Rightarrow h'(y) = -2y \Rightarrow h(y) = -y^2 + C_1$. ⑤

Επομένως, η ④ : $F(x,y) = x^2y - x^3 - y^2 + c_1 = C_2$

$x^2y - x^3 - y^2 = c_2 - c_1$ με $c_2, c_1, c \in \mathbb{R}$.

$\boxed{x^2y - x^3 - y^2 = c.}$ ⑥

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση 6.

* 1.37/76 Βιβλίο

Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$ ① είναι ακριβής και να υπολογιστεί η γενική της λύση.

Θεωρώ $M = \frac{y}{x^2}$ και $N = -\frac{1}{x}$.

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{y}{x^2}\right)}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$ και $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{x}\right)}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$ και η ① είναι ακριβής. Επομένως, υπάρχει γενική λύση $F(x,y)=c_1$, έτσι ώστε:

$\frac{\partial F}{\partial x}=M=\frac{y}{x^2}$ ② και $\frac{\partial F}{\partial y}=N=-\frac{1}{x}$ ③

Ολοκληρώνω την ② ως προς x: $F(x,y)=-\frac{1}{x}y+h(y)$ ④

Παραγωγίζω την ④ ως προς y και συγκρίνω με την ③:

$-\frac{1}{x}+h'(y)=-\frac{1}{x} \Rightarrow h'(y)=0 \Rightarrow h(y)=c_1$ ⑤

Άρα, ④ $\overset{⑤}{\Rightarrow}$ $\underline{F(x,y)}=-\frac{1}{x}y+c_1=c_2$

$c_1, c_2, c \in \mathbb{R}$

$-\frac{1}{x}y=c_2-c_1 \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{x}y=c}$ ⑥

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση ⑥

* 1.38/76 Βιβλίο

Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση: $y\cdot e^{xy}dx+(3+xe^{xy})dy=0$ ①
είναι ακριβής και να υπολογιστεί η λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0)=0$

Θεωρώ $M=y\cdot e^{xy}$ και $N=x\cdot e^{xy}+3$

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(y\cdot e^{xy})}{\partial y}=e^{xy}+x\cdot ye^{xy}$ και

$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(3+xe^{xy})}{\partial x}=e^{xy}+y\cdot xe^{xy}$

Επομένως, η ① είναι ακριβής και υπάρχει Γενική Λύση, $F(x,y)=c$
έτσι ώστε: $\frac{\partial F}{\partial x}=M=y\cdot e^{xy}$ ② και $\frac{\partial F}{\partial y}=N=x\cdot e^{xy}+3$ ③

Ολοκληρώνω την ② ως προς x: $F(x,y)=e^{xy}+h(y)$ ④

Παραγωγίζω την ④ ως προς y και συγκρίνω με ③: $x\cdot e^{xy}+h'(y)=xe^{xy}+3$

$\Rightarrow h'(y)=3 \Rightarrow h(y)=3y+c_1$ ⑤, $c_1\in\mathbb{R}$

Άρα: $F(x,y)=e^{xy}+3y+c_1=c_2$

$e^{xy}+3y=c$

και $y(0)=0$: Άρα: $e^0+3\cdot 0=c \Leftrightarrow \boxed{c=1}$

και $e^{xy}+3y=1$

* 1.40/77 Βιβλίο

Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης που διέρχεται από το σημείο (0,2) με κλίση $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2+y^2}$ ①

Η ① ισοδύναμα: $dy\,(x^2+y^2) = (-2xy)\,dx$

$+2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = 0$ και θεωρώ $M = 2xy$ και $N = x^2+y^2$. Τότε, έχω: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x$ και

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} = 2x$. Άρα, η ① είναι ακριβής και

υπάρχει γενική λύση $F(x,y) = c$, έτσι ώστε: $\frac{\partial F}{\partial x} = M = 2xy$ ②

και $\frac{\partial F}{\partial y} = N = x^2+y^2$ ③

Ολοκληρώνω την ② ως προς x: $F(x,y) = x^2 y + h(y)$ ④

Παραγωγίζω την ④ ως προς y και συγκρίνω με ③:

$x^2 + h'(y) = x^2 + y^2 \Rightarrow h'(y) = y^2 \Rightarrow h(y) = \frac{y^3}{3} + c_1$ ⑤

Άρα, ④ $\overset{⑤}{\Rightarrow}$ $F(x,y) = x^2 y + \frac{y^3}{3} + c_1 = c_2$

$F(x,y) = x^2 y + \frac{y^3}{3} = c_2 - c_1$ $\qquad c_1, c_2, c \in \mathbb{R}$

⑥ $x^2 y + \frac{y^3}{3} = c$ και αφού η καμπύλη διέρχεται από το $(0,2)$: $0\cdot 2 + \frac{2^3}{3} = c \Leftrightarrow c = \frac{8}{3}$ η ⑥:

$x^2 y + \frac{y^3}{3} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \boxed{3x^2 y + y^3 = 8}$ ⑥.

* 1.45/79 Βιβλίο.

Να βρεθεί η διαφορίσιμη συνάρτηση f με $f(0)=0$, για την οποία η διαφορική εξίσωση: $2 + y^3(t)\cos t + f(t)y^2(t)y'(t) = 0$ είναι ακριβής. Στη συνέχεια να λυθεί η διαφορική εξίσωση για την προκύπτουσα f.

① $(2 + y^3(t)\cos t)\,dt + (f(t)\,y^2(t))\,dy = 0$.

Θεωρώ $M = 2 + y^3(t)\cos t$ και $N = f(t)y^2(t)$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2+y^3(t)\cos t)}{\partial y} = 3y^2\cos t$ και $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial(f(t)y^2(t))}{\partial t}$

$= f'(t)y^2$. Άρα, για να είναι ακριβής η ① πρέπει

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow 3y^2\cos t = f'(t)y^2 \Leftrightarrow f'(t) = 3\cos t$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(t) = 3\sin t + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \\ f(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 3\cdot\sin\overset{0}{\cancel{0}} + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$

Άρα, $f(t) = 3\sin t$.

Άρα, η ① γίνεται: $(\underline{2+y^3\cos t})\,dt + (\underline{3y^2\sin t})\,dy = 0$.

Έχω, τότε: $M = 2+y^3\cos t$ και $N = 3y^2\sin t$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2+y^3\cos t)}{\partial y} = 3y^2\cos t$

και η ① ακριβής

$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial(3y^2\sin t)}{\partial t} = 3y^2\cos t$

Άρα, υπάρχει γενική λύση $F(t,y)=c$, έτσι ώστε:

$\frac{\partial F}{\partial t} = M = 2+y^3\cos t$ ② και $\frac{\partial F}{\partial y} = N = 3y^2\sin t$ ③

Ολοκληρώνω την ② ως προς t: $F(t,y) = 2t + y^3\underline{\sin t} +$
$+ h(y)$ ④

Παραγωγίζω την ④ ως προς y και συγκρίνω με ③:

$3y^2\sin t + h'(y) = 3y^2\sin t \Leftrightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$ ⑤

Άρα, ④ $\overset{⑤}{\Longrightarrow} F(t,y) = 2t + y^3\sin t + c_1 = c_2$

$2t + y^3\sin t = c_2 - c_1$

⑥ $\boxed{2t + y^3\sin t = c}$, $c_2\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση ⑥

* 1.39/77

ⓐ $(2x-3y)\,dx + (2y-3x)\,dy = 0$ ①

Θέτω $M = 2x-3y$ και $N = 2y-3x$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2x-3y)}{\partial y} = -3$ και $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(2y-3x)}{\partial x} = -3$

Επομένως, η ① είναι ακριβής και άρα υπάρχει γενική λύση $F(x,y)=c$, έτσι ώστε: $\frac{\partial F}{\partial x} = M = 2x-3y$ ②

και $\frac{\partial F}{\partial y} = N = 2y - 3x$ (3)

Ολοκληρώνω τη 2 ως προς x : $F(x,y) = x^2 - 3yx + h(y)$ (4)

Και παραγωγίζω την (4) ως προς y και συγκρίνω με την (3):

$-3\cancel{x} + h'(y) = 2y - 3\cancel{x} \Leftrightarrow h'(y) = 2y \Rightarrow h(y) = y^2 + c_1$ (5)

Άρα, (4) $\xrightarrow{(5)}$ $F(x,y) = x^2 - 3yx + y^2 + c_1 = c_2$

$x^2 - 3yx + y^2 = c_2 - c_1$

(6) $\boxed{x^2 - 3yx + y^2 = c}$ με $c_1, c_2, c \in \mathbb{R}$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (6)

(β) $(3y^2 + 10xy^2)\,dx + (6xy - 2 + 10x^2y)\,dy = 0$ (1)

Θεωρώ $M = 3y^2 + 10xy^2$ και $N = 6xy + 10x^2y - 2$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(3y^2 + 10xy^2)}{\partial y}$ και $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(6xy + 10x^2y - 2)}{\partial x}$

$= 6y + 20xy$ $\quad = 6y + 20xy$

Άρα, η (1) ακριβής και υπάρχει γενική λύση $F(x,y) = c$

έτσι ώστε : $\frac{\partial F}{\partial x} = M = 3y^2 + 10xy^2$ (2) και

$\frac{\partial F}{\partial y} = N = 6xy - 2 + 10x^2y$ (3)

Ολοκληρώνω τη (2) ως προς x : $F(x,y) = 3y^2x + 5x^2y^2 + h(y)$ (4)

Παραγωγίζω την (4) ως προς y και συγκρίνω με την (3):

$6yx + 10x^2y + h'(y) = \cancel{6xy} - 2 + \cancel{10x^2y}$

$h'(y) = -2 \Rightarrow h(y) = -2y + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$ (5)

Άρα, (4) $\xrightarrow{(5)}$ $F(x,y) = 3y^2x + 5x^2y^2 - 2y + c_1 = c_2$

$F(x,y) = 3y^2x + 5x^2y^2 - 2y = c_2 - c_1$

(6) $\boxed{F(x,y) = 3y^2x + 5x^2y^2 - 2y = c,}$ $c_2, c \in \mathbb{R}$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (6)

(6Τ) $\frac{y}{x-1}\,dx + [\ln(x-1) + 2y]\,dy = 0$ (1), $y(2) = 4$

Θεωρώ $M = \frac{y}{x-1}$ και $N = \ln(x-1) + 2y$. Τότε, έχω:

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x-1}$ και $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x-1}$. Άρα, η (1) είναι ακριβής και επομένως

υπάρχει γενική λύση $F(x,y)=c$, έτσι ώστε:
$$\frac{\partial F}{\partial x}=M=\frac{y}{x-1} \quad (2) \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial y}=N=\ln(x-1)+2y \quad (3)$$
Ολοκληρώνω την (2) ως προς x: $F(x,y)=\ln(x-1)y+h(y)$ (4)
Παραγωγίζω την (4) ως προς y και συγκρίνω με την (3):
$$\cancel{\ln(x-1)}+h'(y)=\cancel{\ln(x-1)}+2y$$
$$h'(y)=2y \Rightarrow h(y)=y^2+c_1, \ c_1\in\mathbb{R} \quad (5)$$
Άρα: $(4) \overset{(5)}{\Rightarrow} \ln[(x-1)]\cdot y+y^2+c_1=c_2, \ c_2\in\mathbb{R}$
$$\ln[(x-1)]y+y^2=c_2-c_1, \ c\in\mathbb{R}$$
$$\ln[(x-1)]y+y^2=c$$
Έχουμε: $y(2)=4$, άρα $4\cdot\ln(\cancel{2-1})^{0}+16=c \Leftrightarrow c=16$
Άρα: $\boxed{y\cdot\ln(x-1)+y^2=16}$ (6)
Η λύση είναι σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (6)

* Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(5x^2-y)dx+x\,dy=0$ (1) αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu=\mu(x)$.
Θεωρώ $M=5x^2-y$ και $N=x$. Τότε:
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(5x^2-y)}{\partial y}=-1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=1.$$
Οπότε, η (1) δεν είναι ακριβής. Αφού δέχεται $\mu=\mu(x)$ ολοκληρωτικό παράγοντα θα ισχύει ισοδύναμα: $(\mu M)dx+(\mu N)dy=0$
και θα ισχύει: $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial \mu}{\partial x}N+$
$$+\frac{\partial N}{\partial x}\cdot\mu \Rightarrow \mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial \mu}{\partial x}N+\frac{\partial N}{\partial x}\cdot\mu \Rightarrow$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=g(x)$$
Έχουμε: $g(x)=\frac{-1-1}{x}=-\frac{2}{x}$ και $\mu=\mu(x)=e^{\int g(x)dx}$
$$=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$$
Οπότε η (1) τελικά γίνεται:
$$\left(5-\frac{y}{x^2}\right)dx+\frac{1}{x}dy=0, \ \text{με} \ \tilde{M}=5-\frac{y}{x^2} \ \text{και} \ \tilde{N}=\frac{1}{x}$$

οπότε έχουμε: $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{-1}{x^2}$ και $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$ και η ① πλέον ακριβής. Άρα, υπάρχει συνάρτηση $F(x,y)=c$ (Γενική λύση) έτσι ώστε: $\frac{\partial F}{\partial x} = \tilde{M} = 5 - \frac{y}{x^2}$ ② και $\frac{\partial F}{\partial y} = \tilde{N} = \frac{1}{x}$ ③.

Ολοκληρώνω την ② ως προς x: $F(x,y) = 5x + \frac{1}{x}y + h(y)$ ④

Παραγωγίζω την ④ ως προς y και συγκρίνω με την ③: $\frac{1}{x} + h'(y) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$

Οπότε, ④ $\overset{⑤}{\Rightarrow} F(x,y) = 5x + \frac{1}{x}y + c_1 = c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$

$5x + \frac{1}{x}y = c_2 - c_1 \Rightarrow \boxed{5x + \frac{y}{x} = c}$, $c \in \mathbb{R}$ ⑥

Λύση σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση ⑥

⊛ Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $(2e^y - 3ty)dt + \left(\frac{3te^y}{y} + te^y - 4t^2\right)dy = 0$ αφού βρεθεί ολοκληρωτικός παράγων της μορφής: $\mu = t^\alpha y^\beta$

Αφού δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα:

$t^\alpha y^\beta(2e^y - 3ty)dt + t^\alpha y^\beta\left(\frac{3te^y}{y} + te^y - 4t^2\right)dy = 0 \Leftrightarrow$

$\underbrace{(2t^\alpha y^\beta e^y - 3t^{\alpha+1}y^{\beta+1})}_{M}dt + \underbrace{(3t^{\alpha+1}y^{\beta-1}e^y + t^{\alpha+1}y^\beta e^y - 4t^{2+\alpha}y^\beta)}_{N}dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2t^\alpha y^\beta e^y - 3t^{\alpha+1}y^{\beta+1})}{\partial y} = e^y 2t^\alpha y^\beta + \beta y^{\beta-1} e^y 2t^\alpha - (\beta+1)y^\beta 3t^{\alpha+1}$

$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial(3t^{\alpha+1}y^{\beta-1}e^y + t^{\alpha+1}y^\beta e^y - 4t^{2+\alpha}y^\beta)}{\partial t} = 3(\alpha+1)t^\alpha y^{\beta-1}e^y + (\alpha+1)t^\alpha y^\beta e^y - 4(\alpha+2)t^{\alpha+1}y^\beta$

Πρέπει: $\begin{cases} -3(\beta+1) = -4(\alpha+2) \\ 2\beta = 3(\alpha+1) \\ 2 = \alpha+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\beta = 6 \\ -3\beta - 3 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ -9-3=-12 \text{ ισχύει} \end{cases}$ για να είναι ακριβής.

Άρα: $\mu = t^\alpha y^\beta = ty^3$ και επομένως:

$$ty^3(2e^y-3ty)dt+ty^3\left(\frac{3te^y}{y}+te^y-4t^2\right)dy=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2te^y y^3-3t^2y^4)}_{\tilde{M}}dt+\underbrace{(3t^2e^y y^2+t^2y^3e^y-4t^3y^3)}_{\tilde{N}}dy=0$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}=\frac{\partial(2te^y y^3-3t^2y^4)}{\partial y}=6te^y y^2+2te^y y^3-12t^2y^3$$

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}=\frac{\partial(3t^2e^y y^2+t^2y^3e^y-4t^3y^3)}{\partial t}=6te^y y^2+2te^y y^3-12t^2y^3$$

Άρα, $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}=\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}$ οπότε η ② ακριβής.

Άρα, υπάρχει συνάρτηση $F(t,y)=c$, (A) έτσι ώστε: $\frac{\partial F}{\partial t}=\tilde{M}$ και $\frac{\partial F}{\partial y}=\tilde{N}$ δηλαδή: $\frac{\partial F}{\partial t}=2te^y y^3-3t^2y^4$ ③ και

$\frac{\partial F}{\partial y}=3t^2e^y y^2+t^2y^3e^y-4t^3y^3$ ④

Ολοκληρώνω την ③ ως προς t: $F(t,y)=t^2e^y y^3-t^3y^4+h(y)$ ⑤

Παραγωγίζω την ⑤ και συγκρίνω με την ④ (ως προς y):

$e^y t^2y^3+3y^2e^y t^2-4t^3y^3+h'(y)=3t^2e^y y^2+t^2y^3e^y-4t^3y^3 \Leftrightarrow h'(y)=0 \Rightarrow h(y)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$

Άρα, (A): $F(t,y)=t^2e^y y^3-t^3y^4+c_1=c_2$, $c_2\in\mathbb{R}$

$=t^2e^y y^3-t^3y^4=\underbrace{c_2-c_1}_{c\in\mathbb{R}}$

$=\boxed{t^2e^y y^3-t^3y^4=c}$ (B)

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (B)

⊛ $y'(t)=\frac{t-y+1}{t+y-3} \Leftrightarrow (t+y-3)\frac{dy}{dt}=(t-y+1) \Leftrightarrow$

$(t+y-3)dy-(t-y+1)dt=0 \Leftrightarrow (t+y-3)dy+(y-t-1)dt=0$

Έστω $M=(y-t-1)$

$N=(t+y-3)$

Τότε: $\frac{\partial M}{\partial y} = \partial(y-t-1) = 1$ και $\frac{\partial N}{\partial t} = \partial(t+y-3) = 1$

Άρα, η (1) είναι ακριβής. Οπότε, υπάρχει γενική λύση $F(t,y)=c$ έτσι ώστε: $\frac{\partial F}{\partial t} = M = y-t-1$ (2) και $\frac{\partial F}{\partial y} = N = t+y-3$ (3)

Ολοκληρώνω την (2) ως προς t: $F(t,y) = yt - \frac{t^2}{2} - t + h(y)$ (4).

Παραγωγίζω την (4) ως προς y και συγκρίνω με την (3):

$h'(y) + \cancel{t} = \cancel{t} + y - 3 \Rightarrow h'(y) = y-3 \Rightarrow h(y) = \frac{y^2}{2} - 3y + c_1$ (5) $c_1 \in \mathbb{R}$

Οπότε: $F(t,y) = yt - \frac{t^2}{2} - t + \frac{y^2}{2} - 3y + c_1 = c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$

$$yt - \frac{t^2}{2} - t + \frac{y^2}{2} - 3y = \underbrace{c_2 - c_1}_{c \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{yt - \frac{t^2}{2} - t + \frac{y^2}{2} - 3y = c} \quad (6)$$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (6)

(*) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $t + ye^{2ty} + \lambda t e^{2ty} y' = 0$, αφού βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία γίνεται ακριβής.

(1): $t + ye^{2ty} + \lambda t e^{2ty} \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow (t+ye^{2ty})\,dt + (\lambda t e^{2ty})\,dy = 0$

Έστω $M = t + ye^{2ty}$ και $N = \lambda t e^{2ty}$

Πρέπει για να είναι ακριβής:

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(t+ye^{2ty})}{\partial y} = e^{2ty} + 2t \cdot y \cdot e^{2ty}$

$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial(\lambda t e^{2ty})}{\partial t} = \lambda(e^{2ty} + 2yte^{2ty})$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda e^{2ty} = e^{2ty} \\ 2yte^{2ty} \cdot \lambda = 2tye^{2ty} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$

Για $\lambda=1$: $(t+ye^{2ty})dt+(te^{2ty})dy=0$

Τότε: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(t+ye^{2ty})}{\partial y}=e^{2ty}+2tye^{2ty}$

$\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial(te^{2ty})}{\partial t}=e^{2ty}+t2ye^{2ty}$

$\left.\right\} \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}.$

Επομένως, υπάρχει γενική λύση $F(t,y)=c$, έτσι ώστε:

$\frac{\partial F}{\partial t}=M=t+ye^{2yt}$ (2) και $\frac{\partial F}{\partial y}=N=te^{2ty}$ (3)

Ολοκληρώνω την (2) ως προς t: $F(t,y)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}e^{2yt}+h(y)$ (4)

Παραγωγίζω την (4) ως προς y και συγκρίνω με την (3) (ως προς y):

$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}te^{2yt}+h'(y)=te^{2ty}\Rightarrow$

$h(y)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$ (5)

Άρα: $F(t,y)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}e^{2yt}+c_1=c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$

$\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}e^{2yt}=\underbrace{c_2-c_1}_{c},\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}e^{2yt}=c}$ (6) Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (6)

(*) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$(2t^2y+2t\sin y+2ty+\sin y)dt+(t^2+t\cos y)dy=0$ αφού βρεθεί πρώτα ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu=\mu(t)$

Έστω $M=2t^2y+2t\sin y+2ty+\sin y$

$N=t^2+t\cos y$

Τότε, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(2t^2y+2t\sin y+2ty+\sin y)}{\partial y}=2t^2+2t\cos y+2t+\cos y$

$\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial(t^2+t\cos y)}{\partial t}=2t+\cos y$ Άρα, η (1) δεν είναι ακριβής

Άρα:

$$\mu M_y = N \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu N_t$$

$$N \frac{\partial \mu}{\partial t} = (M_y - N_t)\mu$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{M_y - N_t}{N} = \frac{2t^2 + 2t\cos y + \cancel{2t} + \cancel{\cos y} - \cancel{2t} - \cancel{\cos y}}{t^2 + t\cos y} =$$

$$= \frac{2\cancel{t}\,\cancel{(t + \cos y)}}{\cancel{t(t + \cos y)}} = 2$$ άρα $\mu(t) = e^{\int 2\,dt} = e^{2\int dt} = e^{2t}$

ένας ολοκληρωτικός παράγοντας

Άρα: $$\underbrace{(e^{2t}2t^2y + e^{2t}2t\sin y + 2e^{2t}ty + e^{2t}\sin y)}_{\tilde{M}}dt + \underbrace{(e^{2t}t^2 + e^{2t}t\cos y)}_{\tilde{N}}dy = 0$$

Άρα: $$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 2t^2e^{2t} + e^{2t}2t\cos y + 2e^{2t}t + e^{2t}\cos y$$

Άρα, ακριβής (1)

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} = 2e^{2t}t^2 + 2e^{2t}t + 2e^{2t}t\cos y + e^{2t}\cos y$$

Οπότε, υπάρχει γενική λύση $F(t,y) = c$ έτσι ώστε:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \tilde{M} = e^{2t}2t^2y + e^{2t}2t\sin y + 2e^{2t}ty + e^{2t}\sin y \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \tilde{N} = e^{2t}t^2 + e^{2t}t\cos y \quad (3)$$

Ολοκληρώνω την (3) ως προς y: $F(t,y) = e^{2t}t^2y + e^{2t}t\sin y + g(t)$ (4)

Παραγωγίζω ως προς t την (4) και συγκρίνω με (2):

$$g'(t) + \cancel{2e^{2t}t\sin y} + \cancel{e^{2t}\sin y} + \cancel{2e^{2t}t^2y} + \cancel{2e^{2t}ty} = \cancel{e^{2t}2t^2y} + \cancel{e^{2t}2t\sin y} + \cancel{2e^{2t}ty} + \cancel{e^{2t}\sin y} \Leftrightarrow$$

$g'(t) = 0 \Rightarrow g(t) = c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$ (5)

Άρα: $F(t,y) = e^{2t}t^2y + e^{2t}t\sin y + c_1 = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$

$$= e^{2t} t^2 y + e^{2t} t \sin y = \underbrace{c_2 - c_1}_{c \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{e^{2t} t^2 y + e^{2t} t \sin y = c} \quad (6)$$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (6)

⊛ Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(4x^3y + 2xy^2)dx + (3x^4 + 4x^2y)dy = 0$ αν είναι γνωστό ότι δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(y)$

Έστω $M = 4x^3y + 2xy^2$

$N = 3x^4 + 4x^2y$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 + 4xy$ και $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 12x^3 + 8xy$. Άρα, η (1) όχι ακριβής

Άρα: $M \dfrac{\partial \mu}{\partial y} + \mu M_y = \mu N_x$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{(N_x - M_y)\mu}{M}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{12x^3 + 8xy - 4x^3 - 4xy}{4x^3y + 2xy^2} = \frac{8x^3 + 4xy}{4x^3y + 2xy^2}$$

$$= \frac{\cancel{4}^{2}\cancel{x}\cancel{(2x^2+y)}}{\cancel{2x}y\cancel{(2x^2+y)}} = \frac{2}{y} = g(y)$$

Άρα: $\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$

οπότε:

$$(1) \quad \underbrace{(4x^3y^3 + 2xy^4)}_{\tilde{M}}dx + \underbrace{(3x^4y^2 + 4x^2y^3)}_{\tilde{N}}dy = 0$$

Άρα

$\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 12x^3y^2 + 8xy^3$ και $\dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 12x^3y^2 + 8xy^3$

Άρα, η ① πλέον ακριβής. Επομένως υπάρχει γενική λύση $F(x,y)=c$ έτσι ώστε: $\frac{\partial F}{\partial x}=\tilde{M}=4x^3y^3+2xy^4$ ③

και

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\tilde{N}=3x^4y^2+4x^2y^3 \quad ④$$

Ολοκληρώνω την ③ ως προς x: $F(x,y)=x^4y^3+x^2y^4+h(y)$ ⑤

Παραγωγίζω την ⑤ ως προς y και συγκρίνω με ④:

$$\cancel{3x^4y^2}+\cancel{4x^2y^3}+h'(y)=\cancel{3x^4y^2}+\cancel{4x^2y^3} \Leftrightarrow$$

$$h'(y)=0 \Rightarrow h(y)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R} \quad ⑥$$

Άρα: $F(x,y)=x^4y^3+x^2y^4+c_1=c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$

$$x^4y^3+x^2y^4=\underbrace{c_2-c_1}_{c},\ c\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{x^4y^3+x^2y^4=c} \quad ⑦$$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση ⑦

⊛ Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y^2+4ye^t+2(y+e^t)\frac{dy}{dt}=0 \Leftrightarrow \underbrace{(y^2+4ye^t)}_{M}dt+\underbrace{(2y+2e^t)}_{N}dy=0$$

<u>Υπόδειξη:</u> Να ληφθεί υπόψη ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας που είναι συνάρτηση μόνο του t.

Εάν $\mu=\mu(t)$

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial \mu}{\partial t}+\mu\frac{\partial N}{\partial t}$$

$$N\frac{\partial \mu}{\partial t}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}=\frac{M_y-N_t}{N} \ Ⓐ =f(t)$$

δηλαδή $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial t}$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(y^2+4ye^t)}{\partial y}=2y+4e^t$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial(2y+2e^t)}{\partial t}=2e^t$$

Άρα, Ⓐ: $\frac{2y+4e^t-2e^t}{2y+2e^t}=\frac{2y+2e^t}{2y+2e^t}=1$, άρα ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι:

$$\mu(t) = e^{\int f(t)dt} = e^{\int 1\, dt} = e^{t}$$

Οπότε η ①: $(\underbrace{e^t y^2 + 4ye^{2t}}_{\tilde{M}})dt + (\underbrace{2e^t y + 2e^{2t}}_{\tilde{N}})dy = 0$

Τότε,

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial(e^t y^2 + 4ye^{2t})}{\partial y} = 2ye^t + 4e^{2t}$$

Άρα, η ① πλέον είναι ακριβής

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} = \frac{\partial(2ye^t + 4e^{2t})}{\partial t} = 2ye^t + 4e^{2t}$$

Οπότε, υπάρχει γενική λύση $F(t,y) = c$ έτσι ώστε: $\frac{\partial F}{\partial t} = \tilde{M}$ και $\frac{\partial F}{\partial y} = \tilde{N}$

δηλαδή: $\frac{\partial F}{\partial t} = \tilde{M} = e^t y^2 + 4ye^{2t}$ ② και

$\frac{\partial F}{\partial y} = \tilde{N} = 2e^t y + 2e^{2t}$ ③

Ολοκληρώνω την ② ως προς t: $F(t,y) = e^t y^2 + 2ye^{2t} + h(y)$ ④

Παραγωγίζω την ④ ως προς y και συγκρίνω με την ③:

$$h'(y) + 2e^{2t} + 2ye^t = 2e^t y + 2e^{2t}$$

$$h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad ⑤$$

Άρα: $F(t,y) = e^t y^2 + 2ye^{2t} + c_1 = c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$

$$e^t y^2 + 2ye^{2t} = c_2 - c_1$$

$$⑥ \quad \boxed{e^t y^2 + 2ye^{2t} = c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση ⑥

⊛ Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$(\underbrace{\cos t + y^2 - e^{ty}y}_{M})dt + (\underbrace{2ty - te^{ty} - \sin y}_{N})dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(\cos t + y^2 - e^{ty}y)}{\partial y} = 2y - e^{ty} - te^{ty}y$$

Άρα, η ① είναι ακριβής.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial(2ty - te^{ty} - \sin y)}{\partial t} = 2y - e^{ty} - yte^{ty}.$$

Επομένως, υπάρχει συνάρτηση $F(t,y)=c$ (γενική λύση) τέτοια ώστε $\frac{\partial F}{\partial t}=M=\cos t+y^2-e^{ty}y$ (2) και $\frac{\partial F}{\partial y}=N=2ty-te^{ty}-\sin y$ (3)

Ολοκληρώνω τη (2) ως προς t: $F(t,y)=\sin t+y^2t-e^{ty}+h(y)$ (4)
Παραγωγίζω την (4) ως προς y και συγκρίνω με την (3):
$h'(y)+2yt-te^{ty}=2ty-te^{ty}-\sin y$
$h'(y)=-\sin y \Rightarrow h(y)=\cos y+c_1$, $c_1\in\mathbb{R}$ (5)
Άρα: $F(t,y)=\sin t+y^2t-e^{ty}+\cos y+c_1=c_2$, $c_2\in\mathbb{R}$
$\sin t+y^2t-e^{ty}+\cos y=\underbrace{c_2-c_1}_{c}$

(6) $\boxed{\sin t+y^2t-e^{ty}+\cos y=c}$, $c\in\mathbb{R}$

Η λύση βρίσκεται στη σχέση (6) σε πεπλεγμένη μορφή

⊛ Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(4y+3t^2-3ty^2)y'+6ty-y^3=0$. (1)
(1) $\Leftrightarrow \underbrace{(4y+3t^2-3ty^2)}_{N}dy+\underbrace{(6ty-y^3)}_{M}dt=0$

Τότε, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(6ty-y^3)}{\partial y}=6t-3y^2$

$\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial(4y+3t^2-3ty^2)}{\partial t}=6t-3y^2$

οπότε η (1) είναι ακριβής

Επομένως, υπάρχει (γενική λύση) συνάρτηση $F(t,y)=c$ έτσι ώστε $\frac{\partial F}{\partial t}=M=6ty-y^3$ (2) και $\frac{\partial F}{\partial y}=N=4y+3t^2-3ty^2$ (3)

Ολοκληρώνω την (2) ως προς t: $F(t,y)=3t^2y-y^3t+h(y)$ (4)
Παραγωγίζω την (4) ως προς y και συγκρίνω με (3)
$h'(y)+\cancel{3t^2}-\cancel{3y^2t}=4y+\cancel{3t^2}-\cancel{3ty^2}\Rightarrow h'(y)=4y \Rightarrow$
$h(y)=2y^2+c_1$ (5)

Άρα, $④ \overset{⑤}{\Rightarrow} F(t,y) = 3t^2y - y^3t + 2y^2 + c_1 = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$

$3t^2y - y^3t + 2y^2 = c_2 - c_1$

$3t^2y - y^3t + 2y^2 = c$ ⑥ ← λύση σε πεπλεγμένη μορφή