Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις $1^{ης}$ τάξης

Διαφορικές εξισώσεις $1^{ης}$ τάξης είναι αυτές της μορφής $F(t, y, y')=0$. Αναζητούμε, για την επίλυσή τους, όλες τις συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις $y=\varphi(t)$ με $\varphi: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ που ικανοποιούν ταυτοτικά την εξίσωση $F(t, y, y')=0$.

Ορσ.: 1) Η μορφή $F(t,y,y')=0$ ονομάζεται διαφορική εξίσωση σε γενική μορφή και μπορεί να αναλυθεί στον τύπο

$y'(t) + P(t)\cdot y(t) = q(t)$ (E) όπου $P, q: I \to \mathbb{R}$ συνεχείς, $I \subseteq \mathbb{R}$.

2) Η μορφή $y' = f(t,y)$ λέγεται κανονική (ή λυμένη) μορφή της διαφορικής εξίσωσης.

Σημείωση: Στο εξής, για συντομία, όταν γράφουμε, στις διαφορικές εξισώσεις που μελετάμε, το σύμβολο y, θεωρούμε τις συναρτήσεις $y(t)$, $t \in I$, $y: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$.

Μέθοδος επίλυσης με πολλαπλασιαστικό παράγοντα (ή πολλαπλασιαστή Euler)

Παρατήρηση: (I) Αν, στον τύπο (E), $q(t)=0$, τότε, η $y' + P(t)\cdot y = 0$ (E_0) είναι η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση της (E).

(II) Αν $q(t) \neq 0$, τότε, η (E) ονομάζεται μη ομογενής.

Για να επιλύσω κάποια δ.ε. (διαφορική εξίσωση) της μορφής $y' + P(t)\cdot y = q(t)$ (E) με τη μέθοδο αυτή, αναζητώ μια συνάρτηση την οποία ονομάζουμε πολλαπλασιαστικό παράγοντα και συμβολίζουμε, συνήθως, με το γράμμα $\mu(t)$. Ακόμη, $\mu(t) \neq 0$.

Ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας έχει την εξής ιδιότητα:

$$\mu(t)\cdot y' + \mu(t)\cdot P(t)\cdot y = (\mu(t)\cdot y)' \quad ♡$$

Τώρα, θα υπολογίσουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα:

$$(E) \xrightarrow{\text{επί } \mu(t)} \mu(t)\cdot y' + \mu(t)\cdot P(t)\cdot y = \mu(t)\cdot q(t)$$

$$♡ \Longrightarrow \cancel{\mu(t)\cdot y'} + \mu(t)\cdot P(t)\cdot y = \mu'(t)\cdot y + \cancel{\mu(t)\cdot y'} \Longrightarrow \mu'(t)\cdot y = \mu(t)\cdot P(t)\cdot y \quad (A)$$

Για $y \neq 0$, $(A) \Longrightarrow \mu'(t) = \mu(t)\cdot P(t) \Longrightarrow \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = P(t) \Longrightarrow \int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}dt = \int P(t)dt \cancel{+c_1}$

$\Longrightarrow \ln|\mu(t)| = \int P(t)dt + c_1 \Longrightarrow |\mu(t)| = e^{c_1}\cdot e^{\int P(t)dt} \Longrightarrow \mu(t) = \pm e^{c_1}\cdot e^{\int P(t)dt}$

Θέτοντας $c = \pm e^{c_1}$, παίρνουμε $\mu(t) = c\cdot e^{\int P(t)dt}$. Αυτή είναι η μορφή του ολοκληρωτικού παράγοντα. Για χάρη ευκολίας ωστόσο, επιλέγουμε αυθαίρετα η σταθερά c να είναι ίση με 1.

Έτσι, παίρνουμε $\boxed{\mu(t) = e^{\int P(t)dt}}$

Η επίλυση της δ.ε. δεν έχει ολοκληρωθεί. Θα πρέπει στη συνέχεια να βρεθούν οι y που ικανοποιούν την (E).

$(E) \Longrightarrow \mu(t)\cdot y' + \mu(t)\cdot P(t)\cdot y = \mu(t)\cdot q(t) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow e^{\int P(t)dt}\cdot y' + e^{\int P(t)dt}\cdot P(t)\cdot y = e^{\int P(t)dt} q(t) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left(e^{\int P(t)dt}\cdot y\right)' = e^{\int P(t)dt} q(t) \Longrightarrow e^{\int P(t)dt}\cdot y = \int e^{\int P(t)dt}\cdot q(t)dt + c \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{y(t) = e^{-\int P(t)dt}\cdot\left[\int e^{\int P(t)dt}\cdot q(t)\,dt + c\right]}$
$\boxed{y(t) = 0}$ } Οι λύσεις της (E).

<u>Σημειώσεις:</u> i) Ο τύπος $y(t)=\mu^{-1}(t)\cdot\left[\int\mu(t)\cdot q(t)dt+c\right]$ δεν χρειάζεται να απομνημονευθεί, το μόνο που θα χρειαστεί είναι ο τύπος $\mu(t)=e^{\int P(t)dt}$ με τον οποίο θα υπολογίζεται η λύση (ή οι λύσεις).

ii) Παρατηρείστε πως σε κάποιο σημείο του υπολογισμού του $\mu(t)$ υποθέσαμε ότι $y\neq 0$. Όμως, η σταθερή συνάρτηση $y(t)=0$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση (Ε), άρα αποτελεί και αυτή μια λύση της Δ.Ε..

<u>Σχόλια:</u> i) Ομογενής λύση της (Ε): $y_{o\mu}(t)=c\cdot e^{-\int P(t)dt}$ $(q(t)=0)$

ii) Ειδική λύση της (Ε): $y_{\varepsilon\iota\delta}(t)=e^{-\int P(t)dt}\cdot\int e^{\int P(t)dt}\cdot q(t)dt$ $(c=0)$

iii) Γενική λύση της (Ε): $y(t)=y_{o\mu}(t)+y_{\varepsilon\iota\delta}(t)$

π.χ. Να λυθεί με τη μέθοδο ολοκληρωτικού παράγοντα η Δ.Ε. $y'+\frac{y}{t}=1$ (Ε), $t>0$.

<u>Λύση:</u> Σύμφωνα με τον προηγούμενο συμβολισμό, έχουμε $\left\{\begin{matrix}P(t)=\frac{1}{t}\\ q(t)=1\end{matrix}\right\}$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι: $\mu(t)=e^{\int P(t)dt}=e^{\int\frac{1}{t}dt}=e^{\ln t+c}=e^{c}\cdot t$.
Κάνοντας ακόμη μια «βολική αυθαιρεσία», στο εξής μπορούμε να ~~θα~~ παραλείπουμε τον όρο e^{c} σε κάθε ολοκληρωτικό παράγοντα που υπολογίζουμε. Άρα θα έχουμε $\boxed{\mu(t)=t}$

$$(E)\Rightarrow\mu(t)\cdot y'+\mu(t)\cdot\frac{1}{t}\cdot y=\mu(t)\Rightarrow t\cdot y'+\cancel{t}\frac{1}{\cancel{t}}\cdot y=t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(t\cdot y)'=t\Rightarrow ty=\int t\,dt+c\Rightarrow t\cdot y=\frac{t^2}{2}+c\Rightarrow y=\frac{t}{2}+\frac{c}{t},\ c\in R$$

Λύσεις της (Ε): $\boxed{\begin{matrix}y=\frac{t}{2}+\frac{c}{t},\ c\in R\\ y=0\end{matrix}}$

Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

Θεωρείστε μια διαφορική εξίσωση της μορφής $y' + P(t)y = q(t)$ (E)
η αντίστοιχη ομογενής Δ.ε. είναι η $y' + P(t) \cdot y = 0$ (E_0).

Παρατηρούμε ότι η γενική λύση της (E_0) είναι της μορφής $y_{o\mu}(t) = C \cdot e^{-\int P(t)dt}$. Από αυτό κατανοούμε ότι η λύση της (E), θα είναι μια εξίσωση της μορφής $\boxed{y(t) = C(t) \cdot e^{-\int P(t)dt}}$ (A)

Για να υπολογίσουμε την y πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την $c(t)$. Με βάση τη σχέση (A) η δ.ε. (E) θα γίνει:

$$\left(c(t) \cdot e^{-\int P(t)dt}\right)' + P(t) \cdot C(t) e^{-\int P(t)dt} = q(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(t) \cdot e^{-\int P(t)dt} - \cancel{C(t) \cdot e^{-\int P(t)dt} \cdot P(t)} + \cancel{P(t) \cdot C(t) \cdot e^{-\int P(t)dt}} = q(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(t) \cdot e^{-\int P(t)dt} = q(t) \Rightarrow c'(t) = q(t) \cdot e^{\int P(t)dt} \Rightarrow \boxed{C(t) = \int q(t) e^{\int P(t)dt} dt + C}$$ (B)

Από τις σχέσεις (A) και (B) συμπεραίνουμε ότι η λύση της (E) είναι:

$$\boxed{y(t) = e^{-\int P(t)dt} \cdot \left[\int q(t) \cdot e^{\int P(t)dt} dt + c\right]}$$ $C \in \mathbb{R}$ (ο ίδιος δύσχρηστος τύπος στον οποίο καταλήξαμε και πριν)

π.χ. Να λυθεί το ΠΑΤ (Πρόβλημα Αρχικών Τιμών):
(E) $y' + \frac{1}{t} \cdot y = 1$, $t > 0$ $\quad y(1) = 0$.

Λύση: Έχουμε $P(t) = \frac{1}{t}$ και $q(t) = 1$. $t > 0$

$e^{\int P(t)dt} = e^{\int \frac{1}{t}dt} = e^{\ln t} = t$

$C(t) = \int q(t) e^{\int P(t)dt} dt + C = \int t\,dt + C = \frac{t^2}{2} + C$

$y(t) = t^{-1} \cdot \left(\frac{t^2}{2} + c\right) \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{t}{2} + \frac{c}{t}}$ Γενικευμένη λύση της (E)

Από $y(1) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{c = -1/2}$ Άρα λύση ΠΑΤ: $\boxed{y(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}$

Ειδικές μορφές διαφορικών εξισώσεων $1^{ης}$ τάξης

1) Εξίσωση Bernoulli

Έχει τη μορφή: $\boxed{y' + P(t)\cdot y = q(t)\cdot y^r,\ r\in\mathbb{R}}$ (1)

Περιπτώσεις: i) $r=0$, τότε παίρνουμε γραμμική Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης

ii) Αν $r=1$ παίρνουμε την $y' + (P(t)-q(t))y = 0$, η οποία είναι η αντίστοιχη ομογενής της (1).

iii) Αν $r>0$, η $y(t)=0$ θα αποτελεί λύση της (1)

iv) Αν $r<0$, η $y(t)=0$ δεν θα αποτελεί λύση της (1)

Μέθοδος Επίλυσης

Για $r\neq 0$

Για να επιλύσουμε την (1) θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$\boxed{u = y^{1-r}} \quad (2)$$

Παραγωγίζοντας τη (2) παίρνουμε $\boxed{u' = (1-r)\cdot y^{-r}\cdot y'}$ (3)

Με βάση τις σχέσεις (2) και (3):

$$(1) \xrightarrow{\text{επί } (1-r)\cdot y^{-r}} \underbrace{(1-r)\,y^{-r}\cdot y'}_{u'} + (1-r)\cdot P(t)\cdot \underbrace{y^{1-r}}_{u} = (1-r)\cdot q(t) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{u' + (1-r)\,P(t)\,u = (1-r)\,q(t)}$$

Η εξίσωση στην οποία καταλήξαμε αποτελεί μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης. Την επιλύουμε κατά τα γνωστά και αφού υπολογίσουμε το $u(t)$, με βάση τη (2), γράφουμε τη συνάρτηση y σε σχέση με την u.

π.χ. Να λυθεί η ακόλουθη εξίσωση Bernoulli:

$$y' + \frac{3}{t} y = t^2 \cdot y^2, \quad t>0.$$

Λύση: Η $y' + \frac{3}{t} \cdot y = t^2 y^2$ (E) είναι δ.ε. Bernoulli με $r=2$.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u = y^{1-r} = y^{-1}$ (A)

$$\text{(A)} \Rightarrow u' = -y^{-2} \cdot y' \quad \text{(B)}$$

$$\text{(E)} \xRightarrow{\text{επί } -y^{-2}} -y^{-2} \cdot y' - \frac{3}{t} \cdot y^{-1} = -t^2 \Rightarrow u' - u\frac{3}{t} = -t^2 \quad (E_2)$$

Η (E_2) αποτελεί γραμμική ΔΕ $1^{ης}$ τάξης. Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t) = e^{\int \frac{-3}{t} dt} = e^{\ln t^{-3}} = t^{-3}$

$$(E_2) \xRightarrow{\text{επί } \mu(t)} t^{-3} \cdot u' - 3t^{-2} \cdot u = -t^{-1} \Rightarrow (t^{-3} \cdot u)' = -t^{-1} \Rightarrow t^{-3} \cdot u = -\int \frac{1}{t} dt + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{-3} \cdot u = -\ln t + c \Rightarrow \boxed{u(t) = (c - \ln t) \cdot t^3}, \text{ όπου } c \in \mathbb{R} \quad (\Gamma)$$

$$\text{(A)} \xRightarrow[\Gamma]{} (c - \ln t) t^3 = y^{-1} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{(c-\ln t)t^3}, \text{ όπου } c \neq \ln t} \text{ και } \boxed{y(t) = 0}$$

Οι λύσεις της (E)

2) Εξίσωση Ricatti

Έχει τη μορφή: $\boxed{y' + P(t)\cdot y = q(t)\cdot y^2 + f(t)}$ (E), όπου $f, P, q : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $I \subseteq \mathbb{R}$

- Αν $q(t)=0$, η (E) είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξης.
- Αν $f(t)=0$, η (E) γίνεται Bernoulli με $r=2$.

Επίλυση της (E): Για την επίλυση των εξισώσεων Ricatti, χρειάζεται να γνωρίζουμε εκ των προτέρων κάποια από τις λύσεις ~~τους~~.
Έστω $y_1(t)$ κάποια γνωστή λύση της (E).

Θεωρούμε το μετασχηματισμό: $\boxed{y(t) = y_1(t) + \frac{1}{u(t)}}$ (1)

$$(1) \Rightarrow \boxed{y' = y_1' - \frac{1}{u^2}\cdot u'} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{y^2 = y_1^2 + 2\frac{y_1}{u} + \frac{1}{u^2}} \quad (3)$$

Η (E) με βάση τις (1),(2),(3) γίνεται:

$$y_1' - \frac{1}{u^2}\cdot u' + P(t)y_1 + \frac{P(t)}{u} = q(t)y_1^2 + 2q(t)\frac{y_1}{u} + \frac{q(t)}{u^2} + f(t) \quad (A)$$

Η y_1 αποτελεί λύση της (E) άρα $y_1' + P(t)y_1 = q(t)y_1^2 + f(t)$.

Άρα η (A) γίνεται: $-\frac{u'}{u^2} + \frac{P(t)}{u} = 2q(t)\frac{y_1}{u} + \frac{q(t)}{u^2} \xRightarrow{\text{επί } u^2}$

$$\Rightarrow -u' + P(t)u = 2q(t)y_1\cdot u + q(t) \Rightarrow \boxed{u' + (2q(t)y_1 - P(t))u = -q(t)}$$

Καταλήξαμε σε Γραμμική ΔΕ $1^{ης}$ τάξης, την οποία ~~αφού~~ επιλύσουμε σύμφωνα με τα γνωστά. Αφού υπολογίσουμε την u, την αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και υπολογίζουμε την y, η οποία είναι η λύση της (E).

Παρατήρηση: Αν στην (E) χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό $y = y_1 + u$, τότε, θα μετατραπεί σε εξίσωση Bernoulli και ύστερα θα πρέπει να τη μετασχηματίσουμε σε γραμμική 1ης τάξης.

π.χ. Να λυθεί: $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2$. Μια, προφανής, λύση της είναι η $y_1(t) = t$

Λύση: $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2 \Longrightarrow \boxed{y' + 2ty = y^2 + 1 + t^2}$ (E)

Θεωρώ το μετασχηματισμό $y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow \boxed{y = t + \frac{1}{u}}$ (I)

(I) $\Rightarrow \boxed{y' = 1 - \frac{1}{u^2} \cdot u'}$ (II) $\quad$ (I) $\Rightarrow \boxed{y^2 = t^2 + \frac{2t}{u} + \frac{1}{u^2}}$ (III)

$(E) \xrightarrow{(I),(II),(III)} \underbrace{(t)'}_{} - \frac{1}{u^2} \cdot u' + \underbrace{2t \cdot (t)}_{} + \frac{2t}{u} = \underbrace{(t)^2}_{} + \frac{2t}{u} + \frac{1}{u^2} + \underbrace{1 + t^2}_{} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow -\frac{1}{u^2} \cdot u' + \cancel{\frac{2t}{u}} = \cancel{\frac{2t}{u}} + \frac{1}{u^2} \xrightarrow{\text{επί} -u^2} u' = -1 \Rightarrow \boxed{u = -t + c}$, $c \in \mathbb{R}$ (IV)

(I) $\xrightarrow{(IV)} \boxed{y = t + \frac{1}{c - t} \quad , c \neq t}$ Οι λύσεις της (E)

π.χ. Να λυθεί: $y' + \frac{1}{t} \cdot y = y^2 - \frac{1}{t^2}$, $t > 0$. Μια λύση της: $y_1(t) = -\frac{1}{t}$

Λύση: Θεωρούμε το μετασχηματισμό $\boxed{y = -\frac{1}{t} + \frac{1}{u}}$ (A)

$\boxed{y' = \frac{1}{t^2} - \frac{u'}{u^2}}$ (B) $\quad \boxed{y^2 = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{2}{tu}}$ (Γ)

$y' + \frac{1}{t} \cdot y = y^2 - \frac{1}{t^2} \Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{} - \frac{u'}{u^2} + \underbrace{\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t}\right)}_{} + \frac{1}{tu} = \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{} + \frac{1}{u^2} + \frac{2}{tu} - \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow -\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{tu} = \frac{1}{u^2} \xrightarrow{\text{επί} -u^2} \boxed{u' + \frac{1}{t} u = -1} \qquad \mu(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = t$

$tu' + \frac{t}{t} u = -t \Rightarrow tu = -\int t\,dt + c \Rightarrow u = \frac{c - t^2/2}{t} \xrightarrow{(A)} \boxed{y = -\frac{1}{t} + \frac{2t}{2c - t^2}, \quad c \neq \frac{t^2}{2}}$

Ακριβείς (ή πλήρεις) Διαφορικές Εξισώσεις

Μελετάμε εξισώσεις της μορφής $y'=f(t,y)$ με $f(t,y)=-\frac{M(t,y)}{N(t,y)}$, $N\neq 0$
$M,N: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, με D απλά συνεκτικό (δεν έχει τρύπες).

Αν υπάρχει $F: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(t,y)$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοί της $\frac{\partial F}{\partial y}$ και $\frac{\partial F}{\partial t}$ να είναι συνεχείς, δημιουργείται η έννοια του ολικού διαφορικού της F, $dF(t,y)=\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\partial F}{\partial y}dy$.

Ορισμός: Η διαφορική μορφή $\boxed{M(t,y)dt+N(t,y)dy=0}$ (E) ονομάζεται ακριβής (ή πλήρης) στο D αν $\exists$ F με συνεχείς μερικές παραγώγους για τις οποίες ισχύει: $\boxed{\frac{\partial F}{\partial t}=M}$ και $\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}=N}$

Η γενική λύση της (E) θα είναι της μορφής: $F(t,y)=C$
αφού, $(E)\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0\Rightarrow dF(t,y)=0\Rightarrow \boxed{F(t,y)=C}$

Θεώρημα: Έστω $M(t,y)$, $N(t,y)$ συνεχείς με συνεχείς μερικές παραγώγους, ως προς t και y, με $M,N: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$. Υπάρχει συνάρτηση $F(t,y)$, $F:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε, τα ακόλουθα να είναι ισοδύναμα:
i) $\frac{\partial F}{\partial t}=M$ και $\frac{\partial F}{\partial y}=N$ ii) $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}=M &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)=\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial t}\\ \frac{\partial F}{\partial y}=N &\quad\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$$

($\Leftarrow$) Αν $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$ θ.δ.ο. $\exists$ F για να ισχύει το (i)

Αναζητούμε $F(t,y)$ με $\dfrac{\partial F}{\partial t} = M$, ολοκληρώνουμε ως προς t

$F(t,y) = \int M dt + h(y)$ (1) (Στις ασκήσεις θα αναζητούμε αυτή την $h(y)$)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N \xrightarrow{(1)} \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dt + h'(y) = N \Rightarrow h'(y) = N - \int \frac{\partial M}{\partial y} dt \quad (2)$$

Αν παραγωγίσουμε ως προς t την (2) παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} h'(y) = \frac{\partial}{\partial t}\left(N - \int \frac{\partial M}{\partial y} dt\right) \Longrightarrow 0 = \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial y}$$ που ισχύει.

Ολοκληρώνοντας ως προς y την (2): $h(y) = \int \left(N - \int \frac{\partial M}{\partial y} dt\right) dy$.

Καταλήξαμε στο ότι υπάρχει F που να ικανοποιεί το (i) και μάλιστα είναι η:

$$F(t,y) = \int M(t,y)dt + \int \left(N(t,y) - \int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} dt\right) dy = \text{σταθ.}$$

Ασκήσεις:

► Σε ποιές περιπτώσεις είναι η $1 + y^2 \sin t + f(t)\cdot y \cdot y' = 0$ με $f(0) = -2$ ακριβής; Να λυθεί σε αυτές τις περιπτώσεις.

Λύση

Θέτουμε $\begin{cases} M(t,y) = 1 + y^2 \sin t \\ N(t,y) = f(t)\cdot y \end{cases}$ Σύμφωνα με το Θεώρημα, για να είναι η $M(t,y) + N(t,y)y' = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$ (E) ακριβής,

πρέπει $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t} \Longrightarrow \boxed{2y \sin t = f'(t)\cdot y}$

Αν $y \neq 0$: $f'(t) = 2\sin t \Rightarrow f(t) = -2\cos t + c$, $c \in \mathbb{R}$

Αφού $f(0) = -2 \Rightarrow c = 0$. Άρα η (E) είναι ακριβής όταν $f(t) = -2\cos t$.

$\underbrace{1+y^2\cdot \sin t}_{M(t,y)}\underbrace{-2\cos t\cdot y}_{N(t,y)}\cdot y'=0$ (E) Αυτή είναι ακριβής, καθώς,

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y\sin t=\frac{\partial N}{\partial t}$.

Αναζητούμε λοιπόν τη λύση της (E), γνωρίζοντας ότι υπάρχει F που να ικανοποιεί το Θεώρημα και είναι της μορφής $F(t,y)=c_2$.

$\frac{\partial F}{\partial t}=M=1+y^2\cdot\sin t$ (A) Ολοκληρώνουμε ως προς t την (A):

$F(t,y)=t-y^2\cos t+h(y)$ (Γ)

$\frac{\partial F}{\partial y}=N=-2\cos t.y$ (B)

Παραγωγίζουμε ως προς y την (Γ):

$\frac{\partial F}{\partial y}=-2y\cos t+h'(y)\xRightarrow{(B)}\cancel{-2\cos t\cdot y}=\cancel{-2y\cos t}+h'(y)\Longleftrightarrow h'(y)=0\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow h(y)=c_1\in\mathbb{R}$

Στην (Γ): $F(t,y)=t-y^2\cos t+c_1$ Αφού $F(t,y)=c_2\in\mathbb{R}$ έχουμε

$\boxed{t-y^2\cos t=c,}$ (Δ) με $\begin{cases}c=c_2-c_1\in\mathbb{R}\\ y\neq 0\end{cases}$ Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (Δ).

Αν $y=0$, από (E) παίρνουμε $1=0$ Άτοπο. Άρα $y\neq 0$ σε κάθε περίπτωση.

► Είναι ακριβής η εξίσωση: $(t+y+1)dt+(t-y^2+3)dy=0$; Να λυθεί.

<u>Λύση:</u> $(t+y+1)dt+(t-y^2+3)dy=0$ (E)

Έχουμε $M(t,y)=t+y+1$

$N(t,y)=t-y^2+3$

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(t+y+1)=1\\ \frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(t-y^2+3)=1\end{array}\right\}\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$ Άρα η (E) είναι ακριβής.

$\exists$ γενική λύση της (E) της μορφής $F(t,y)=c_1\in\mathbb{R}$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = t+y+1 = M \quad (A) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = t-y^2+3 = N \quad (B)$$

Ολοκλήρωση ως προς t της (A): $F(t,y) = \frac{1}{2}t^2 + yt + t + h(y)$ (Γ)

Παραγωγίζουμε ως προς y τη (Γ):

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cancel{t} + h'(y) \xRightarrow{(B)} t + h'(y) = t - y^2 + 3 \Rightarrow h'(y) = -y^2+3 \Rightarrow h(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + c_2$$

$c_2 \in \mathbb{R}$

Άρα στη (Γ): $F(t,y) = \frac{1}{2}t^2 + yt + t - \frac{y^3}{3} + 3y + c_2 \Rightarrow \boxed{-\frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}t^2 + yt + 3y + t = c}$ (Δ)

Όπου $c = c_1 - c_2 \in \mathbb{R}$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (Δ).

► $e^y dt + (te^y + 2y)dy = 0$. Είναι ακριβής; Να λυθεί.

Λύση: $e^y dt + (te^y + 2y)dy = 0$ (E) $\qquad M(t,y) = e^y$

$\qquad N(t,y) = te^y + 2y$

Έχουμε $\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial t}$ Άρα η (E) είναι ακριβής. Άρα ∃ γενική λύση της μορφής $F(t,y) = c_1 \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$\frac{\partial F}{\partial t} = e^y$ (A)

$\frac{\partial F}{\partial y} = te^y + 2y$ (B)

(A) $\Rightarrow F = te^y + h(y)$ (Γ)

(Γ) $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = te^y + h'(y) \xrightarrow{(B)} \cancel{te^y} + 2y = \cancel{te^y} + h'(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow h(y) = y^2 + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$

Στη (Γ): $F(t,y) = te^y + y^2 + c_2 \Rightarrow \boxed{te^y + y^2 = c}$, $c = c_1 - c_2 \in \mathbb{R}$ Η λύση της (E) σε πεπλεγμένη μορφή.

▸ $(2ty+ye^t)dt+(t^2+e^t)dy=0$. Είναι Ακριβής; Να λυθεί.

<u>Λύση:</u> $(2ty+ye^t)dt+(t^2+e^t)dy=0$ (E) Θέτουμε $M(t,y)=2ty+ye^t$
$N(t,y)=t^2+e^t$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2t+e^t=\frac{\partial N}{\partial t}$ Άρα η (E) είναι ακριβής. Άρα υπάρχει γενική λύση της στη μορφή $F(t,y)=c_1\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$\frac{\partial F}{\partial t}=2ty+ye^t$ (A)

$\frac{\partial F}{\partial y}=t^2+e^t$ (B)

(A) $\Rightarrow F=t^2y+ye^t+h(y)$ (Γ)

(Γ) $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}=t^2+e^t+h'(y)\xRightarrow{(B)} t^2+e^t=t^2+e^t+h'(y)\Rightarrow$

$\Rightarrow h'(y)=0\Rightarrow h(y)=c_2\in\mathbb{R}$

Άρα $F(t,y)=t^2y+ye^t+c_2\Rightarrow \boxed{t^2y+ye^t=c}$ (Δ), όπου $c=c_1-c_2\in\mathbb{R}$

Η λύση της (E) βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (Δ).

<u>Ειδικές περιπτώσεις Ακριβών διαφορικών εξισώσεων</u>

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε διαφορικές εξισώσεις οι οποίες δεν είναι ακριβείς, αλλά μπορούν να αναχθούν σε ακριβείς με τη χρήση ενός ολοκληρωτικού παράγοντα (Πολλαπλασιαστή Euler).

Έχουμε μια Δ.Ε. της μορφής $M(t,y)dt+N(t,y)dy=0$, η οποία δεν είναι πλήρης (ακριβής), υπάρχει ένας πολλαπλασιαστής Euler με τον οποίο μπορούμε να την κάνουμε πλήρη. Έστω $\mu(t,y)$ ο πολλαπλασιαστής αυτός. Έχουμε:

$$Mdt+Ndy=0\Rightarrow(\mu\cdot M)dt+(\mu\cdot N)dy=0$$

Η εξίσωση που προέκυψε είναι ακριβής και, συνεπώς,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial t}(\mu\cdot N)\xRightarrow{\text{Ορσ.}}\boxed{\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot N+\mu\cdot\frac{\partial N}{\partial t}}$$

Η επίλυση μιας εξίσωσης αυτής της μορφής είναι εν γένει δύσκολη, υπάρχουν ωστόσο ειδικές περιπτώσεις στις οποίες τα πράγματα γίνονται απλούστερα. Στην Πρόταση που ακολουθεί δίνονται δύο από αυτές τις περιπτώσεις.

Πρόταση: Έστω μια δ.ε. $M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$ (E), όπου οι M και N έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους. Ισχύουν τα ακόλουθα:

I) Αν $N(t,y) \neq 0$, η (E) έχει ολοκληρωτικό παράγοντα που είναι συνάρτηση μόνο του t ($\mu(t)$) αν και μόνο αν ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = f(t)}$$ για κάποια συνάρτηση f.

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο: $\boxed{\mu(t) = e^{\int f(t)dt}}$

II) Αν $M(t,y) \neq 0$, η (E) έχει ολοκληρωτικό παράγοντα που είναι συνάρτηση μόνο του y ($\mu(y)$) αν και μόνο αν ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)}$$ για κάποια g. Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο $\boxed{\mu(y) = e^{\int g(y)dy}}$

Απόδειξη: I) Έχουμε $\mu(t)$ τον ολοκληρωτικό παράγοντα της (E).
Άρα $\frac{\partial \mu(t)}{\partial t} = \mu'(t)$, $\frac{\partial \mu(t)}{\partial y} = 0$. Αντικαθιστούμε στην (**):

$$\overset{0}{\cancel{0\cdot M}} + \frac{\partial M}{\partial y}\cdot\mu = \mu'\cdot N + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \mu'\cdot N = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)\cdot\mu \xRightarrow[\mu\neq 0]{N\neq 0} \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = \frac{\mu'}{\mu}$$

Η $\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}$ είναι συνάρτηση μόνο του t, άρα το ίδιο και η $\frac{1}{N(t,y)}\left(\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}\right)$ έστω $f(t)$ η συνάρτηση αυτή.

Έχουμε $\frac{\mu'}{\mu} = f(t) \Rightarrow \ln\mu = \int f(t)dt \Rightarrow \boxed{\mu(t) = e^{\int f(t)dt}}$ ο.ε.δ.

II) Αποδεικνύεται αναλόγως.

Παραδείγματα

▶ $\frac{y^2}{2}+2ye^t+(y+e^t)y'=0$ Να λυθεί. Δέχεται ολ.παρ. της μορφής $\mu(t)$.

Λύση: $\frac{y^2}{2}+2ye^t+(y+e^t)y'=0$ (E₀) Θέτουμε $M(t,y)=y^2/2+2ye^t$

$N(t,y)=y+e^t\neq 0$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)=\frac{1}{y+e^t}\cdot\left(y+2e^t-e^t\right)=1=f(t)$$

Άρα $\mu(t)=e^{\int f(t)dt}=e^t$

$(E_0)\xrightarrow{\text{επί } \mu(t)}\frac{y^2e^t}{2}+2ye^{2t}+(ye^t+e^{2t})\cdot y'=0$ (E) Θέτουμε $\tilde{M}(t,y)=\frac{y^2e^t}{2}+2ye^{2t}$

$\tilde{N}(t,y)=ye^t+e^{2t}$

Επαλήθευση:

Έχουμε $\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=ye^t+2e^{2t}$, $\frac{\partial\tilde{N}}{\partial t}=ye^t+2e^{2t}$ $\Big\}$ $\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=\frac{\partial\tilde{N}}{\partial t}$ Άρα η (E) είναι όντως ακριβής. Άρα ∃ γενική λύση της (E) στη μορφή $F(t,y)=c_1\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{y^2\cdot e^t}{2}+2ye^{2t}$ (A)

$\frac{\partial F}{\partial y}=ye^t+e^{2t}$ (B)

$(A)\Rightarrow F=y^2e^t\cdot\frac{1}{2}+ye^{2t}+h(y)$ (Γ)

$(\Gamma)\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}=2ye^t\cdot\frac{1}{2}+e^{2t}+h'(y)\xrightarrow{(B)}$

$\rightarrow ye^t+e^{2t}=ye^t+e^{2t}+h'(y)\Longrightarrow h'(y)=0\Rightarrow h(y)=c_2\in\mathbb{R}$

$\therefore$ $F(t,y)=y^2e^t\frac{1}{2}+ye^{2t}+c_2\Rightarrow\boxed{y^2e^t\frac{1}{2}+ye^{2t}=c}$ $c=c_1-c_2\in\mathbb{R}$ Η λύση της (E₀) σε πεπλεγμένη μορφή

Αλλά και $\boxed{y=0}$ μια λύση της (E₀)

Γενικές περιπτώσεις ολοκληρωτικών παραγόντων

Μελετήσαμε περιπτώσεις στις οποίες ο ολοκληρωτικός παράγοντας ήταν συνάρτηση του y ή του t. Τι συμβαίνει σε πιό σύνθετες περιπτώσεις όμως;

Έστω μια μη Ακριβής Διαφορική εξίσωση της μορφής $M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$, η οποία έχει ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\boxed{\mu = \mu(S(t,y))}$, τότε, ισχύει ο ακόλουθος τύπος

$$\boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_t}{N\cdot S_t - M\cdot S_y}}$$

, όπου $\mu' = \frac{d\mu}{ds}$, $M_y = \frac{\partial M}{\partial y}$, $N_t = \frac{\partial N}{\partial t}$, $S_t = \frac{\partial S}{\partial t}$, $S_y = \frac{\partial S}{\partial y}$.
S συνάρτηση των t και y.

Απόδειξη: Έχουμε την $M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$ και $\mu(S(t,y))$ ο ολ. παράγοντάς της. Τότε, η $(\mu(S(t,y))\cdot M(t,y))dt + (\mu(S(t,y))\cdot N(t,y))dy = 0$ είναι Ακριβής, άρα από το γνωστό θεώρημα ισχύει,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu\cdot M) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N) \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot M + \mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot N + \mu\frac{\partial N}{\partial t}} \quad (A)$$

Τώρα, από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\boxed{\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial S}\cdot\frac{\partial S}{\partial y} = \mu'\cdot S_y} \quad (B)$$

$$\boxed{\frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{\partial\mu}{\partial S}\cdot\frac{\partial S}{\partial t} = \mu'\cdot S_t} \quad (\Gamma)$$

Άρα, $(A) \xRightarrow{(B),(\Gamma)} \mu'\cdot S_y\cdot M + \mu\cdot M_y = \mu'\cdot S_t\cdot N + \mu\cdot N_t \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \mu'(N\cdot S_t - M\cdot S_y) = \mu\cdot(M_y - N_t) \Longrightarrow \boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_t}{N\cdot S_t - M\cdot S_y}}$$

ο.ε.δ.

Παραδείγματα

▸ Να λυθεί η $(3t+2y+y^2)dt + (t+4ty+5y^2)dy=0$ είναι γνωστό ότι έχει ολ. παράγοντα της μορφής $\mu=\mu(t+y^2)$

Λύση: Θέτω $M(t,y)=3t+2y+y^2$, $N(t,y)=t+4ty+5y^2$ $\Bigg\|$ $\frac{\partial}{\partial t}(t+y^2)=1$, $\frac{\partial}{\partial y}(t+y^2)=2y$

Έχουμε $\frac{\mu'}{\mu}=\frac{N_t-M_y}{2yM-N}=\frac{1+4y-2-2y}{6yt+4y^2+2y^3-t-4yt-5y^2}=\frac{2y-1}{2y^3+2yt-y^2-t}=\frac{2y-1}{t(2y-1)+y^2(2y-1)}=$

$=\frac{1}{t+y^2}$ Θέτουμε $s=t+y^2\neq 0$ και έχουμε $\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}=\frac{1}{s}\Rightarrow \mu(s)=e^{\int\frac{1}{s}dt}\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(s)=s \Rightarrow \boxed{\mu(t+y^2)=t+y^2}$

(E_0) $(3t+2y+y^2)dt+(t+4yt+5y^2)dy=0 \xrightarrow{\text{επί } \mu(t+y^2)}$

$\Rightarrow (3t^2+3ty^2+2ty+2y^3+y^4+y^2t)dt+(t^2+ty^2+4yt^2+4y^3t+5y^2t+5y^3)dy=0$ (E)

Θέτω $\tilde{M}(y,t)=3t^2+3ty^2+2ty+2y^3+y^4+y^2t$
$\tilde{N}(y,t)=t^2+ty^2+4yt^2+4y^3t+5y^2t+5y^3$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{M}(y,t)}{\partial y}&=6ty+2t+6y^2+4y^3+2yt=8yt+2t+4y^3+6y^2\\ \frac{\partial\tilde{N}(y,t)}{\partial t}&=2t+y^2+8yt+4y^3+5y^2=8yt+2t+4y^3+6y^2\end{aligned}\right\}$$

Άρα η (E) είναι ακριβής. Άρα $\exists\ F(t,y)=c_1$ γενική λύση της με τις ιδιότητες:

$\frac{\partial F}{\partial t}=(3t+2y+y^2)\cdot(t+y^2)=3t^2+3ty^2+2ty+2y^3+y^4+y^2t$ (A)

$\frac{\partial F}{\partial y}=t^2+ty^2+4yt^2+4y^3t+5y^2t+5y^3$ (B)

(A) $\Rightarrow F = t^3 + 2t^2y^2 + t^2y + 2y^3t + y^4t + h(y)$ (Γ)

(Γ) $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \cancel{4t^2y} + \cancel{t^2} + \cancel{6y^2t} + \cancel{4y^3t} + h'(y) \overset{(B)}{=} \cancel{t^2} + \cancel{6ty^2} + \cancel{4t^2y} + \cancel{4ty^3} + 5y^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow h'(y) = 5y^3 \Rightarrow h(y) = \frac{5}{4}y^3 + c_2, \; c_2 \in \mathbb{R}$

(Γ) $\Rightarrow \boxed{t^3 + 2t^2y^2 + t^2y + 2ty^3 + ty^4 + \frac{5}{4} \cdot y^3 = c}$, $c = c_1 - c_2 \in \mathbb{R}$ Η λύση της (E_0) σε πεπλεγμένη μορφή

► $(x^2y + y^2)dx - x^3dy = 0$ Να λυθεί, δίνεται ότι δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(x \cdot y)$.

Λύση: Θέτω $M(x,y) = x^2y + y^2$, $N(x,y) = -x^3$ $\Big\|$ $\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y) = y$ $\quad \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot y) = x$

$M_y = x^2 + 2y$, $N_x = 0 - 3x^2$ Άρα $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N \cdot y - M \cdot x} = \frac{x^2 + 2y + 3x^2}{-x^3y - y^0x^3 - xy^2} = \frac{\cancel{4x^2} + 2y + 4x^2}{-2x^3y - xy^2} = \frac{2(y+2x^2)}{-xy(2x^2+y)} \Rightarrow$ (έχινα κάποια λάθη...)

$\Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{-2}{xy}$ Θέτουμε $s = xy$ και έχουμε $\frac{\mu'(s)}{\mu(s)} = \frac{-2}{s} \Rightarrow \mu(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\mu(xy) = \frac{1}{(xy)^2}}$

(E_0) $(x^2y + y^2)dx - x^3dy = 0 \xrightarrow{\text{επί } \mu(xy)} (x^0y^{-1} + x^{-2}y^0)dx - x^1y^{-2}dy = 0$ (E)

Θέτω $\tilde{M}(x,y) = x^0y^{-1} + x^{-2}y$, $\tilde{N}(x,y) = -x^1 \cdot y^{-2}$ $\Big\|$ $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -y^{-2} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ Άρα η (E) είναι ακριβής άρα $\exists$ γενική λύση της στη μορφή $F(x,y) = c_1 \in \mathbb{R}$ με τις γνωστές ιδιότητες.

$\frac{\partial F}{\partial x} = y^{-1} + x^{-2}$ (A) $\quad \frac{\partial F}{\partial y} = -xy^{-2}$ (B) $\Big\|$ (A) $\Rightarrow F = y^{-1} \cdot x + \frac{x^{-1}}{-1} + h(y)$ (Γ)

(Γ) $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = -y^{-2} \cdot x + h'(y) \overset{(B)}{=} -xy^{-2} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_2, \; c_2 \in \mathbb{R}$

(Γ) $\Rightarrow \boxed{y^{-1} \cdot x - x^{-1} = c}$, $c = c_1 - c_2 \in \mathbb{R}$ Οι λύσεις της E_0 σε πεπλεγμένη μορφή

Μια ιδιαίτερη μορφή διαφορικής εξίσωσης

Έστω μια εξίσωση της μορφής $\boxed{\frac{dy}{dt} = f(at+by)}$ (E_0) $\left(\frac{dy}{dt} = y'\right)$

Για να λύσουμε μια τέτοια εξίσωση θέτουμε $\boxed{z = at+by}$ (A)

(A) $\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(at+by) = \frac{d}{dt}(at) + \frac{d}{dt}(by) = a + b\cdot\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = a + f(z)\cdot b \Rightarrow$

$\boxed{\frac{dz}{a+b\cdot f(z)} = dt}$ (E) Η εξίσωση (E) είναι μια εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Λύνοντας την (E) υπολογίζουμε τη συνάρτηση z και μέσω της σχέσης (A) υπολογίζουμε τη συνάρτηση y η οποία αποτελεί λύση της (E_0).

Παραδείγματα + Ασκήσεις στα προηγούμενα

(πχ) Να λυθεί η $\frac{dy}{dt} = 2t + y$.

Λύση: $\frac{dy}{dt} = 2t + y$ (E_0)

Θέτω $z = 2t + y$ (A)

(A) $\Rightarrow \frac{dz}{dt} = 2 + \frac{dy}{dt} \Rightarrow z' = 2 + z$ (E)

(E) $\Rightarrow \frac{dz}{dt} = 2 + z$ Για $z \neq -2$: $\frac{1}{2+z}dz = dt \Rightarrow \int \frac{1}{2+z}dz = \int dt + c_1 \Rightarrow$ $c_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln|2+z| = t + c_1 \Rightarrow |z+2| = e^{t+c_1} \Rightarrow z+2 = \pm e^{c_1}\cdot e^{t}$

Θέτω $c = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}$ και έχουμε $\boxed{z = c\cdot e^{t} - 2}$, $c \in \mathbb{R}$ λύσεις της (E)

(Η λύση $z=-2$ δεν παραλείφθηκε, καθώς για $c=0$ η $z = c\cdot e^{t} - 2$ γίνεται $z=-2$)

$z = c\cdot e^{t} - 2 \overset{(A)}{\Rightarrow} 2t + y = c\cdot e^{t} - 2 \Rightarrow \boxed{y(t) = c\cdot e^{t} - 2(1+t)}$, $c \in \mathbb{R}$ οι λύσεις της (E)

(Π.Χ.) Να λυθεί η $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t-y}+1$.

<u>Λύση</u>: $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t-y}+1$ (E_0) Θέτω $z=t-y$ (A) Πρέπει $y\neq t$, δηλ. $z\neq 0$

$(A) \Rightarrow z'=1-\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t-y}-1=-\frac{1}{t-y} \Rightarrow \frac{dz}{dt}=-\frac{1}{z} \Rightarrow z\,dz=-dt \Rightarrow \int z\,dz=-\int dt+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\therefore \frac{z^2}{2}=-t+c \Rightarrow z^2=-2t+2c \xRightarrow{(A)} \boxed{(t-y)^2=2(c-t)}$, $c\in\mathbb{R}$, $y\neq t$ Η λύση της (E_0) σε πεπλεγμένη μορφή.

<u>Άσκηση</u>: Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία η εξίσωση $ty^2+\lambda t^2y+t^2(t+y)\cdot y'=0$ (E) είναι ακριβής και να λυθεί η εξίσωση για την τιμή αυτή.

<u>Λύση</u>: Η (E) γράφεται και $(ty^2+\lambda t^2y)\,dt+t^2(t+y)\,dy=0$.

Θέτω $\begin{cases} M(t,y)=ty^2+\lambda t^2y \\ N(t,y)=t^2(t+y) \end{cases}$

Για να είναι ακριβής η (E), πρέπει

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(ty^2+\lambda t^2y)=\frac{\partial}{\partial t}(t^2(t+y)) \Rightarrow 2ty+\lambda t^2=3t^2+2ty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda t^2=3t^2 \Rightarrow \boxed{\lambda=3}$

Για $\lambda=3$ η (E) είναι ακριβής, δηλ. $\exists$ λύση της στη μορφή $F(t,y)=c_1\in\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$\frac{\partial F}{\partial t}=M(t,y)=ty^2+3t^2y$ (A)

$\frac{\partial F}{\partial y}=N(t,y)=t^3+t^2y$ (B)

$(A) \Rightarrow F(t,y)=\frac{1}{2}t^2y^2+t^3y+h(y)$ (Γ)

$(\Gamma) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}=t^2y+t^3+h'(y) \xRightarrow{(B)}$

$\Rightarrow t^2y+t^3+h'(y)=t^3+t^2y \Rightarrow h'(y)=0 \Rightarrow h(y)=c_2\in\mathbb{R}$

Από (Γ): $F(t,y)=\frac{1}{2}t^2y^2+t^3y+c_2 \Rightarrow \boxed{\frac{t^2y^2}{2}+t^3y=c}$, $c\in\mathbb{R}$ Η λύση της (E) σε πεπλεγμένη μορφή.

Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών - Ομογενείς δ.ε.

Μια δ.ε. πρώτης τάξης της μορφής $\boxed{y' = P(y)\cdot q(t)}$ (E) όπου P, q συνεχείς συναρτήσεις με πεδία ορισμού τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, A και B αντιστοίχως, λέγεται εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

- Αν $P(y) \neq 0 \quad \forall y \in A$. Ακολουθούμε την εξής μέθοδο επίλυσης:

$$(E) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = P(y)\cdot q(t) \Rightarrow \frac{1}{P(y)}dy = q(t)dt \Rightarrow \int \frac{1}{P(y)}dy = \int q(t)dt + c, \ c\in\mathbb{R}$$

Η σχέση στην οποία καταλήξαμε μας δίνει τη γενική λύση της (E)

- Αν $\exists \ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in A$ τέτοια ώστε $P(\xi_i) = 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, τότε επιλύουμε την εξίσωση στο σύνολο $A \setminus \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, και λύσεις της (E) είναι αυτή που θα υπολογίσουμε αλλά και οι $y(t) = \xi_1$, $y(t) = \xi_2$, ... $y(t) = \xi_n$

π.χ. Να λυθεί η $(t^2-1)\,y\cdot y' + 2t(y+y^2) = 0$, $t>1$ (E).

Λύση: Για $y \neq 0$ παίρνουμε

$$y' = -\frac{y+y^2}{y}\cdot\frac{2t}{1-t^2}$$

Εξαιρούμε τα σημεία που μηδενίζουν την $\frac{y+y^2}{y}$, δηλαδή τις ευθείες $y=0$ και $y=-1$

και έχουμε $\int \frac{2t}{\cancel{1-t^2}} dt = -\int \frac{1}{1+y}dy \Rightarrow \log(t^2-1) = -\log|y+1| + c_1, \ c_1\in\mathbb{R}$

$$\rightarrow (t^2-1)|y+1| = e^{c_1} \Rightarrow y+1 = \pm e^{c_1}\cdot(t^2-1)^{-1} \quad \text{Θέτω } c = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}$$

Άρα $\boxed{y = -1 + \frac{c}{t^2-1}, \ c\in\mathbb{R}}$, $\boxed{y = 0}$ όλες οι λύσεις της (E) αφού για $c=0$ παίρνουμε την $y=-1$

Ορσ.: α) Μια συνάρτηση $f(t,y)$ λέγεται <u>ομογενής βαθμού k</u>, αν $f(\lambda t,\lambda y)=\lambda^k f(t,y)$.

β) Μια δ.ε. πρώτης τάξης της μορφής $P(t,y)y'=q(t,y)$ όπου οι συναρτήσεις P,q είναι ομογενείς βαθμού k, λέγεται <u>ομογενής βαθμού k</u>.

Μέθοδος Επίλυσης

Έχουμε μια ομογενή βαθμού k συνάρτηση της μορφής $p(t,y)y'=q(t,y)$ (E)

Θέτουμε $x(t)=\frac{y(t)}{t}$, $t\neq 0$ (A)

(A) $\Rightarrow y=t\cdot x \Rightarrow y'=x+tx'$ (B)

P, q ομογενείς:

$P(t,y)=P(t,tx)=t^k\cdot P(1,x)$ (Γ)

$q(t,y)=q(t,tx)=t^k q(1,x)$ (Δ)

$$(E)\xrightarrow{(B)} P(t,y)x+P(t,y)tx'=q(t,y)\xrightarrow{(\Gamma),(\Delta)} t^kP(1,x)\cdot x+t^kP(1,x)tx'=t^kq(1,x)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow tx'P(1,x)=q(1,x)-xP(1,x)$$

Με την προϋπόθεση ότι $q(1,x)-xP(1,x)\neq 0$ καταλήγουμε στην

$$\frac{P(1,x)\cdot x'}{q(1,x)-xP(1,x)}=\frac{1}{t}$$ που είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Η ζητούμενη λύση είναι η $y(t)=t\cdot x(t)$

(π.χ.) Να λυθεί η $3ty^2\cdot y'=t^3+y^3$, $t\neq 0$ (E).

<u>Λύση:</u> Θέτω $P(t,y)=3ty^2$, $q(t,y)=t^3+y^3$

$$\left.\begin{aligned}P(\lambda t,\lambda y)&=3\lambda t\cdot(\lambda y)^2=\lambda^3P(t,y)\\ q(\lambda t,\lambda y)&=(\lambda t)^3+(\lambda y)^3=\lambda^3q(t,y)\end{aligned}\right\}$$ P, q ομογενείς βαθμού 3.

Θεωρώ το μετασχηματισμό $y=t\cdot x$, $y'=x+tx'$.

Έχουμε, $P(t,y)=t^3\cdot P(1,x)$ και $q(t,y)=t^3q(1,x)$

Η νέα εξίσωση είναι η: $t^3(3x^2)(x+tx') = t^3(1+x^3) \xRightarrow{t\neq 0}$

$\Rightarrow 3x^3 + 3tx^2x' = 1 + x^3 \Longrightarrow 3tx^2x' = 1 - 2x^3$

Για $1-2x^3 \neq 0$: $\dfrac{3x^2 dx}{1-2x^3} = \dfrac{1}{t}dt \Rightarrow \dfrac{(1-2x^3)'}{1-2x^3}dx = \dfrac{-2}{t}dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|1-2x^3| = -2\ln|t| + c_1,\ c_1\in\mathbb{R} \Rightarrow \ln|1-2x^3| = -\ln t^2 + c_1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 1-2x^3 = \pm e^{c_1}\cdot t^{-2}$ Θέτω $c = \pm e^{c_1}\in\mathbb{R}$, αφού $x = \frac{y}{t}$:

$1 - 2\frac{y^3}{t^3} = ct^{-2} \xRightarrow{\text{επί } t^3} t^3 - 2y^3 = ct \Rightarrow \boxed{2y^3 = t^3 - c\cdot t}$, $c\in\mathbb{R}$ Οι λύσεις της (Ε) σε πεπλεγμένη μορφή.

Η περίπτωση $1-2x^3=0 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow y^3 = \frac{t^3}{2}$ είναι ενσωματωμένη στον τύπο που καταλήξαμε για $c=0$.

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις $2^{ης}$ Τάξης

Προκαταρκτικά

Μια γραμμική δ.ε. $2^{ης}$ τάξης μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$a_0(t)\,x'' + a_1(t)\,x'(t) + a_2(t)\,x(t) = g(t)$$

Αν $a_0 \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται ως

$$x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = f(t) \quad (A)$$

όπου $a = \frac{a_1}{a_0}$, $b = \frac{a_2}{a_0}$, $f = \frac{g}{a_0}$.

Συχνά, μας εξυπηρετεί να εισάγουμε συμβολισμό διαφορικών τελεστών στην Θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Έτσι, ορίζοντας ως L τον διαφορικό τελεστή,

$L = \frac{d^2}{dt^2} + a(t)\frac{d}{dt} + b(t)$. Η (A) γράφεται, $L(y) = f(t)$. (E)

- Η $L(y)=0$ λέγεται ομογενής αντίστοιχη της (E)
- Η (E) λέγεται μη ομογενής

Ορσ.: • Δύο συναρτήσεις $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ λέγονται <u>γραμμικά εξαρτημένες</u> αν η μία είναι πολλαπλάσιο της άλλης επί μια σταθερά.
• Δύο συναρτήσεις φ_1, φ_2 λέγονται <u>γραμμικά ανεξάρτητες</u> αν ισχύει η ισοδυναμία: $c_1\varphi_1(t) + c_2\cdot\varphi_2(t) = 0 \iff c_1 = c_2 = 0 \quad \forall\, t\in I \quad (\varphi_i : I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ i=1,2)$

Ορσ.: Η <u>ορίζουσα Wronski</u> δυο διαφορίσιμων συναρτήσεων φ_1, φ_2 που ορίζονται σε ένα διάστημα $I\subseteq\mathbb{R}$, είναι η:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1\cdot\varphi_2' - \varphi_1'\cdot\varphi_2.$$

Παρατήρηση: Η ορίζουσα Wronski δύο λύσεων της $L(x)=0$ είτε είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν ή δεν μηδενίζεται πουθενά στο I (Αν $\exists\ t_0\in I$ τ.ω. $W(t_0)\neq 0$, τότε $W(t)\neq 0\ \forall\ t\in I$).

<u>Θεώρημα:</u> (Τύπος του Liouville) Έστω φ_1, φ_2 λύσεις της $L(y)=0$ και $W(t)=W_{(\varphi_1,\varphi_2)}(t)$ η ορίζουσα Wronski. Τότε, ισχύει ότι

$$W(t)=W(t_0)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

<u>Απόδειξη:</u> Παρατηρούμε ότι $W'(t)=\varphi_1\cdot\varphi_2''-\varphi_1''\cdot\varphi_2$

Επειδή φ_1, φ_2 λύσεις της $L(y)=0$, έχουμε:

$$\begin{cases} \varphi_1''=-a(t)\varphi_1'-b(t)\varphi_1 \\ \varphi_2''=-a(t)\varphi_2'-b(t)\varphi_2 \end{cases}$$

Συνεπώς, $W'(t)=\varphi_1(-a(t)\varphi_2'-b(t)\varphi_2)-(-a(t)\varphi_1'-b(t)\varphi_1)\varphi_2=-a(t)(\varphi_1\varphi_2'-\varphi_2\varphi_1')=$
$=-a(t)W(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow W'(t)+a(t)\cdot W(t)=0 \Rightarrow W(t)=c\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}a(s)ds} \Rightarrow W(t)=W(t_0)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}a(s)ds} \quad ■$$

<u>Θεώρημα:</u> (Ύπαρξης και μονοσήμαντου)
Αν $a(t), b(t), f(t)$ συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I, τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} L(x)=x''+a(t)x'+b(t)x=f(x) \\ x(t_0)=a \\ x'(t_0)=b \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση $\forall$ αρχική συνθήκη $(t_0,(a,b))$.

<u>Παρατήρηση:</u> Αν φ_1, φ_2 λύσεις της $L(y)=0$, τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός $c_1\varphi_1+c_2\varphi_2$ $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$ αποτελεί επίσης λύση της $L(y)=0$.

<u>Απόδειξη:</u> L γραμμικό, $L(\varphi_1)=L(\varphi_2)=0$ Άρα
$L(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=L(c_1\varphi_1)+L(c_2\varphi_2)=c_1L(\varphi_1)+c_2L(\varphi_2)=0$ ■

Παρατήρηση: Ο χώρος λύσεων ή το σύνολο λύσεων της $L(y)=0$ είναι ένας γραμμικός χώρος διάστασης 2.

Συγκεντρωτικά: Γραμμικές ΔΕ $2^{ης}$ Τάξης

φ_1, φ_2 είναι λύσεις της $L(y)=0$:

- φ_1, φ_2 γραμμικά ανεξάρτητες
- Ισχύει ο τύπος Liouville
- Βελτίωση της γραμμικής ανεξαρτησίας (*)

Επεξήγηση (*): Αν βρω για τυχόν $t_0 \in I$, ότι ισχύει $W(t_0) \neq 0$, τότε, ισχύει $W(t) \neq 0 \ \forall \ t \in I$.

Επίλυση γραμμικών ΔΕ $2^{ης}$ τάξης με μη σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε μια εξίσωση της μορφής $L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)\cdot y = 0$ όπου $p, q : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις.

Μέθοδος με την ορίζουσα Wronski

Έστω $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$ λύσεις της εξίσωσης $L(y)=0$, $t \in I$

Ισχύει, $\dfrac{\varphi_1 \cdot \varphi_2' - \varphi_1' \cdot \varphi_2}{\varphi_1^2} = \dfrac{W}{\varphi_1^2} \Longleftrightarrow \left(\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' = \dfrac{W}{\varphi_1^2} \Longleftrightarrow \varphi_2(t) = \varphi_1(t) \displaystyle\int \dfrac{W(t)}{\varphi_1^2(t)} dt$

Σύμφωνα με τον τύπο Liouville: $\boxed{\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \displaystyle\int \dfrac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2(t)} dt}$

π.χ. Να λυθεί η $y'' - \dfrac{t+1}{t} \cdot y' + \dfrac{1}{t} \cdot y = 0$, $t > 0$ αν $\varphi_1(t) = e^t$ είναι μια λύση της.

Λύση: Έχουμε $\varphi_2(t) = e^t \displaystyle\int \dfrac{e^{\int \frac{t+1}{t} dt}}{e^{2t}} dt$

Υπολογίζουμε, $\displaystyle\int \dfrac{t+1}{t} dt = t + \ln t$ Άρα $e^{\int \frac{t+1}{t} dt} = t \cdot e^t$

Άρα, $\varphi_2(t) = e^t \displaystyle\int \dfrac{t \cdot e^t}{e^{2t}} dt = e^t \int \dfrac{t}{e^t} dt = e^t \int t \cdot e^{-t} dt = -e^t \int t\,(e^{-t})' dt =$
$= -e^t \left(t e^{-t} - \int e^{-t} dt\right) \Longrightarrow \boxed{\varphi_2(t) = -t-1}$ Η ζητούμενη λύση.

Επίλυση γραμμικών ΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε μια εξίσωση της μορφής $L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, όπου $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Η συνάρτηση $y(t) = e^{rt}$ έχει την ιδιότητα ότι οι $y'(t)$ και $y''(t)$ είναι πολλαπλάσιά της, κατανοούμε λοιπόν πως η λύση της $L(y)=0$ θα έχει αυτή τη μορφή.

Αντικαθιστώντας, $L(e^{rt}) = 0 \Rightarrow r^2 \cdot e^{rt} + a_1 \cdot r \cdot e^{rt} + a_2 e^{rt} = 0 \xrightarrow{e^{rt} \neq 0}$
$\Rightarrow r^2 + a_1 \cdot r + a_2 = 0$

Το $r^2 + a_1 \cdot r + a_2$ ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο της $L(y)=0$.
Η $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση της $L(y)=0$.

Ορίζουμε στην $r^2 + a_1 \cdot r + a_2 = 0$ τη διακρίνουσα $\Delta = a_1^2 - 4a_2$ και μελετούμε τις εξής περιπτώσεις:

i) Αν $\Delta > 0$, οι $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ είναι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$. Στην περίπτωση αυτή, οι $\boxed{y_1(t) = e^{r_1 t}}$, $\boxed{y_2(t) = e^{r_2 t}}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, αφού $W_{(y_1,y_2)}(t) = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0$

Άρα η γενική λύση είναι η $\boxed{y = c_1 \cdot e^{r_1 t} + c_2 \cdot e^{r_2 t}}$.

ii) Αν $\Delta = 0$, τότε $r_1 = r_2 = -\dfrac{a_1}{2}$ η λύση της χαρ. εξίσωσης. και $\boxed{y_1(t) = e^{-\frac{a_1 \cdot t}{2}}}$ είναι μια λύση της. Σύμφωνα με την εξίσωση στην οποία καταλήξαμε πριν, $y_2(t) = y_1(t) \cdot \displaystyle\int \frac{e^{-\int P(t)dt}}{y_1^2(t)} dt$, $P(t) = a_1$

Άρα $\boxed{y_2(t) = t \cdot e^{-\frac{a_1 t}{2}}}$. Άρα η γενική λύση είναι η: $\boxed{y(t) = e^{-\frac{a_1 t}{2}}(c_1 + c_2 \cdot t)}$

iii) Αν $\Delta < 0$, τότε, η $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ έχει μιγαδικές ρίζες, τις $r_{1,2} = \sigma \pm i\omega$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ $r_{1,2} \in \mathbb{C}$

η γενική λύση στην περίπτωση αυτή είναι η

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{(\sigma + i\omega)t} + c_2 e^{(\sigma - i\omega)t}} \quad (A)$$

Υπενθυμίζουμε τον τύπο το Euler: $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta$.

Βάσει αυτού του τύπου, η γενική λύση γίνεται:

$$y(t) = c_1 e^{\sigma t}(\cos\omega t + i \sin\omega t) + c_2 e^{\sigma \cdot t}(\cos\omega t - i \sin\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\sigma t}\left[(c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\sin\omega t\right]$$

Θέτοντας $\kappa_1 = c_1 + c_2$ και $\kappa_2 = i(c_1 - c_2)$ καταλήγουμε στον τύπο της γενικής λύσης: $\boxed{y(t) = e^{\sigma t}(\kappa_1 \cos\omega t + \kappa_2 \sin\omega t)}$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι $e^{\sigma t}\cos\omega t$, $e^{\sigma t}\sin\omega t$ είναι γρ.ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις της $L(y) = 0$.

o>———<o

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης της $L(y)=0$ στην περίπτωση που $\Delta < 0$ είναι να θεωρήσουμε τις λύσεις της $L(y) = 0$ φ_1, φ_2, όπου (από τη σχέση (A))

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(t) = e^{\sigma \cdot t} \cdot e^{i\omega t} = e^{\sigma \cdot t}(\cos\omega t + i \sin\omega t) \\ \varphi_2(t) = e^{\sigma \cdot t} \cdot e^{-i\omega t} = e^{\sigma \cdot t}(\cos\omega t - i \sin\omega t) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \varphi_1 + \varphi_2 = 2e^{\sigma t}\cos\omega t \\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2i\, e^{\sigma t}\sin\omega t \end{array}$$

Εφόσων οι φ_1, φ_2 είναι γραμμικές ανεξάρτητες λύσεις της $L(y) = 0$, το ίδιο θα είναι και οι:

$\boxed{y_1(t) = e^{\sigma t}\cos\omega t}$ $\boxed{y_2(t) = e^{\sigma t}\sin\omega t}$ $(W_{(y_1, y_2)}(t) \neq 0)$

(πχ) Να λυθεί η $y''-5y'+6y=0$.

Λύση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση της δοσμένης εξίσωσης είναι η

$r^2-5r+6=0$ και οι λύσεις της: $r_1=2$ $r_2=3$

Άρα $y_1(t)=e^{2t}$, $y_2(t)=e^{3t}$

Έχουμε $W_{(y_1,y_2)}(t)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=e^{2t}\cdot 3e^{t}-2e^{t}\cdot e^{3t}=3e^{3t}-2\cdot e^{4t}\neq 0$

Άρα οι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Η ζητούμενη γενική λύση της εξίσωσης είναι η $\boxed{y(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

(π.χ.) Να λυθεί η $y''+6y'+9y=0$.

Λύση: Η χαρ. εξίσωση: $r^2+6r+9=0$ (στις εξετάσεις να γράφετε πιο πολλά λόγια)

οι λύσεις της: $r_{1,2}=3$

Άρα $y_1(t)=e^{-3t}$, από γνωστό τύπο: $y_2(t)=y_1(t)\int \frac{e^{-\int 6dt}}{y_1^2(t)}dt \Rightarrow$

$\Rightarrow y_2(t)=t\cdot e^{-3t}$

$W_{(y_1,y_2)}(t)=\begin{vmatrix} e^{-3t} & -3e^{-3t} \\ te^{-3t} & e^{-3t}-3te^{-3t} \end{vmatrix}\neq 0$ Άρα οι y_1, y_2 γρ. ανεξάρτητες

(π.χ.) Να λυθεί η $y''-4y'+5y=0$.

Λύση: Χαρ. Εξίσωση: $r^2-4r+5=0$, $\Delta<0$ λύσεις: $r_{1,2}=\sigma\pm i\cdot\omega$

$\left.\begin{array}{l} r_1^2-4r_1+5=0 \\ r_2^2-4r_2+5=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{πράξεις})} r_{1,2}=2\pm i$

Άρα η γενική λύση: $\boxed{y(t)=e^{2t}(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)}$ $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

π.χ. Να λυθεί το ΠΑΤ: $y''+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$.

<u>Λύση:</u> Χαρ. Εξ.: $r^2+1=0$, $\Delta=-4$ $\quad r_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \Rightarrow r_{1,2}=\pm i$

Η γενική λύση θα είναι της μορφής $y(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$

$y'(t)=-c_1\cdot\sin t+c_2\cdot\cos t$ $\quad \left.\begin{matrix} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} c_1=1 \\ c_2=0 \end{matrix}\right.$

Άρα η λύση του ΠΑΤ: $\boxed{y(t)=\cos t}$

o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

<u>Μη ομογενής εξίσωση</u>

Μέχρι τώρα μελετήσαμε ομογενείς εξισώσεις, δηλαδή εξισώσεις της μορφής $L(y)=0$. Ας μελετήσουμε τώρα εξισώσεις της μορφής $L(y)=f(t)$ όπου $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και $f(t)=y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)$, $a_1,a_2\in\mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $\varphi_1(t)$ και $\varphi_2(t)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς δ.ε. $L(y)=y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=0$ και έστω $\psi(t)$ μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης $L(y)=f(t)$, τότε, κάθε λύση της $L(y)=f(t)$ έχει τη μορφή: $\boxed{y(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\psi(t)}$ για κατάλληλη επιλογή των σταθερών c_1 και c_2

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $y(t)$ τυχαία λύση της $L(y)=f(t)$ και $\psi(t)$ μια ειδική λύση της (η οποία δίνεται από την υπόθεση). Λόγω του λήμματος που θα εκφράσουμε πιο κάτω, η $\varphi(t)=y(t)-\psi(x)$ αποτελεί λύση της $L(y)=0$. Κάθε λύση αυτής της ομογενούς εξίσωσης όμως, μπορεί να γραφεί στη μορφή $y(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$ για κάποια $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Άρα $y(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\psi(t)$. ■

Λήμμα: Η διαφορά δύο οποιονδήποτε λύσεων της μη ομογενούς εξίσωσης $L(y)=f(t)$ αποτελεί λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης $L(y)=0$.

Απόδειξη: Έστω $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ δύο λύσεις της $L(y)=f(t)$.
Επειδή ο L είναι γραμμικός, έχουμε,

$$L(\varphi_1-\varphi_2)=L(\varphi_1)-L(\varphi_2)=0-0=0$$

και έτσι η $\varphi_1(t)-\varphi_2(t)$ είναι λύση της $L(y)=0$. ■

Μέθοδος του Lagrange (ή μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων)

Θα περιγράψουμε μια γενική μέθοδο επίλυσης της μη ομογενούς εξίσωσης $L(y)=y''+a_1(t)y'+a_2(t)y=f(t)$ (Ε) με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς $L(y)=0$ και με βάση το Θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου να βρούμε τη γενική λύση και της $L(y)=f(t)$.

Έστω $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ γρ. ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς $L(y)=0$, γνωρίζουμε ότι η γενική λύση της $L(y)=0$ δίνεται από τον τύπο $\varphi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να μεταβάλλουμε τις παραμέτρους c_1, c_2 δηλ. να θέσουμε $c_1=c_1(t)$ και $c_2=c_2(t)$ ελπίζοντας ότι έτσι θα βρούμε μια ειδική λύση της $L(y)=f(t)$.

Έστω λοιπόν $\psi(t)=c_1(t)\varphi_1(t)+c_2(t)\varphi_2(t)$

Τότε, $\psi'(t)=c_1'\varphi_1+c_1\varphi_1'+c_2'\varphi_2+c_2\varphi_2'$

$$\psi''(t)=c_1''\varphi_1+c_1'\varphi_1'+c_1'\varphi_1'+c_1\varphi_1''+c_2''\varphi_2+c_2'\varphi_2'+c_2'\varphi_2'+c_2\varphi_2''\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi''(t)=c_1''\varphi_1+2c_1'\varphi_1'+c_1\varphi_1''+c_2''\varphi_2+2c_2'\varphi_2'+c_2\varphi_2''$$

Θέτουμε τις τιμές αυτές στην $L(y)=f(t)$ και παίρνουμε:

$\psi''(t)+a_1(t)\psi'(t)+a_2(t)\psi(t)=f(t)\Rightarrow \dots$ (πράξεις)

$c_1(t)(\varphi_1''+a_1\varphi_1'+a_2\varphi_1)+c_2(t)(\varphi_2''+a_1(t)\varphi_1'+a_2(t)\varphi_1)+(c_1'\varphi_1+c_2'\varphi_2)+(c_1'\varphi_1'+c_2'\varphi_2')+$
$+a_1(t)(c_1'\varphi_1+c_2'\varphi_2)=f(t)$

Οι δύο πρώτοι όροι μηδενίζονται αφού οι φ_1, φ_2 είναι λύσεις της $L(y)=0$. Η εξίσωση γίνεται:

$$(a_1(t)+1)(c_1'(t)\varphi_1(t)+c_2'(t)\varphi_2(t))+(c_1'(t)\varphi_1'(t)+c_2'(t)\varphi_2'(t))=f(t)$$

Η εξίσωση ισχύει όταν: $c_1'\varphi_1+c_2'\varphi_2=0$, $c_1'\varphi_1'+c_2'\varphi_2'=f$. Σύστημα με c_1', c_2' αγνώστους.

$W(\varphi_1,\varphi_2)(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{vmatrix}\neq 0$, αφού οι φ_1, φ_2 ήταν γρ. ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)=0$. Άρα το σύστημα έχει μια ακριβώς λύση.

Έχουμε ένα σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι ο: $\left(\begin{array}{cc|c}\varphi_1(t) & \varphi_2(t) & 0\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & f(t)\end{array}\right)$ Σύμφωνα με τον τύπο του Cramer (γνωστός από Γραμμική Άλγεβρα):

$$c_1'(t)=\frac{\det\begin{pmatrix}0 & \varphi_2(t)\\ f(t) & \varphi_2'(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{pmatrix}}=\frac{-f(t)\varphi_2(t)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}\Rightarrow \boxed{c_1(t)=-\int\frac{f(t)\varphi_2(t)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}dt}$$

Όμοια, $$c_2'(t)=\frac{\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & 0\\ \varphi_1'(t) & f(t)\end{vmatrix}}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}\Longrightarrow \boxed{c_2(t)=+\int\frac{f(t)\varphi_1(t)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}dt}$$

Επειδή μας ενδιαφέρει η εύρεση μιας ειδικής λύσης της $L(y)=f(t)$, αυθαίρετα, παραλείψαμε τις προκύπτουσες σταθερές ολοκλήρωσης. Η ζητούμενη γενική λύση της $L(y)=f(t)$:

$$\boxed{\psi(t)=-\varphi_1(t)\int\frac{f(t)\varphi_2(t)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}dt+\varphi_2(t)\int\frac{f(t)\varphi_1(t)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}dt}$$

Οι ελπίδες μας ανταμείφθηκαν!

Ο τύπος στον οποίο καταλήξαμε ωστόσο, δεν είναι η τελική μας απάντηση. Έχουμε, $(W_{(\varphi_1,\varphi_2)}(t) = W(t))$

$$\psi(t) = -\varphi_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi_2(s)f(s)}{W(s)}ds + \varphi_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi_1(s)\cdot f(s)}{W(s)}ds = \int_{t_0}^{t}\frac{\varphi_1(s)\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\varphi_2(s)}{W(s)}f(s)ds$$

$$\Longrightarrow \boxed{\psi(t) = \int_{t_0}^{t} G(s,t)\cdot f(s)\,ds}, \quad (A)$$

Όπου, $\boxed{G(s,t) = \frac{\varphi_1(s)\cdot\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(s)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(s)}}$ ← Συνάρτηση Green

Π.χ. Να λυθεί: $y''-y'-2y=e^{-t}$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση της ανείστοιχης ομογενούς Δ.ε. είναι η $r^2-r-2=0$ $\Delta = 1+8=9 \Rightarrow r_1=-1$ $r_2=2$

~~Άρα~~ Η γενική λύση της $L(y)=y''-y'-2y=0$ είναι η:

$y(t) = c_1e^{-t}+c_2e^{2t}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ και $y_1(t)=e^{-t}$, $y_2(t)=e^{2t}$ δύο γρ. ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)=0$.

Άρα έχουμε $\begin{cases} c_1(t)e^{-t}+c_2(t)e^{2t}=0 \\ c_1'(t)(-e^{-t})+c_2'(t)\cdot 2e^{2t}=e^{-t}\end{cases}$ $W_{(y_1,y_2)}(t) = 2e^{2t}\cdot e^{-t}+e^{-t}e^{2t} = 2e^{t}+e^{t}=3e^{t}$

Σύμφωνα με τον τύπο (A), η ζητούμενη γενική λύση είναι η: $\psi(t) = \int_0^t \frac{e^{-s}\cdot e^{2t}-e^{-t}\cdot e^{2s}}{3e^{s}}ds = -\frac{t}{3}e^{-t}+\left(\frac{1-e^{-3t}}{9}\right)\cdot e^{2t}$.

Θεώρημα: Ο χώρος λύσεων της $L(y)=0$ $(\mathcal{L})$ είναι διανυσματικός χώρος και $\dim \mathcal{L}=2$.

Απόδειξη: i) Έστω $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathcal{L}$ και $\varphi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$, $c_1,c_2 \in \mathbb{R}$

Τότε $L(\varphi(t)) \underset{L \text{ γραμμική}}{=\!=\!=} L(c_1\varphi_1(t))+L(c_2\varphi_2(t)) = c_1 L(\varphi_1(t))+c_2 L(\varphi_2(t))=0$

Άρα κάθε ~~ααα~~ γραμμικός συνδυασμός δύο τυχαίων στοιχείων του $\mathcal{L}$, αποτελεί και αυτός στοιχείο του $\mathcal{L}$. Άρα ο $\mathcal{L}$ είναι διαν. χώρος.

ii) $\dim \mathcal{L}=2$ a) Θεωρούμε $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$ τέτοια ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα Προβλήματα Αρχικών Τιμών:

$$\begin{cases} L(\varphi_1)=0 \\ \varphi_1(t_0)=1 \\ \varphi_1'(t_0)=0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} L(\varphi_2)=0 \\ \varphi_2(t_0)=0 \\ \varphi_2'(t_0)=1 \end{cases}$$

(Τα $(\varphi_1(t_0), \varphi_1'(t_0))=(1,0)$ και $(\varphi_2(t_0), \varphi_2'(t_0))=(0,1)$ είναι μοναδιαία διανύσματα)

Θα δείξουμε ότι τα φ_1, φ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο πεδίο ορισμού της $L(y)$.

Θεωρούμε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\left.\begin{cases} c_1\varphi_1(t_0)+c_2\varphi_2(t_0)=0 \\ c_1\varphi_1'(t_0)+c_2\varphi_2'(t_0)=0 \end{cases}\right\} (\Sigma)$

$$\det\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση, την $c_1=c_2=0$

Άρα ισχύει η συνεπαγωγή:

$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)=0 \Longrightarrow c_1=c_2=0$ Δηλαδή οι $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$ είναι γρ. ανεξάρτητες

β) Θα δείξουμε ότι τα φ_1, φ_2 παράγουν το χώρο $\mathcal{L}$.
Έστω τυχούσα λύση $y \in \mathcal{L}$
Παίρνουμε $y(t_0)=a$ $y'(t_0)=b$ και έχουμε το

$$\left.\begin{cases} L(u)=0 \\ u(t_0)=a \\ u'(t_0)=b \end{cases}\right\} (A)$$ ΠΑΤ με μοναδική λύση y

Έστω τυχαίο $\varphi(t)=a\varphi_1(t)+b\varphi_2(t)$. Αφού το φ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$, ισχύει ότι $\varphi \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ είναι ο χώρος λύσεων)

$$\left.\begin{aligned} &\text{Άρα } L(\varphi(t))=0 \\ &\varphi(t_0)=(a\varphi_1(t_0)+b\varphi_2(t_0))=a \\ &\varphi'(t_0)=b\,(=a\varphi_1'(t_0)+b\varphi_2'(t_0)) \end{aligned}\right\}$$ Άρα η φ είναι μοναδική λύση του ΠΑΤ (A), το ίδιο και η y. Άρα $y=\varphi$. $\blacksquare$

Εξίσωση Euler

Η διαφορική εξίσωση $\boxed{L(y)=t^2y''+aty'+by=0}$, $a,b\in\mathbb{R}$ ονομάζεται εξίσωση του Euler. Στα πλαίσια του μαθήματος ασχολούμαστε με την περίπτωση όπου $t>0$.
Παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει λύση της μορφής $y(t)=t^r$, καθώς οι t^2y'' και ty' θα είναι πολλαπλάσια της t^r.
Έχουμε λοιπόν, $(t^r)'=rt^{r-1}$ $(t^r)''=r(r-1)t^{r-2}$ και

$$L(t^r)=r(r-1)t^r+art^r+bt^r=(r(r-1)+ar+b)\,t^r=F(r)\cdot t^r, \text{ όπου}$$
$$F(r)=r(r-1)+ar+b=r^2+(a-1)r+b$$

Άρα, $L(t^r)=0 \iff F(r)=0$ (αφού $t^r>0$)

Περιπτώσεις

i) $(a-1)^2-4b>0$ η $F(r)=0$ έχει δύο ρίζες $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $(r_1\neq r_2)$.
Στις ρίζες αυτές αντιστοιχούν οι γρ. ανεξ. λύσεις της $L(y)=0$, $y_1(t)=t^{r_1}$, $y_2(t)=t^{r_2}$ και η γενική λύση της $L(y)=0$ είναι η

$$\boxed{y(t)=c_1t^{r_1}+c_2t^{r_2}}, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

ii) $(a-1)^2-4b=0$ οι ρίζες της $F(r)=0$ είναι οι $r_1=r_2=\dfrac{1-a}{2}$.
Άρα μια λύση της $L(y)=0$ είναι η $y_1(t)=t^{r_1}$

Για την εύρεση μιας δεύτερης γρ. ανεξάρτητης από την πρώτη λύσης της $L(y)=0$ ακολουθούμε την εξής μέθοδο:
$F(r)=(r-r_1)^2$ (αφού r_1 διπλή ρίζα της $F(r)$) άρα
$L(t^r)=(r-r_1)^2\cdot t^r$. Τώρα, έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial r}L(t^r)=L\left(\frac{\partial}{\partial r}t^r\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left((r-r_1)^2t^r\right)=2(r-r_1)\cdot t^r+(r-r_1)^2t^r\ln t$$

Αφού $\frac{\partial}{\partial r}t^r=t^r\ln t$.

Άρα έχουμε $L(t^r\ln t)=2(r-r_1)t^r+(r-r_1)^2t^r\ln t$

Παρατηρούμε ότι $L(t^{r_1}\ln t)=0$.

Άρα $\boxed{y_2(t)=t^{r_1}\ln t}$

Άρα η γενική λύση της $L(y)=0$ είναι: $y(t)=c_1t^r+c_2t^r\ln t\Rightarrow$
$\Rightarrow\boxed{y(t)=(c_1+c_2\ln t)\,t^r}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

iii) $(a-1)^2-4b<0$. Η $F(r)=0$ έχει ρίζες της μορφής:
$$r_1=\lambda+i\mu \quad \text{και} \quad r_2=\lambda-i\mu=\bar{r}_1$$
όπου $r_{1,2}=\dfrac{-(a-1)\pm i\sqrt{|(a-1)^2-4b|}}{2}$ $\left(\lambda=\dfrac{1-a}{2},\ \mu=\dfrac{\sqrt{|(a-1)^2-4b|}}{2}\right)$

Οι μιγαδικές λύσεις που αντιστοιχούν στις r_1,r_2 αντίστοιχα είναι οι:
$$\varphi_1(t)=t^{\lambda+i\mu}=t^\lambda\cdot t^{i\mu}=t^\lambda\left(e^{\ln t}\right)^{i\mu}=t^\lambda e^{i\mu\ln t}=t^\lambda\left[\cos(\mu\ln t)+i\sin(\mu\ln t)\right]$$

Όμοια, $\varphi_2(t)=t^\lambda\left[\cos(\mu\ln t)-i\sin(\mu\ln t)\right]$.

~~Άρ.~~ Παρατηρείστε ότι $\begin{cases}L(\varphi_2(t))=0 & \forall t\\ L(\varphi_1(t))=0 & \forall t\end{cases}$

Οι $\varphi_1(t)$ και $\varphi_2(t)$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $t^\lambda\cos(\mu\ln t)$ και $t^\lambda\sin(\mu\ln t)$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν πως η γενική λύση θα είναι η $\boxed{y(t)=t^\lambda\left(c_1\cos(\mu\ln t)+c_2\sin(\mu\ln t)\right)}$
$c_1,c_2\in\mathbb{R}$

Μέθοδος των προσδιοριστέων (ή απροσδιορίστων) συντελεστών

Η μέθοδος Lagrange που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο έχει το πλεονέκτημα ότι είναι πολύ γενική, το μειονέκτημά της όμως είναι ότι οδηγεί ενδεχομένως σε ολοκληρώματα που είναι δύσκολο να υπολογιστούν. Θα περιγράψουμε τώρα μια μέθοδο επίλυσης της $L(y) = y'' + ay' + by = f(t)$, απλούστερη από τη μέθοδο Lagrange που μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί μόνο όταν η $f(t)$ έχει συγκεκριμένες μορφές. Ειδικότερα, αν η f είναι λύση μιας γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές, τότε μπορούμε να «μαντέψουμε» μια ειδική λύση της $L(y) = f(t)$.
Αφού η $f(t)$ θα είναι λύση γρ. ομογενούς δ.ε., θα είναι γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένων γινομένων συναρτήσεων των εξής τριών τύπων: α) πολυώνυμα ως προς t β) εκθετική συνάρτηση e^{rt} γ) $\cos kt$ ή $\sin kt$

<u>Περιγραφικά:</u> Έστω $f(t) = e^{\gamma t}\cdot[P_m(t)\cdot\cos\delta t + Q_m(t)\cdot\sin\delta t]$, $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $P_m(t), Q_m(t)$ πολυώνυμα του t, βαθμού m.
Αν $\gamma + i\delta \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα ~~της~~ πολλαπλότητας p, της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε., τότε η μη ομογενής δ.ε. έχει λύση της μορφής: $y(t) = t^{p}\cdot e^{\gamma t}[P_m^*(t)\cos\omega t + Q_m^*(t)\sin\omega t]$, όπου $P_m^*(t), Q_m^*(t)$ πολυώνυμα του t βαθμού m.

Παραδείγματα (Διαβάστε πρώτα την Παρατήρηση σελ 39)

πχ1 Να λυθεί η δ.ε. $y''+y'+y=t^2$.

Λύση: Έχουμε την αντίστοιχη ομογενή $y''+y'+y=0$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμό της $r^2+r+1=0$ με ρίζες $r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ έχουμε λοιπόν τη γενική λύση της, $\varphi(t)=c_1e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+c_2e^{-t/2}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

Αναζητούμε τώρα ειδική λύση της μορφής $b_0+b_1t+b_2t^2$.

Την αντικαθιστούμε στη δ.ε. και έχουμε

$$(b_0+b_1t+b_2t^2)''+(b_0+b_1t+b_2t^2)'+(b_0+b_1t+b_2t^2)=t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b_0+b_1+2b_2)+(b_1+2b_2)t+b_2t^2=t^2 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_0+b_1+2b_2=0 \\ b_1+2b_2=0 \\ b_2=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_0=0 \\ b_1=-2 \\ b_2=1 \end{cases}$$

Άρα μια ζητούμενη ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $y(t)=t^2-2t$.

π.χ.2 Να λυθεί η δ.ε. $y''-y'=3t+4e^t$.

Λύση: Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι $\varphi(t)=c_1+c_2e^t$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Η αναμενόμενη μορφή της ειδικής λύσης θα ήταν $(b_0+b_1t)+c_0e^t$. Επειδή ο e εμφανίζεται στη γενική λύση της ομογενούς πολλαπλασιάζουμε επί t (σύμφωνα με την Πρόταση της επόμενης σελίδας). Αναζητούμε ειδική λύση της μορφής $[(b_0+b_1t)+c_0e^t]t=b_0t+b_1t^2+c_0te^t$

Αντικαθιστώντας στην αρχική διαφορική εξίσωση, παίρνουμε

$$(2b_1-b_0)-2b_1t+c_0e^t=3t+4e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b_1-b_0=0 \\ -2b_1=3 \\ c_0=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_0=-3 \\ b_1=-\frac{3}{2} \\ c_0=4 \end{cases}$$

Μια ειδική λύση της δ.ε. είναι η: $y(t)=4te^t-3t+\frac{3}{2}t^2$

Παρατήρηση: $L(y) = y'' + ay' + by = f(t)$ (E)

Μορφή της $f(t)$	Μορφή της αναζητούμενης ειδικής λύσης
$\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot t^k \cdot e^{\mu t}$	$\sum_{k=0}^{m} b_k t^k e^{\mu t}$
$\sum_{k=0}^{m} a_k t^k \cdot e^{\mu t} \cdot \sin(\lambda t)$, $\sum_{k=0}^{m} a_k t^k \cdot e^{\mu t} \cdot \cos(\lambda t)$	$\sum_{k=0}^{m} b_k t^k e^{\mu t} \sin(\lambda t) + \sum_{k=0}^{m} c_k t^k e^{\mu t} \cdot \cos(\lambda t)$

Αν η αναμενόμενη λύση έχει κάποιο όρο που είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς $L(y)=0$ της (E), πολλαπλασιάζουμε την αναζητούμενη ειδική λύση επί t^p, όπου p είναι ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε η νέα ειδική λύση να μην περιέχει όρο που να είναι λύση της $L(y)=0$ (π×2).

Θεώρημα: (Αρχή της υπέρθεσης) Έστω γραμμική δ.ε. της μορφής $L(y) = f_1(t) + f_2(t)$, $f_1, f_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Έστω $y_1(t)$ η γενική λύση της εξίσωσης $L(y) = f_1(t)$ και $y_2(t)$ η γενική λύση της $L(y) = f_2(t)$. Τότε, η γενική λύση της $L(y) = f_1(t) + f_2(t)$ είναι η $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

Απόδειξη: $L(y(t)) = L(y_1(t) + y_2(t)) \overset{\text{γραμμική}}{=} L(y_1(t)) + L(y_2(t)) = f_1(t) + f_2(t)$. ∎

<u>Άσκηση:</u> Να λυθεί η $y'' - 4y = \sin t$.

<u>Λύση:</u> Χαρ. πολυώνυμο αντίστοιχης ομογενούς $r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = -2$

Άρα, γενική λύση της $y'' - 4y = 0$ είναι η $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Αναζητούμε τώρα μια ειδική λύση της μορφής $y_{ειδ}(t) = A\sin t + B\cos t$

$y'_{ειδ}(t) = A\cos t - B\sin t \qquad y''_{ειδ}(t) = -A\sin t - B\cos t$

Αντικαθιστούμε, $y''_{ειδ}(t) - 4\cdot y_{ειδ}(t) = \sin t \Rightarrow -A\sin t - B\cos t - 4A\sin t - 4B\cos t = \sin t$

$\Rightarrow -5A\sin t - 5B\cos t = \sin t \Rightarrow A = -\frac{1}{5},\ B = 0$

Άρα μια γενική λύση της $y'' - 4y = \sin t$ είναι η:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{5}\sin t}$$

<u>Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις n τάξης</u>

Είναι της μορφής $L(y) = y^{(n)}_{(t)} + a_1 y^{(n-1)}_{(t)} + \ldots + a_n y(t) = f(t)$ (E)

$L(y) = f(t)$ — Αν $f(t) \neq 0$, η (E) μη ομογενής

— Αν $f(t) = 0$, η (E) ομογενής

Γενική λύση της (E): $y(t) = y_{ομ}(t) + y_{ειδ}(t)$, όπου

$y_{ομ}(t)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς και

$y_{ειδ}(t)$ είναι μια ειδική λύση της (E).

Αν $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ γρ. ανεξάρτητες λύσεις της (E), τότε, η γενική λύση της είναι η: $y(t) = c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t)$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

<u>Παρατήρηση:</u> Έλεγχος γρ. ανεξαρτησίας με ορίζουσα Wronski

$$W(t)=W_{(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}(t)=\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n+1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n+1)}(t) \end{vmatrix}$$

Αν $W_{(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}(t)\neq 0$, τότε, $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ γρ. ανεξάρτητα. Γενικά ισχύει $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ γρ. ανεξ. $\Longleftrightarrow W_{(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}(t)\neq 0 \;\forall t\in I$.

(I είναι το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων της δ.ε.)

<u>Πρόταση:</u> Αν $\exists\, t_0\in I$: $W(t_0)\neq 0$, τότε, $W(t)\neq 0 \;\forall t\in I$.

(π.χ.) Να λυθεί η $y'''-3y''+3y'-y=0$ (E)

<u>Λύση:</u> Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $r^3-3r^2+3r-1=0 \Longrightarrow r=1$ πολλαπλότητας 3
Τρεις γρ. ανεξάρτητες ειδικές λύσεις της δ.ε. είναι οι:
$y_1=e^t$ $\quad y_2=te^t$ $\quad y_3=t^2e^t$. Άρα η γενική λύση της (E) είναι η $y(t)=c_1e^t+c_2te^t+c_3t^2e^t$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

<u>Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης με χρήση δυναμοσειρών</u>

<u>Υπενθύμιση:</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Δυναμοσειρά με κέντρο 0

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ Δυναμοσειρά με κέντρο x_0

$R>0$ Ακτίνα Σύγκλισης: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{(\lim\sqrt[n]{|a_n|})}$

Η (A): - Συγκλίνει αν $|x-x_0|<R$
- Αποκλίνει αν $|x-x_0|>R$
- ή Συγκλίνει ή Αποκλίνει αν $R=|x-x_0|$
- Συγκλίνει $\forall x\in\mathbb{R}$ αν $R=\infty$
- Συγκλίνει για $x=x_0$ αν $R=0$

Έστω γραμμική δ.ε. της μορφής $L(y)=y''+P(t)y'+q(t)y=0$ (E) με $P,q: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς.

Ομαλά Σημεία: Ένα σημείο $t_0\in\mathbb{R}$ ονομάζεται ομαλό σημείο της (E) αν οι P,q είναι αναλυτικές στο t_0 (δηλ. μπορούν να γραφούν σαν σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$)

Ιδιάζοντα Σημεία: Ένα σημείο $t_0\in\mathbb{R}$ ονομάζεται ιδιάζον σημείο της (E), αν, στο σημείο αυτό, μία τουλάχιστον από τις P,q δεν είναι αναλυτική.

Θεώρημα: Θεωρούμε $\begin{pmatrix} y''+P(t)y'+q(t)y=0 \\ y(t_0)=a \quad y'(t_0)=b \end{pmatrix}$ Π.Α.Τ.

Έστω P,q αναλυτικές συναρτήσεις και $R>0$, όπου R είναι η μικρότερη ακτίνα σύγκλισης από εκείνες των δυναμοσειρών που παριστάνουν τις P και q. Τότε, υπάρχει μοναδική λύση του Π.Α.Τ. και είναι η $y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$ $(|t-t_0|<R)$

Παραδείγματα

Π.χ. Να λυθεί το ΠΑΤ: $y''+3ty'+3y=0$, $y(0)=2$ $y'(0)=3$

Λύση: Οι συντελεστές είναι αναλυτικές συναρτήσεις $\forall t$.

Αναζητούμε λύση της μορφής $y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot t^n$, τότε,

$$y'(t)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} \qquad y''(t)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$$

Αντικαθιστώντας στο ΠΑΤ παίρνουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}+3t\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(3n+3)a_n t^n=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty}(3n-3)\cdot a_{n-2}t^{n-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)a_n + (3n-3)a_{n-2}]t^{n-2} = 0$$ ~~Αφού~~ Θέλουμε να ισχύει $\forall t$ άρα και για $t \neq 0$.

Άρα θέλουμε $n(n-1)a_n + (3n-3)a_{n-2} = 0 \Leftrightarrow \cancel{a_{n+2} = \frac{a_n}{n+1}}$

$$\Leftrightarrow a_n = -\frac{3}{n}\cdot a_{n-2}$$

Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό των a_n χρειαζόμαστε δύο αυθαίρετους συντελεστές a_0 και a_1, πράγμα που είναι αναμενόμενο αφού η $y'' + 3ty' + 3y = 0$ είναι $2^{ης}$ τάξης.

Γράφουμε τους όρους σε δύο στήλες

$a_2 = -\frac{3}{2}a_0$	$a_3 = -\frac{3}{3}a_1$
$a_4 = -\frac{3}{4}a_2$	$a_5 = -\frac{3}{5}a_3$
$a_6 = -\frac{3}{6}a_4$	$a_7 = -\frac{3}{7}a_5$
$\vdots$	$\vdots$
$a_{2k} = -\frac{3}{2k}a_{2k-2}$	$a_{2k+1} = -\frac{3}{2k+1}a_{2k-1}$

*(Έναν άλλο τρόπο υπολογισμού του γενικού τύπου, ίσως πιο εύκολο, θα τον δούμε στο επόμενο παράδειγμα)

Πολλαπλασιάζουμε κατά στήλη και παίρνουμε: *

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k\cdot 3^k}{2^k\cdot k!}\cdot a_0 \qquad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k\cdot 3^k\cdot 2^k\cdot k!}{(2k+1)!}\cdot a_1$$

Οι τύποι αυτοί προκύπτουν αφού οι όροι $a_2, a_4, \ldots, a_{2k-2}$ και $a_3, a_5, a_7, \ldots, a_{2k-1}$ ~~απλοποι~~ απαλείφονται. και

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k = (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot\ldots\cdot 2k = 2^k\cdot k!$$

$$2\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2k+1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k)} = \frac{(2k+1)!}{2^k\cdot k!}$$

Συνεπώς, $y(t)=a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^k\cdot t^{2k}}{2^k\cdot k!}\right]+a_1\left[t+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^k\cdot 2^k\cdot k!\cdot t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(t)=a_0\cdot y_1(t)+a_1\cdot y_2(t)$, $a_0, a_1\in\mathbb{R}$

Από το κριτήριο του λόγου για την y_1 έχουμε:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-3)^{k+1}\cdot t^{2k+2}}{2^{k+1}(k+1)!}\cdot\frac{2^k\cdot k!}{(-3)^k\cdot t^{2k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{3|t|^2}{2(k+1)}=0,\quad |t|<\infty\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ η y_1 συγκλίνει για $|t|<\infty$. Ομοίως, η y_2 συγκλίνει για $|t|<\infty$

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας των y_1, y_2:

$W_{(y_1,y_2)}(0)=\det\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0)\\ y_1'(0) & y_2'(0)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1\neq 0$ Άρα $W_{(y_1,y_2)}(t)\neq 0\ \forall t$

και y_1, y_2 γρ. ανεξάρτητα.

Τέλος, $y(0)=2=a_0$, $y'(0)=3=a_1$

Άρα η γενική λύση του Π.Α.Τ.: $y(t)=2y_1(t)+3y_2(t)$.

π.χ. Να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών: $y''-y=0$ (E)

Λύση: Οι συντελεστές είναι αναλυτικές συναρτήσεις, άρα αναζητούμε λύση της μορφής: $y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$. Τότε, $y'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n t^{n-1}$ και $y''(t)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)t^{n-2}$

$(E)\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n=0\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}t^n[(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_n]=0\Leftrightarrow\ldots$ (λόγια) Θέλω $(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_n=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

Γράφουμε τους όρους σε δύο στήλες:

$a_2 = a_0 \cdot \frac{1}{2} = a_0 \cdot \frac{1}{2!}$ | $a_3 = \frac{a_1}{2\cdot 3} = a_1 \cdot \frac{1}{3!}$

$a_4 = a_2 \frac{1}{3\cdot 4} = a_0 \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = a_0 \frac{1}{4!}$ | $a_5 = \frac{a_3}{4\cdot 5} = a_1 \frac{1}{5!}$

$\vdots$

$a_{2k} = a_0 \cdot \frac{1}{(2k)!}$ | $a_{2k+1} = a_1 \cdot \frac{1}{(2k+1)!}$

Άρα η γενική λύση της (E): $\boxed{y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + a_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}}$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$(\Rightarrow y(t) = a_0 \cdot \cos nt + a_1 . \sin nt)$

π.χ. Να λυθεί με τη μέθοδο δυναμοσειρών η δ.ε.: $y'' + ty' + y = 0$ (E)

Λύση: Ψάχνουμε λύση της μορφής $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n . a_n t^{n-1}$ $\qquad y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

Κατά τα γνωστά: $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$

Άρτιοι	Περιττοί
$a_2 = -\frac{a_0}{2}$	$a_3 = -\frac{a_1}{3}$
$a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2\cdot 4}$	$a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3\cdot 5}$
$a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6}$	$a_7 = -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3\cdot 5\cdot 7}$
$\vdots$	$\vdots$
$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^k (k!)}$	$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{2^k \cdot k!}{(2k+1)!} \cdot a_1$

Άρα η γενική λύση της (E): $y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n}}{2^n \cdot n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \cdot n! \cdot t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

π.χ. Να βρεθεί η λύση σε μορφή δυναμοσειράς της δ.ε.
$y'' + (t-2)^2 y' - 7(t-2)y = 0$ (E) περί το σημείο $t=2$.

Λύση: Έστω $s = t-2$. Η (E) γίνεται:

$\frac{d^2y}{ds^2} + s^2 \frac{dy}{ds} - 7sy = 0$ (E_2). Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$y(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$. Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως:

$$(E_2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n(n-1)a_n + (n-10)a_{n-3} \right] s^{n-2} = 0$$

Δηλαδή, $a_2 = 0$ και $a_n = \frac{-(n-10)}{n \cdot (n-1)} \cdot a_{n-3}$, $n \geq 3$

Γράφοντας τους όρους σε τρεις στήλες

$a_3 = \frac{7}{2\cdot 3} \cdot a_0$	$a_4 = \frac{6}{3\cdot 4} \cdot a_1 = \frac{1}{2} a_1$	$a_5 = \frac{-(-5)}{5\cdot 4} \cdot a_2 = 0$
$\vdots$	$a_7 = \frac{3}{7\cdot 6} \cdot a_4 = \frac{3}{2\cdot 6\cdot 7} a_1$	$a_8 = 0$
$a_{3k} = \frac{-(3k-10)}{3k(3k-1)} \cdot a_{3k-3}$	$a_{10} = 0$	$\vdots$
$\Downarrow$	$\vdots$	$a_{3k+2} = 0$
	$a_{3k+1} = 0$	

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k \cdot (-28)}{3^k \cdot k! \cdot (3k-7)(3k-4)(3k-1)} \cdot a_0 = A(k) a_0$$

το έθεσα για ευκολία

Άρα η γενική λύση της (E):

$$y(s) = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} A(k) s^{3k} \right] + a_1 \cdot \left[s + \frac{s^4}{2} + \frac{s^7}{28} \right] \Rightarrow$$

Τελική απάντηση

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} A(k)(t-2)^{3k} \right] + a_1 \left[(t-2) + \tfrac{1}{2}(t-2)^4 + \tfrac{1}{28}(t-2)^7 \right]} \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

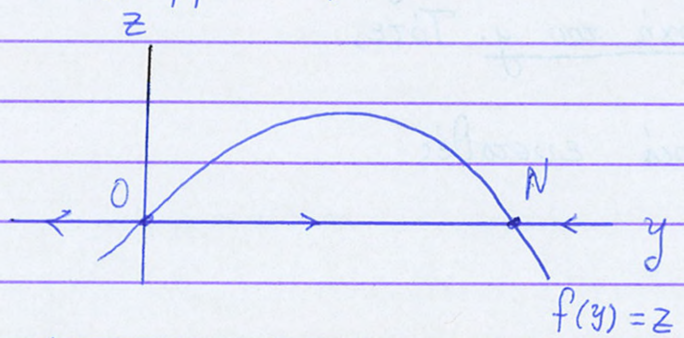
Ποιοτική Θεωρία

Το επίπεδο Φάσης - Διάγραμμα Φάσης

Ορισμός: Ο χώρος φάσης της εξίσωσης $y' = f(y)$ είναι ο άξονας των y. Το $\bar{y}$ λέγεται σημείο ισορροπίας αν $f(\bar{y}) = 0$. Διάγραμμα φάσης είναι ο άξονας των y μαζί με τα σημεία ισορροπίας και τα βέλη που καταδεικνύουν το πρόσημο της κλίσης της λύσης.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη δ.ε. $y' = k\left(1 - \frac{y}{N}\right) \cdot y$, $k, N \in \mathbb{R}_{>0}$.

Το διάγραμμα φάσης είναι:



Για $y \in (-\infty, 0)$: $y' = k\underbrace{\left(1 - \frac{y}{N}\right)}_{>0} \cdot \underbrace{y}_{<0}$, $y' < 0$

Για $y \in (0, N)$: $y' = k\frac{N-y}{N} \cdot y > 0$

Για $y \in (N, +\infty)$: $y' = k\frac{\overset{<0}{N-y}}{N} \cdot y < 0$

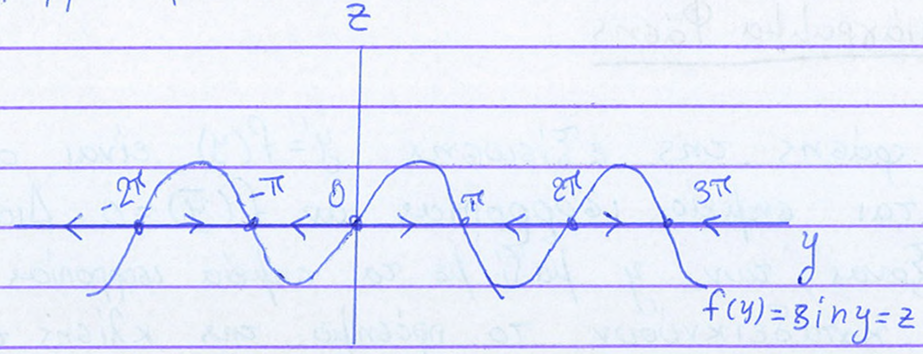
Για $\frac{dy}{dt} = f(y)$:

Ορισμός: i) Το σημείο ισορροπίας $\bar{y}$ ονομάζεται ευσταθές (κατά Lyapunov) αν $\forall y$, $\exists\, \delta > 0$: $|y - \bar{y}| < \delta \Rightarrow (y - \bar{y}) f(y) \leq 0$.

ii) Το σημείο ισορροπίας $\bar{y}$ ονομάζεται ασυμπτωτικά ευσταθές, αν $\exists\, \delta > 0$ $\forall y$ με $0 < |y - \bar{y}| < \delta \Rightarrow (y - \bar{y}) f(y) < 0$

iii) Το σημείο ισορροπίας $\bar{y}$ ονομάζεται ασταθές αν δεν είναι ευσταθές δηλαδή αν, $\exists\, \delta > 0$ $\forall y$ με $0 < |y - \bar{y}| < \delta \Rightarrow (y - \bar{y}) f(y) > 0$.

Παράδειγμα: Η Δ.ε. $y' = \sin y$ έχει σημεία ισορροπίας $y = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
Το διάγραμμα φάσης είναι:



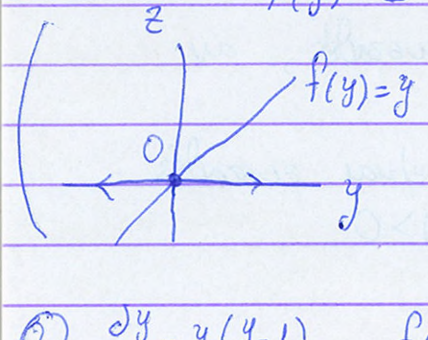
Τα σημεία ισορροπίας $y = 2\kappa\pi$ $(\kappa \in \mathbb{Z})$ είναι ασταθή σημεία και τα $y = (2\kappa+1)\pi$ $(\kappa \in \mathbb{Z})$ ασυμπτωτικά ευσταθή.

Αρχή της γραμμικοποίησης: Έστω $y' = f(y)$ και $\bar{y}$ ένα σημείο ισορροπίας της $(f(\bar{y}) = 0)$. Έστω $f \in C^1$ σε μια περιοχή του y. Τότε,

- Αν $f'(\bar{y}) < 0$, τότε, $\bar{y}$ ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Αν $f'(\bar{y}) > 0$, τότε, $\bar{y}$ ασταθές.

Παραδείγματα:

① $\frac{dy}{dt} = y$ $\quad f(\bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{y} = 0$ (σημείο ισορροπίας)
$f'(\bar{y}) = 1 > 0$ άρα $\bar{y}$ ασταθές.



② $\frac{dy}{dt} = y(y-1)$ $\quad f(\bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_2 = 1$
$f'(y) = 2y - 1$ $\quad f'(0) = -1 < 0$ $\quad f'(1) = 1 > 0$
$\bar{y}_1$ Ασυμπτ. Ευσταθές $\quad \bar{y}_2$ Ασταθές

Το διάγραμμα φάσης είναι: $\rightarrow \underset{0}{\bullet} \leftarrow \underset{1}{\bullet} \rightarrow y$

<u>Παρατήρηση:</u> Ο άξονας των z που βάζαμε μέχρι τώρα ήταν βοηθητικός. Στην πραγματικότητα, το διάγραμμα φάσης είναι ο άξονας y, τα σημεία ισορροπίας και τα βέλη. ~~Θε~~ Τα βέλη δείχνουν το πρόσημο της y', αν $y'>0$ το βέλος δείχνει προς τη θετική φορά του άξονα, αν $y'<0$ το βέλος δείχνει προς την αρνητική φορά.

<u>Άσκηση:</u> Να γίνει το διάγραμμα φάσης της $\frac{dy}{dt} = y^2$

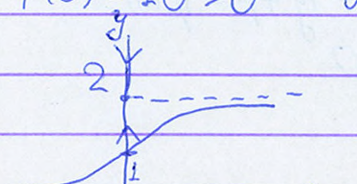
<u>Λύση:</u> $f(\bar{y})=0 \rightarrow \bar{y}=0 \qquad f'(y)=2y$

$\leftarrow \underset{0}{\bullet} \rightarrow$ Το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

<u>Άσκηση:</u> Να γίνει το διάγραμμα φάσης της $y' = 5y(2-y) = f(y)$

<u>Λύση:</u> $f(\bar{y})=0 \Longrightarrow \bar{y}_1=0 \quad \bar{y}_2=2 \qquad f'(y)=-10y+10$

$f'(0)=10>0$ $\bar{y}_1=0$ Ασταθές $\qquad f'(2)=-10<0$ Ασυμπτωτικά ευσταθές



<u>Παρατήρηση:</u> Έχουμε τη δ.ε. $y'=5y(2-y)$. Ακολουθούμε τη γνωστή διαδικασία επίλυσης:

$$\int \frac{dy}{y(2-y)} = 5\int dt + c \Longrightarrow \ldots y(t) = \frac{2ce^{10t}}{1+c\cdot e^{10t}} = \frac{2c}{e^{-10t}+c} \quad \text{και} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 2$$

Διακλαδώσεις

Έχουμε μια δ.ε. που περιέχει μια παράμετρο μ.
$y' = f_\mu(y)$

Ορισμός: Μια οικογένεια διαφορικών εξισώσεων της μορφής $y' = f_\mu(y)$, ~~ονομ~~ όπου σε κάθε τιμή της παραμέτρου μ αντιστοιχεί μια διαφορική εξίσωση, ονομάζεται μονοπαραμετρική οικογένεια διαφορικών εξισώσεων.

(π.χ.) Έστω η μονοπαραμετρική οικογένεια δ.ε. $y' = y^2 - 2y + 2\mu$
Για κάθε τιμή της μ, έχουμε μια δ.ε. οπότε μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα φάσης ~~για~~ ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου μ.

Ορισμός: Η τιμή της παραμέτρου μ για την οποία έχουμε αλλαγή του αριθμού των σημείων ισορροπίας ή αλλαγή της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας, λέγεται τιμή διακλάδωσης $\bar{y} = \bar{y}(\mu)$. Για να αποδώσουμε γραφικά την αλλαγή της συμπεριφοράς του συστήματος, χρησιμοποιούμε το διάγραμμα διακλάδωσης.

(π.χ.) Να γίνει το διάγραμμα διακλάδωσης της $y' = y^2 + 4y + \mu = f_\mu(y)$.

Λύση: i) Κορυφή της παραβολής $y^2 + 4y + \mu = 0 \Rightarrow (y+2)^2 + \mu - 4 = 0$
η κορυφή είναι η: $(4, -2)$

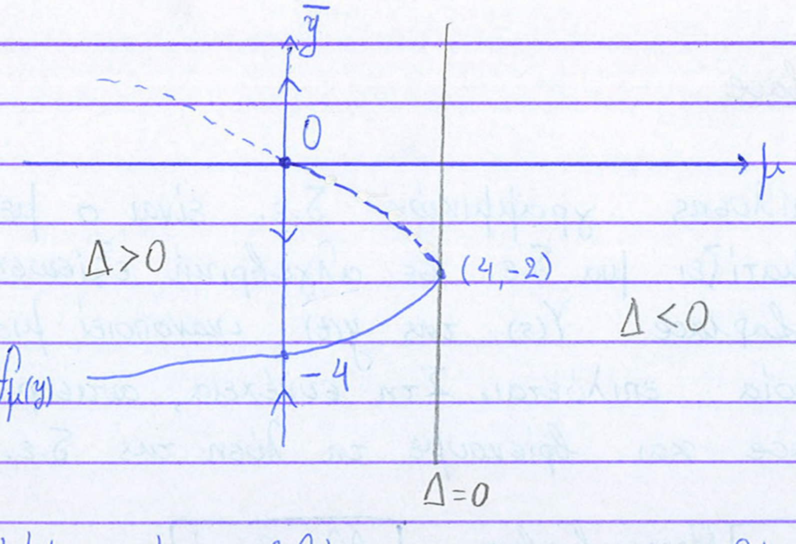
ii) Σημεία ισορροπίας $\Delta = 16 - 4\mu = 4(4-\mu)$

- $\Delta > 0$, $\bar{y}_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{4-\mu}}{2}$ $\mu < 4$

Τιμή Διακλάδωσης: $\mu = 4$

- $\Delta = 0$, $\bar{y} = -2$ $\mu = 4$
- $\Delta < 0$ $\nexists$ σημείο ισορροπίας $\mu > 4$

$f_\mu'(y) = 2y + 4$ Για $\mu = 0$: $\Delta = 16$ $\bar{y}_1 = 0$ $\bar{y}_2 = -4$



Τιμή Διακλάδωσης: $\mu=4$

Η διακεκομμένη ημιπαραβολή παριστάνει τα ασταθή σημεία ισορροπίας και η ημιπαραβολή με πλήρη γραμμή παριστάνει τα ευσταθή σημεία ισορροπίας.

Επεξήγηση: Το διάγραμμα διακλάδωσης απεικονίζει τις διάφορες τιμές που παίρνουν τα σημεία ισορροπίας συναρτήσει της παραμέτρου μ. καθώς και την αστάθεια ή ευστάθειά τους.

(π.χ.) Να γίνει το διάγραμμα διακλάδωσης της $y' = y^2 - 4y + \mu = f_\mu(y)$

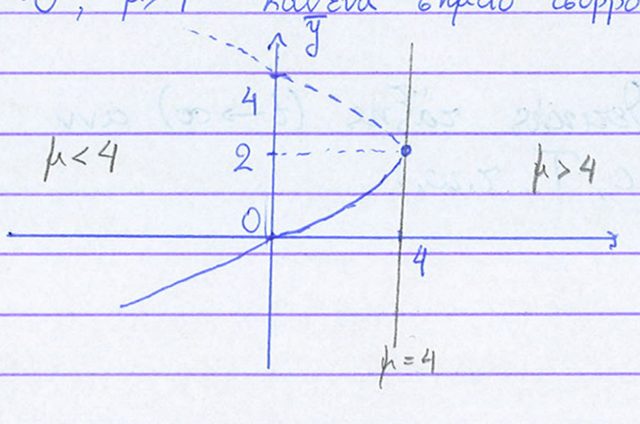
Λύση: i) Κορυφή Παραβολής: $(y-2)^2 + \mu - 4 = 0$ $(2,4)$

ii) $\Delta = 16 - 4\mu = 4(4-\mu)$

- $\Delta>0$, $\mu<4$ $\quad \bar{y}_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{4-\mu}}{2}$
- $\Delta=0$, $\mu=4$ $\quad \bar{y}=2$
- $\Delta<0$, $\mu>4$ κανένα σημείο ισορροπίας.

Για $\mu=0$: $(y-2)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \bar{y}_1 - 2 = 2 \\ \bar{y}_2 - 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y}_1 = 4 \quad \bar{y}_2 = 0$

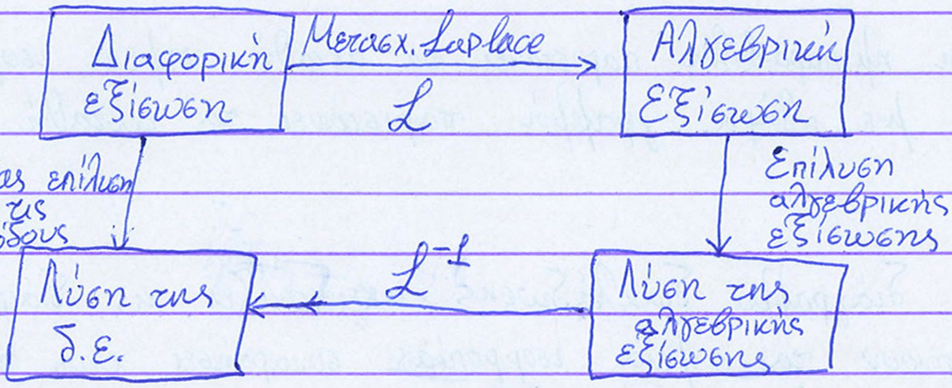


Τιμή Διακλάδωσης: $\mu=4$

Μετασχηματισμός Laplace

Μια άλλη μέθοδος επίλυσης γραμμικών δ.ε. είναι ο μετασχηματισμός Laplace (Μ.L.). Αυτός, μετασχηματίζει μια δ.ε. σε αλγεβρική εξίσωση, τότε, η μετασχηματισμένη κατά Laplace $Y(s)$ της $y(t)$ ικανοποιεί μια αλγεβρική εξίσωση η οποία επιλύεται. Στη συνέχεια, αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό Laplace και βρίσκουμε τη λύση της δ.ε..

Σχηματικά:



Ορισμός: Για μια συνάρτηση $f(t)$, $t\in[0,+\infty)$ ο Μ.L. συμβολίζεται $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ή $Y(s)$ και ορίζεται:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = Y(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt \, .$$

Σχόλιο: Για την ύπαρξη του γενικευμένου ολοκληρώματος, υποθέτουμε ότι η f είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης.

Ορισμός: Η συνάρτηση $f(t)$ λέγεται εκθετικής τάξης ($t\to\infty$) ανν υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές M, c, T τ.ω.:

$$|f(t)| \leq M e^{ct}, \ \forall\ t \geq T .$$

Π.χ. Να υπολογιστεί ο ΜL $\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot e^{at}dt$.

Λύση: $Y(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt =$

$$= \frac{1}{a-s} \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{(a-s)t}dt \underset{t=a-s}{=} \frac{1}{a-s}\lim_{b\to\infty}\left(e^{(a-s)b}-1\right) = \frac{1}{s-a}, \quad s>a$$

Π.χ. Νδο $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\sin at\,dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-st}\sin at\,dt$$

$$\int e^{-st}\sin at\,dt = -\frac{1}{a}\int e^{-st}(\cos at)'dt = -\frac{1}{a}\left[e^{-st}\cos at + s\int e^{-st}\cos t\,dt\right] =$$
$$= -\frac{1}{a}\left[e^{-st}\cos at + \frac{s}{a}\int e^{-st}(\sin at)'dt\right] =$$
$$= -\frac{1}{a}\left[e^{-st}\cos at + \frac{s}{a}\left(e^{-st}\sin at + s\int e^{-st}\sin at\,dt\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)\int e^{-st}\sin at\,dt = \int_0^b e^{-st}\sin at\,dt = \frac{a^2}{a^2+s^2}\left[-\frac{1}{a}e^{-st}\cos at - \frac{s}{a^2}e^{-st}\sin at\right]_0^b$$

Άρα, $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-st}\sin at\,dt = \frac{a}{a^2+s^2}$.

Γενικά, χρησιμοποιούμε το εξής τυπολόγιο: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ
$f(t)$	$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{n-j}f^{(n-1)}(0)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$
1	$1/s$
e^{at}	$1/s-a$, $s>a$
$\delta_a(t)$	e^{-as}
$\sin\omega t$	ω/s^2+a^2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ
$e^{at}\sin\omega t$	$\omega/(s-a)^2+\omega^2$
$t\sin\omega t$	$2\omega s/(s^2+\omega^2)^2$
$\cos\omega t$	$s/s^2+\omega^2$
$e^{at}\cos\omega t$	$s-a/(s-a)^2+\omega^2$
$t\cos\omega t$	$s^2-\omega^2/(s^2+\omega^2)^2$
$U_a(t)$	$e^{-as}/s,\ s>0$
t^n	$n!/s^n+1,\ s>0$

π.χ. $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-st} f'(t)dt =$

$= \lim_{b\to+\infty} [\ \underbrace{e^{-st}}_{\substack{b\to+\infty \\ 0}} f(t)\Big|_{t=0}^{b} + s\int_0^b e^{-st} f(t)dt\,] = \lim_{b\to\infty} [e^{-sb} f(b) - f(0) + s\int_0^b e^{st} f(t)dt] =$

$= s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$

Ιδιότητες

① Γραμμικότητα:

$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\} = \lambda\mathcal{L}\{f(t)\} + \mu\mathcal{L}\{g(t)\} = \lambda F(s) + \mu G(s)$

② Μετατόπιση ως προς s:

Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε, $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

③ Μετατόπιση ως προς t:

Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε, $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

④ Αλλαγή κλίμακας:

Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε, $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

⑤ Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε, $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$