ΑΛΓΕΒΡΕΣ BANACH (Θ14)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙΙ

1. A, B είναι άλγεβρες και η B έχει μονάδα το στοιχείο e_B. I είναι ιδεώδες της A και $\varphi_0 : I \longrightarrow B$ επιμορφισμός. Να αποδειχθεί ότι:

(α) Η φ_0 επεκτείνεται μονοσήμαντα σε έναν επιμορφισμό $\varphi : A \longrightarrow B$.

(β) Αν οι A, B είναι άλγεβρες με νόρμα και η φ_0 είναι συνεχής τότε και η φ είναι συνεχής.

(γ) Αν η A είναι μεταθετική άλγεβρα Banach και I κλειστό ιδεώδες της με $\mathfrak{M}(I) \neq \varnothing$, τότε και $\mathfrak{M}(A) \neq \varnothing$.

(Υπόδειξη για το (α): $e_B = \varphi(x_0)$, για κάποιο $x_0 \in I$, οπότε $\varphi(x_0 x) = \varphi(x_0 x x_0) = \varphi(x x_0)$, $\forall\, x \in A$).

2. Θεωρείστε τους πίνακες $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ στην άλγεβρα Banach $M_2(\mathbb{C})$. Έστω A η υπάλγεβρα που παράγεται από τους πίνακες I, T. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(α) Η A είναι μεταθετική Banach υπάλγεβρα της $M_2(\mathbb{C})$, με μονάδα.

(β) Ποιο είναι το φάσμα $\mathfrak{M}(A)$ της A;

(γ) Η απεικόνιση Gelfand της A δεν είναι $1-1$.

3. Θεωρούμε την άλγεβρα Banach $\mathcal{C}^{(n)}[0,1]$ όλων των συνεχώς n-διαφορίσιμων συναρτήσεων επί του $[0,1]$ με νόρμα την $\|f\|_n := 2^{n-1}\sup\{|f^{(k)}(t)| : t \in [0,1], k = 0,1,\ldots,n-1\}, f \in \mathcal{C}^{(n)}[0,1]$. Να αποδειχθεί ότι το φάσμα της $\mathcal{C}^{(n)}[0,1]$ είναι ομοιομορφικό με το $[0,1]$.

(Υπόδειξη: Ακολουθείστε τα βήματα της απόδειξης του υπολογισμού του φάσματος της $\mathcal{C}(X)$ με X Hausdorff, συμπαγή).