ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΕΒΡΩΝ BANACH (Θ14)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ II

1 Έστω A μία άλγεβρα Banach με μονάδα e. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(α) Αν και $x \in G_A$ και $\|x\| \leqq 1$, $\|x^{-1}\| \leqq 1$, τότε το φάσμα του x περιέχεται στη μοναδιαία μιγαδική περιφέρεια.

(β) Αν $x \in A$ σταθερό και $T_x : A \to A$ έτσι ώστε $T_x(y) := xy$, $\forall\ y \in A$, τότε (β_1) $x \in G_A \Leftrightarrow T_x \in G_{\mathcal{B}(A)}$. ($\beta_2$) $\sigma_A(x) = \sigma_{\mathcal{B}(A)}(T_x)$, για κάθε $x \in A$.

2. Έστω A μία άλγεβρα Banach με μονάδα e και $x, y \in A$. Να αποδειχθεί ότι:

(α) $e - xy \in G_A \iff e - yx \in G_A$.

(β) $\sigma_A(xy) \cup \{0\} = \sigma_A(yx) \cup \{0\}$.

3. Έστω $S, T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ και $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \in \ell^2$ έτσι ώστε $S(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}) := \{0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ και $T(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}) := \{\alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$. Να αποδειχθεί ότι:

(α) $\sigma_{\mathcal{B}(\ell^2)}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} = \sigma_{\mathcal{B}(\ell^2)}(T)$.

(β) $0 \in \sigma_{\mathcal{B}(\ell^2)}(S)$, αλλά το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του S.

4. Έστω A άλγεβρα Banach με e και B μεγιστική μεταθετική υπάλγεβρα της A. Να αποδειχθεί ότι η B είναι κλειστή με $e \in B$ και $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$, $\forall\ x \in B$.