# Πυκνότητα της $C_c(X)$ στην $C_0(X)$

From Folland's Real Analysis, 4.5

**Θεώρημα 1.** *Αν $X$ τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff, τότε* $\overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(X)$.

*Απόδειξη.* **(α)** $\overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty} \subseteq C_0(X)$:

Αν $(f_n)$ είναι ακολουθία στον $C_c(X)$ που συγκλίνει ομοιόμορφα (δηλ. ως προς την $\|\cdot\|_\infty$) στην $f$, τότε βεβαίως η $f$ είναι συνεχής. Μάλιστα, η $f$ ανήκει στην $C_0(X)$. Πράγματι, αν $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f - f_n\|_\infty < \epsilon$. Θέτω $K = \operatorname{supp} f_n := \overline{\{t \in F : f_n(t) \neq 0\}}$. Το $K$ είναι συμπαγές αφού $f_n \in C_c(X)$ και για κάθε $t \notin K$ έχουμε $f_n(t) = 0$ και συνεπώς

$$|f(t)| = |f(t) - f_n(t)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty < \epsilon$$

επομένως, $f \in C_0(X)$.

**(β)** $C_0(X) \subseteq \overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty}$:

Έστω τώρα $f \in C_0(X)$ και $\epsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f_\epsilon \in C_c(X)$ με $\|f - f_\epsilon\|_\infty < \epsilon$.

Θέτω $K_\epsilon := \{t \in X : |f(t)| \geqslant \epsilon\}$ και $V := \{t \in X : |f(t)| > \epsilon/2\}$. Το $K_\epsilon$ είναι κλειστό, και το $V$ ανοικτό, αφού η $f$ είναι συνεχής. Αφού $f \in C_0(X)$, υπάρχει συμπαγές $K \subseteq X$ ώστε $|f(t)| < \epsilon/2$ όταν $t \notin K$. Επομένως, $t \notin K \Rightarrow |f(t)| < \epsilon/2 \Rightarrow t \notin V$ και άρα $V \subseteq K$ οπότε $\overline{V} \subseteq K$ (αφού $K$ κλειστό). Δηλαδή

$$K_\epsilon \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq K$$

και αφού το $K$ είναι συμπαγές, το $K_\epsilon$ και το $\overline{V}$ είναι συμπαγή.

Θεωρώ το συμπαγές σύνολο $F = K \backslash V \subseteq K$ που δεν τέμνει το $K_\epsilon$.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $F \neq \varnothing$. Τότε, από το Λήμμα Urysohn (στον φυσιολογικό χώρο $K$) υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : K \to [0,1]$ ώστε $g|_{K_\epsilon} = 1$ και $g|_F = 0$. Επεκτείνω την $g$ σε μια συνάρτηση $h : X \to [0,1]$ θέτοντας $h(t) = 0$ για κάθε $t \in K^c$.

*Ισχυρισμός* Η $h$ είναι συνεχής.

*Απόδειξη* Έστω $E \subseteq [0,1]$ κλειστό. Θα δείξουμε ότι το $h^{-1}(E)$ είναι κλειστό στον $X$. Αν $0 \notin E$ τότε, εφόσον η $g$ έξω απ' το $K$ μηδενίζεται, έχω

$$h^{-1}(E) = \{t \in X : h(t) \in E\} = \{t \in K : h(t) \in E\} = \{t \in K : g(t) \in E\} = g^{-1}(E)$$

που είναι κλειστό υποσύνολο του $K$ (αφού $g \in C(K)$) άρα και του $X$.

Αν $0 \in E$ τότε για κάθε $t \in K^c$ έχουμε $h(t) \in E$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} h^{-1}(E) &= \{t \in K : h(t) \in E\} \cup \{t \in K^c : h(t) \in E\} = \{t \in K : g(t) \in E\} \cup K^c \\ &= g^{-1}(E) \cup V^c \end{aligned}$$

διότι $K^c = V^c \cup F$ και $F \subseteq g^{-1}(E)$. Επομένως το $h^{-1}(E) = g^{-1}(E) \cup V^c$ είναι ένωση δυο κλειστών, άρα κλειστό.

Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Αν συμβεί $F = K \backslash V = \varnothing$, τότε $K = V$ οπότε το $K$ είναι ανοικτό και κλειστό οπότε η χαρακτηριστική του είναι *συνεχής* συνάρτηση $X \to [0,1]$. Την ονομάζω $h$.

Σε κάθε περίπτωση, έδειξα ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $h : X \to [0,1]$ με $h|_{K_\epsilon} = 1$ και $h|_{K^c} = 0$, οπότε $h \in C_c(X)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |f(t) - (fh)(t)| &= 0, \text{ αν } t \in K_\epsilon \\ |f(t) - (fh)(t)| \leqslant |f(t)| &< \epsilon, \text{ αν } t \notin K_\epsilon \end{aligned}$$

επομένως υπάρχει $f_\epsilon := fh \in C_c(X)$ ώστε $\|f - f_\epsilon\|_\infty < \epsilon$.