Κάθε μεταθετική C* άλγεβρα έχει πιστή αναπαράσταση

Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική C* άλγεβρα. Θεωρώ τη μοναδοποίηση $\mathcal{A}_1$ της $\mathcal{A}$ και γράφω $K = \mathfrak{M}(\mathcal{A}_1)$. Έστω $K_0 = \{\phi_i : i \in I\} \subseteq K$ ένα πυκνό υποσύνολο του συμπαγούς χώρου K.

Ο χώρος Hilbert $H = \ell^2(I)$. Ο χώρος αυτός αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $\xi : I \to \mathbb{C}$ που είναι *τετραγωνικά αθροίσιμες*, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά M_ξ ώστε $\sum_{i\in F} |\xi(i)|^2 \leqslant M_\xi$ για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $F \subseteq I$, ισοδύναμα το σύνολο $\{\sum_{i\in F} |\xi(i)|^2 : F \subseteq I$ πεπερασμένο $\}$ είναι άνω φραγμένο στο $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε

$$\|\xi\|_2^2 := \sum_{i\in I} |\xi(i)|^2 := \sup\{\sum_{i\in F} |\xi(i)|^2 : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο } \}.$$

Αποδεικνύεται ότι η $\|\cdot\|_2$ είναι νόρμα στον $\ell^2(I)$ που ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, και ότι ο $\ell^2(I)$ είναι χώρος Hilbert.

Ο $\ell^2(I)$ μπορεί να ορισθεί ισοδύναμα ως η πλήρωση του χώρου $(c_{00}(I), \|\cdot\|_2)$ των συναρτήσεων $\xi : I \to \mathbb{C}$ με *πεπερασμένο φορέα* (δηλ. που μηδενίζονται έξω από ένα πεπερασμένο σύνολο $F_\xi \subseteq I$), όπου τώρα $\|\xi\|_2^2 := \sum_{i\in I} |\xi(i)|^2$ (το άθροισμα έχει πεπερασμένους μη μηδενικούς όρους). Η $\|\cdot\|_2$ προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \xi, \eta\rangle := \sum_{i\in I} \xi(i)\overline{\eta(i)} \qquad \xi, \eta \in (c_{00}(I)\,.$$

Η οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$ όπου $e_i(j) = 0$ όταν $j \neq i$ και $e_i(i) = 1$ είναι ορθοκανονική βάση του $\ell^2(I)$. Ειδικότερα, κάθε $\xi \in c_{00}(I)$ γράφεται

$$\xi = \sum_{i\in F_\xi} \xi(i)e_i$$

και $\xi(i) = \langle \xi, e_i\rangle$ για κάθε $i \in I$.

Η αναπαράσταση της $\mathcal{A}$. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$, ορίζω μια απεικόνιση $\pi_0(a) : c_{00}(I) \to c_{00}(I)$ θέτοντας

$$\pi_0(a)e_i = \phi_i(a)e_i, \quad i \in I$$

και επεκτείνοντας γραμμικά, δηλαδή

$$\pi_0(a)\left(\sum_{i\in F_\xi} \xi(i)e_i\right) = \sum_{i\in F_\xi} \phi_i(a)\xi(i)e_i, \quad \xi \in c_{00}(I)\,.$$

Ισχυρισμός Για κάθε $a \in \mathcal{A}$, ισχύει ότι $\|\pi_0(a)\xi\|_2 \leqslant \|a\|_{\mathcal{A}} \|\xi\|_2$ για κάθε $\xi \in c_{00}(I)$.

Απόδειξη Έχουμε

$$\|\pi_0(a)\xi\|_2^2 = \sum_{i\in F_\xi} |\phi_i(a)\xi(i)|^2 \leqslant \sup_{i\in I} |\phi_i(a)|^2 \sum_{i\in F_\xi} |\xi(i)|^2 \leqslant \|a\|_{\mathcal{A}}^2 \|\xi\|_2^2$$

γιατί $|\phi_i(a)| \leqslant \|a\|_{\mathcal{A}}$ για κάθε $i \in I$ (οι ϕ_i είναι χαρακτήρες, άρα έχουν νόρμα 1). □

Επομένως ο $\pi_0(a)$ είναι φραγμένος τελεστής στον $(c_{00}(I), \|\cdot\|_2)$, άρα επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi(a) : H \to H$ με την ίδια νόρμα, άρα $\|\pi(a)\|_{\mathcal{B}(H)} \leqslant \|a\|_{\mathcal{A}}$.

Με άλλα λόγια, ο $\pi(a) \in \mathcal{B}(H)$ είναι ο "διαγώνιος" τελεστής που έχει την ο.κ. βάση $\{e_i : i \in I\}$ ως ιδιοδιανύσματα με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\{\phi_i(a) : i \in I\}$ (αποτελούν φραγμένο σύνολο με $\sup |\phi_i(a)| \leqslant \|a\|$).

Ισχυρισμός Η απεικόνιση $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H) : a \to \pi(a)$ είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$.

Απόδειξη Αν $a, b \in \mathcal{A}$, για να δείξω ότι

$$\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b) \quad \text{και} \quad \pi(ab) = \pi(a)\pi(b)\,,$$

αφού πρόκειται για ισότητες γραμμικών και φραγμένων τελεστών, αρκεί να δείξω ότι οι τελεστές αυτοί συμπίπτουν σε μια ορθοκανονική βάση του χώρου. Και πράγματι, για κάθε $i \in I$, αφού το ϕ_i διατηρεί άθροισμα και γινόμενο, έχουμε

$$\pi(a+b)e_i = \phi_i(a+b)e_i = (\phi_i(a) + \phi_i(b))e_i = \phi_i(a)e_i + \phi_i(b)e_i = \pi(a)e_i + \pi(b)e_i$$
$$\pi(ab)e_i = \phi_i(ab)e_i = (\phi_i(a)\phi_i(b))e_i = \phi_i(b)(\phi_i(a)e_i) = \phi_i(b)(\pi(a)e_i) = \pi(a)(\phi_i(b)e_i) = \pi(a)(\pi(b)e_i)\,.$$

Επίσης, για κάθε $i, j \in I$, έχουμε

$$\langle \pi(a)^* e_i, e_j \rangle = \langle e_i, \pi(a)e_j \rangle = \langle e_i, \phi_i(a)e_j \rangle = \overline{\phi_i(a)} \langle e_i, e_j \rangle$$
$$\langle \pi(a^*) e_i, e_j \rangle = \langle \phi_i(a^*)e_i, e_j \rangle = \langle \overline{\phi_i(a)} e_i, e_j \rangle = \overline{\phi_i(a)} \langle e_i, e_j \rangle$$

από το οποίο έπεται, αφού η $\{e_i : i \in I\}$ είναι ο.κ. βάση του H, ότι $\langle \pi(a)^* \xi, \eta \rangle = \langle \pi(a^*)\xi, \eta \rangle$ για κάθε $\xi, \eta \in H$ και συνεπώς

$$\pi(a)^* = \pi(a^*) \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}\,.$$

Ισχυρισμός Η απεικόνιση $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H) : a \to \pi(a)$ είναι πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{A}$.

Απόδειξη Αν $\pi(a) = 0$ για κάποιο $a \in \mathcal{A}$ τότε $0 = \pi(a)e_i = \phi_i(a)e_i = 0$, δηλαδή $\phi_i(a) = 0$ για κάθε $i \in I$, άρα $\hat{a}(\phi_i) = 0$ για κάθε $\phi_i \in K_0$. Όμως το K_0 έχει υποτεθεί πυκνό στον K και η $\hat{a}$ είναι συνεχής, άρα $\hat{a}(\phi) = 0$ για κάθε $\phi \in K$. Δηλαδή η $\hat{a}$ είναι η μηδενική συνάρτηση. Αλλά η απεικόνιση Gelfand $a \to \hat{a}$ είναι 1-1, άρα $a = 0$.

Αυτό δείχνει ότι η γραμμική απεικόνιση $\pi : a \to \pi(a)$ είναι 1-1.

Παρατήρηση. Αν η $\mathcal{A}$ είναι διαχωρίσιμη, μπορώ να επιλέξω τον H διαχωρίσιμο.

Πράγματι, αποδεικνύεται τότε ότι ο K είναι μετρικοποιήσιμος, άρα διαχωρίσιμος (αφού είναι συμπαγής), οπότε μπορώ να επιλέξω το πυκνό σύνολο K_0 αριθμήσιμο, δηλαδή $K_0 = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$, και τότε έχουμε $H = \ell^2(\mathbb{N})$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η μεταθετική C* άλγεβρα $\mathcal{A} = \ell^\infty(\mathbb{N})$ δεν είναι διαχωρίσιμη, δρα όμως πιστά στον διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$.