Σχετικά με την Άσκηση IV.1

Έστω $\mathcal{A}$ η άλγεβρα Banach $C(\mathbb{T})$ των συνεχών συναρτήσεων $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ εφοδιασμένη με τις πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum.

Έστω $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ το σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων *p όπου $p(z) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k z^k$, $z\in\mathbb{T}$ με μιγαδικούς συντελεστές $\{a_k\}$.*

(α) Δείξτε ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Stone – Weierstrass και συνεπώς είναι πυκνή στην $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση: Πρέπει να ελεγχθεί και η υπόθεση "η $\mathcal{A}_0$ είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$". Πράγματι, για κάθε $p\in\mathcal{A}_0$ έχουμε $\overline{p(z)} = \sum\limits_{k=-n}^{n}\overline{a_k z^k} = \sum\limits_{m=-n}^{n}\overline{a_{-m}}z^m$.

(β) Για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ ορίζω $\phi_k : \mathcal{A}_0\to\mathbb{C} : p\to a_k$ όπου $p(z) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k z^k$. Δείξτε ότι η ϕ_k είναι καλά ορισμένη συνεχής γραμμική μορφή στην $\mathcal{A}_0$ και συνεπώς επεκτείνεται σε συνεχή γραμμική μορφή $\phi_k : \mathcal{A}\to\mathbb{C}$. Μπορείτε να εκφράσετε την $\phi_k(f)$ με κάποιον τύπο; Είναι η ϕ_k χαρακτήρας;

Παρατήρηση: $\phi_k(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p(e^{it})e^{-ikt}dt = \langle p, e_k\rangle = \hat{p}(k)$ όταν $p\in\mathcal{A}_0$ άρα η ϕ_k είναι καλά ορισμένη, γραμμική και συνεχής, οπότε επεκτείνεται στην $\mathcal{A}$ με $\phi_k(f) = \hat{f}(k)$ για κάθε $f\in\mathcal{A}$.

(γ) Ονομάζω $\mathcal{B} := \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \ker\phi_{-k}$. Είναι κλειστός υπόχωρος της $\mathcal{A}$ και $\mathbf{1}\in\mathcal{B}$. Δείξτε ότι είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$.
Υπόδειξη: Έστω $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}\cap\mathcal{A}_0$. Πρόκειται για το σύνολο των αναλυτικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων *p της μορφής $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $z\in\mathbb{T}$. Παρατηρείστε ότι η $\mathcal{B}_0$ είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ και δείξτε ότι είναι πυκνή στην $\mathcal{B}$.*

Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{B}_0$ είναι πυκνή στην $\mathcal{B}$, θα δείξουμε γενικότερα ότι

Ισχυρισμός *Κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου*

$$\{\hat{f}(k)e_k : k \in \mathbb{Z}\}$$

(όπου $e_k(z) = z^k$, $z \in \mathbb{T}$).

Έτσι, κάθε $f \in \mathcal{A}$ προσεγγίζεται από τριγ. πολυώνυμα της μορφής $\sum\limits_{k=-n}^{n} a_k \hat{f}(k) z^k$, οπότε αν $f \in \mathcal{B}$ τότε τα πολυώνυμα αυτά ανήκουν στην $\mathcal{B}_0$, αφού $\hat{f}(k) = 0$ για $k < 0$.

Ο Ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα του Fejér, σύμφωνα με το οποίο για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ (μπορεί η σειρά Fourier $\sum_k \hat{f}(k)e_k$ να μην συγκλίνει, αλλά) οι μέσοι όροι $\sigma_n(f) := \sum\limits_{k=-n}^{n} (1 - \frac{|k|}{n+1})\hat{f}(k)e_k$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f.

Θα δώσουμε μια διαφορετική απόδειξη. Αντί για Cesàro αθροισιμότητα, όπως στο Θεώρημα Fejér, θα χρησιμοποιήσουμε Poisson αθροισιμότητα.

Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Για κάθε $0 \leqslant r < 1$, η σειρά

$$f_r(e^{it}) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt}, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση $f_r : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.

Η συνάρτηση f_r από τον ορισμό της προσεγγίζεται ομοιόμορφα από τριγωνομετρικά πολυώνυμα της μορφής που θέλουμε: $\sum\limits_{k=-n}^{n} r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt}$. Αρκεί λοιπόν τώρα να δείξει κανείς ότι $\lim\limits_{r \nearrow 1} f_r = f$ *ομοιόμορφα.*

Εφόσον $\lim\limits_{r \nearrow 1} r^{|k|} = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αν αντί για την f έχουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(z) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \hat{p}(k) z^k$, τότε βέβαια $\lim\limits_{r \nearrow 1} p_r = p$ ομοιόμορφα, αφού υπάρχει μόνο πεπερασμένο πλήθος (μη μηδενικών) προσθετέων.

Όμως, από το Θεώρημα Stone–Weierstrass, κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Μπορούμε λοιπόν να ολοκληρώσουμε τη διαδικασία της προσέγγισης με την ακόλουθη μέθοδο, που εφαρμόζεται και σε πολύ γενικότερες συνθήκες:

Αν δοθεί $\epsilon > 0$, επιλέγουμε πρώτα ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|f-p\|_{\mathbb{T}} < \epsilon$. Κατόπιν, γι αυτό το p, επιλέγουμε $r_0 \in (0,1)$ ώστε $\|p-p_r\|_{\mathbb{T}} < \epsilon$ για κάθε $r \in (r_0, 1)$. Και τώρα έχουμε

$$\|f-f_r\|_{\mathbb{T}} \leqslant \|f-p\|_{\mathbb{T}} + \|p-p_r\|_{\mathbb{T}} + \|p_r-f_r\|_{\mathbb{T}} < 2\epsilon + \|p_r-f_r\|_{\mathbb{T}} \quad \text{αν } r \in (r_0,1)$$

οπότε αρκεί να ελέγξουμε τον τελευταίο προσθετέο $\|p_r-f_r\|_{\mathbb{T}} = \|(p-f)_r\|_{\mathbb{T}}$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξει κανείς ότι

Ισχυρισμός *Για κάθε $g \in C(\mathbb{T})$ και κάθε $0 \leqslant r < 1$, ισχύει η ανισότητα*

$$\|g_r\|_{\mathbb{T}} \leqslant \|g\|_{\mathbb{T}} \ .$$

Απόδειξη Ισχυρισμού. Έχουμε

$$\begin{aligned}
g_r(e^{it}) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{g}(n)e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)e^{-ins}ds\right)e^{int} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{is})e^{in(t-s)}ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{is})\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(t-s)}\right)ds \quad \text{(ομοιόμορφη σύγκλιση)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)P_r(t-s)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{όπου}\quad P_r(t) &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n}e^{int} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} \quad \text{(θέτοντας } z = re^{it}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}^k + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} + 1 + \frac{z}{1-z} \quad \text{(αφού } |z| = r < 1) \\
&= \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} + \frac{1}{1-z} = \frac{\bar{z}(1-z)+(1-\bar{z})}{(1-\bar{z})(1-z)} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Επομένως, αφού $P_r(t) \geqslant 0$ για κάθε t, και $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)ds = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ins}ds = 2\pi r^0$, για κάθε συνεχή g έχουμε

$$|g_r(e^{it})| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{is})P_r(t-s)ds\right| \leqslant \|g\|_{\mathbb{T}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s)ds = \|g\|_\infty$$

άρα $\|g_r\|_{\mathbb{T}} = \sup_t |g_r(e^{it})| \leqslant \|g\|_{\mathbb{T}}$, όπως θέλαμε. $\square$