Η συμπαγοποίηση Stone-Cech ενός διακριτού χώρου

Έστω Γ [1] μη κενό σύνολο και

$$\mathcal{A} = \ell^\infty(\Gamma) = \{a : \Gamma \to \mathbb{C},\ a \text{ φραγμένη}\}.$$

Είναι μεταθετική C* άλγεβρα με μονάδα.
Συμβολίζουμε $\beta\Gamma$ τον χώρο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$: είναι συμπαγής χώρος Hausdorff στην ασθενή* τοπολογία.

Για κάθε $\gamma \in \Gamma$, ορίζουμε

$$\phi_\gamma : \mathcal{A} \to \mathbb{C} : a \to a(\gamma)\,.$$

Είναι προφανές ότι κάθε ϕ_γ είναι χαρακτήρας της $\mathcal{A}$.

(α) Η απεικόνιση

$$\Phi : \Gamma \to \beta\Gamma : \gamma \to \phi_\gamma$$

είναι 1-1. Πράγματι, αν $\phi_\gamma = \phi_{\gamma'}$ τότε θα έχουμε $a(\gamma) = a(\gamma')$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, οπότε θέτοντας $a = e_\gamma$ (=η χαρακτηριστική συνάρτηση του $\{\gamma\}$), βρίσκουμε $1 = e_\gamma(\gamma')$ άρα $\gamma = \gamma'$.

(β) το σύνολο $\Phi(\Gamma) = \{\phi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ είναι διακριτό στον $\beta\Gamma$.

Απόδειξη Να δείξουμε ότι κάθε σημείο ϕ_γ είναι μεμονωμένο στον $\Phi(\Gamma) \subseteq \beta\Gamma$, δηλ. ότι το μονοσύνολο $\{\phi_\gamma\}$ είναι σχετικά ασθενώς* ανοικτό στο $\Phi(\Gamma) \subseteq \beta\Gamma$ (όλα τα μονοσύνολα είναι κλειστά, αφού ο $\beta\Gamma$ είναι Hausdorff).

Πράγματι: Αφού $e_\gamma \in \mathcal{A}$, από τον ορισμό της ασθενούς* τοπολογίας το σύνολο

$$V := \{\phi \in \beta\Gamma : |(\phi - \phi_\gamma)(e_\gamma)| < \frac{1}{2}\}$$

είναι ανοικτή περιοχή του ϕ_γ. Παρατήρησε όμως ότι για κάθε χαρακτήρα ϕ έχουμε $\phi(e_\gamma) = \phi(e_\gamma^2) = \phi(e_\gamma)^2$ και άρα $\phi(e_\gamma) \in \{0,1\}$ ενώ $\phi_\gamma(e_\gamma) = 1$. Επομένως, αν $|(\phi - \phi_\gamma)(e_\gamma)| < \frac{1}{2}$ τότε $|\phi(e_\gamma) - 1| < \frac{1}{2}$ άρα $\phi(e_\gamma) = 1$. Αν λοιπόν $\phi \in V \cap \Phi(\Gamma)$, οπότε $\phi = \phi_{\gamma'}$ για κάποιο $\gamma' \in \Gamma$, θα έχουμε $\phi_{\gamma'}(e_\gamma) = 1$, άρα

[1] betagamma, 29 Μαΐου 2019

$\phi = \phi_\gamma$. Δείξαμε δηλαδή ότι $V \cap \Phi(\Gamma) = \{\phi_\gamma\}$, άρα το $\{\phi_\gamma\}$ είναι σχετικά ανοικτό.

Άλλη απόδειξη Αν κάποιο ϕ_γ δεν είναι μεμονωμένο στον $\Phi(\Gamma) \subseteq \beta\Gamma$, υπάρχει ένα δίκτυο $\{\phi_{\gamma_i}\}$ με $\phi_{\gamma_i} \neq \phi_\gamma$ για κάθε i που συγκλίνει ασθενώς-* στο ϕ_γ. Θα πρέπει τότε να έχουμε $\phi_{\gamma_i}(e_\gamma) \to \phi_\gamma(e_\gamma) = 1$. Όμως $\phi_{\gamma_i}(e_\gamma) = 0$ (αφού $\gamma_i \neq \gamma$) για κάθε i, άτοπο.

(γ) Το σύνολο $\Phi(\Gamma) = \{\phi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ είναι πυκνό στον $\beta\Gamma$.

Απόδειξη Η κλειστή θήκη, έστω K, του $\Phi(\Gamma)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\beta\Gamma$. Επομένως, αν είναι γνήσιο υποσύνολο, υπάρχει μη μηδενική συνάρτηση $f \in C(\beta\Gamma)$ που μηδενίζεται στο K (Urysohn). Αλλά η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική C* άλγεβρα με μονάδα, επομένως ο μετασχηματισμός Gelfand είναι επί της $C(\beta\Gamma)$: υπάρχει λοιπόν $a \in \mathcal{A}$ ώστε $\hat{a} = f$. Τότε όμως για κάθε $\gamma \in \Gamma$ έχουμε $\hat{a}(\phi_\gamma) = f(\phi_\gamma) = 0$. Δηλαδή $a(\gamma) = \hat{a}(\phi_\gamma) = 0$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$, οπότε $a = 0$, σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $\hat{a} = f \neq 0$. □

(δ) Αν ταυτίσουμε (μέσω της Φ) το Γ με την εικόνα του στο $\beta\Gamma$, κάθε φραγμένη συνάρτηση $a : \Gamma \to \mathbb{C}$ επεκτείνεται μοναδικά σε *συνεχή συνάρτηση* $\hat{a} : \beta\Gamma \to \mathbb{C}$.

Πράγματι, η συνάρτηση $\hat{a}$ είναι επέκταση της a, γιατί $\hat{a}(\phi_\gamma) = a(\gamma)$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$ (ορισμός του ϕ_γ). Η επέκταση αυτή είναι μοναδική, γιατί αν μια συνεχής συνάρτηση $f : \beta\Gamma \to \mathbb{C}$ ταυτίζεται με την $\hat{a}$ στο Γ, τότε αναγκαστικά θα ισούται με την $\hat{a}$ σ' όλο το $\beta\Gamma$, εφόσον το Γ (δηλ. η εικόνα του) είναι πυκνό στο $\beta\Gamma$.

Παρατήρηση 1 Αν το Γ είναι άπειρο, ο χώρος $\beta\Gamma$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος. Μάλιστα, παρόλο που η εικόνα του Γ στο $\beta\Gamma$ είναι πυκνή, κανένα στοιχείο του $\beta\Gamma$ που δεν ανήκει στην εικόνα του Γ δεν προσεγγίζεται από *ακολουθία* στοιχείων της εικόνας του Γ.

Απόδειξη Αν ο $\beta\Gamma$ είναι μετρικοποιήσιμος, κάθε $\phi \in \beta\Gamma$ θα προσεγγίζεται από *ακολουθία* στοιχείων της εικόνας του Γ. Αφού το Γ είναι άπειρο και διακριτό, δεν είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $\phi \in \beta\Gamma$ που δεν ανήκει στην εικόνα του Γ.

Έστω ότι αυτό το ϕ προσεγγίζεται στην τοπολογία του $\beta\Gamma$ από μια ακολουθία (ϕ_{γ_n}) όπου $\gamma_n \in \Gamma$ με $\gamma_n \neq \gamma_m$ όταν $n \neq m$. Θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Ονομάζουμε $a \in \ell^\infty(\Gamma)$ τη χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $E := \{\gamma_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Gamma$. Δηλαδή, $a(\gamma_{2n}) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a(\gamma) = 0$ για κάθε $\gamma \in \Gamma \backslash E$.

Η συνάρτηση $\hat{a}$ είναι συνεχής στο $\beta\Gamma$ και $\phi_{\gamma_n} \to \phi$, συνεπώς $\hat{a}(\phi_{\gamma_n}) \to \hat{a}(\phi)$. Επομένως $\lim_n \hat{a}(\phi_{\gamma_{2n}}) = \hat{a}(\phi)$ και $\lim_n \hat{a}(\phi_{\gamma_{2n-1}}) = \hat{a}(\phi)$. Όμως $\hat{a}(\phi_{\gamma_{2n}}) = a(\gamma_{2n}) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ενώ $\hat{a}(\phi_{\gamma_{2n-1}}) = a(\gamma_{2n-1}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο. $\square$

Παρατήρηση 2 Αν το Γ είναι υπεραριθμήσιμο, η $\ell^\infty(\Gamma)$ δεν δέχεται καμμιά πιστή κατάσταση.

Απόδειξη έστω $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ μια κατάσταση. Θα δείξω ότι υπάρχει $\gamma \in \Gamma$ ώστε $\omega(e_\gamma) = 0$.

Μάλιστα ισχυρίζομαι ότι το σύνολο $\{\gamma \in \Gamma : \omega(e_\gamma) \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο (παρατήρησε ότι $\omega(e_\gamma) \geqslant 0$ εφόσον η ω είναι θετική και $e_\gamma \in \mathcal{A}_+$). Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$\{\gamma \in \Gamma : \omega(e_\gamma) > \frac{1}{n}\}$$

δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από n στοιχεία. Γιατί, αν υπήρχαν $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}$ με $\omega(e_{\gamma_k}) > \frac{1}{n}$ για κάθε k, τότε

$$\omega(e_{\gamma_1} + \cdots + e_{\gamma_{n+1}}) = \omega(e_{\gamma_1}) + \cdots + \omega(e_{\gamma_{n+1}}) > (n+1)\frac{1}{n} > 1$$

ενώ

$$|\omega(e_{\gamma_1} + \cdots + e_{\gamma_{n+1}})| \leqslant \|\omega\| \left\|e_{\gamma_1} + \cdots + e_{\gamma_{n+1}}\right\| = 1$$

(η συνάρτηση $e_{\gamma_1} + \cdots + e_{\gamma_{n+1}}$ είναι η χαρακτηριστική του συνόλου $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}\}$. οπότε έχει νόρμα 1). Κατά συνέπεια το σύνολο

$$\{\gamma \in \Gamma : \omega(e_\gamma) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\gamma \in \Gamma : \omega(e_\gamma) > \frac{1}{n}\}$$

είναι αριθμήσιμο, άρα διάφορο του Γ.