Εφαρμογές του μεταθετικού Θεωρήματος Gelfand-Naimark σε μη μεταθετικές C* άλγεβρες

1 Εξάρτηση του φάσματος από την άλγεβρα

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ κλειστή υπάλγεβρα που περιέχει την μονάδα της $\mathcal{A}$. Αν ένα $b \in \mathcal{B}$ έχει αντίστροφο στην $\mathcal{B}$, αν δηλαδή $b \in G_{\mathcal{B}}$, τότε βεβαίως $b \in G_{\mathcal{A}}$. Δηλαδή

$$G_{\mathcal{B}} \subseteq G_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B} .$$

Έπεται ότι

$$b \in \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b) .$$

Γιατί αν $b \in \mathcal{B}$ και $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma_{\mathcal{B}}(b)$, το στοιχείο $\lambda \mathbf{1} - b$ της $\mathcal{B}$ είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{B}$, άρα και στην $\mathcal{A}$, δηλαδή $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{A}}(b)$.

Ισότητα όμως σ' αυτές τις σχέσεις εν γένει δεν ισχύει:

Παράδειγμα 1.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= C(\mathbb{T}) = \{f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ συνεχής}\} \\ \mathcal{B} &= \{f \in \mathcal{A} : \hat{f}(-k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}\} . \end{aligned}$$

(Εδώ $\hat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt$). Αν $\zeta \in \mathcal{A}$ είναι η συνάρτηση $\zeta(e^{it}) = e^{it}$, τότε $\zeta \in \mathcal{B}$ και η ζ έχει αντίστροφο, την $\bar{\zeta}(e^{it}) = e^{-it}$, αλλά η $\bar{\zeta}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$. [1]

Θα δείξουμε ότι όταν η $\mathcal{A}$ και η $\mathcal{B}$ είναι C* άλγεβρες, έχουμε $G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B}$, και επομένως το φάσμα ενός στοιχείου της $\mathcal{A}$ μπορεί να υπολογισθεί σε *οποιαδήποτε C* υπάλγεβρα* της $\mathcal{A}$ που το περιέχει.

[1] Η $\mathcal{B}$ δεν είναι άλλη από την άλγεβρα του δίσκου $A(\mathbb{D})$, εδώ με άλλα ρούχα - αποτελείται από εκείνες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ που δέχονται επέκταση σε $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο. Η απεικόνιση $f \to \tilde{f}$ είναι γραμμική και ισομετρική αλλαγή ρούχων $\mathcal{B} \to A(\mathbb{D})$. Αλλά αυτό δεν είναι στα άμεσα ενδιαφέροντά μας.

2 Inverse-closed subalgebras

Σε ορισμένες περιπτώσεις η μελέτη σου φάσματος ενός στοιχείου μιάς άλγεβρας ανάγεται σε μεταθετικές υπάλγεβρες. Μια τέτοια υπάλγεβρα είναι ο λεγόμενος *δεύτερος μεταθέτης (bicommutant)* του στοιχείου:

Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$. Ο *μεταθέτης* $\mathcal{S}'$ του $\mathcal{S}$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{S}' := \{a \in \mathcal{A} : as = sa \, \forall s \in \mathcal{S}\}.$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι πάντα το $\mathcal{S}'$ είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει την $\mathbf{1}$. Επίσης, αν η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα με νόρμα, από την συνέχεια του πολλαπλασιασμού έπεται ότι η $\mathcal{S}'$ είναι κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$.

Επίσης, η άλγεβρα $\mathcal{S}'$ είναι 'inverse-closed', δηλαδή, αν $b \in \mathcal{S}' \cap G_{\mathcal{A}}$ τότε $b^{-1} \in \mathcal{S}'$.

Πράγματι, από τη σχέση $bs = sb \, \forall s \in \mathcal{S}$ συμπεραίνουμε ότι

$$sb^{-1} = b^{-1}(bs)b^{-1} = b^{-1}(sb)b^{-1} = b^{-1}s \quad \forall s \in \mathcal{S}$$

και άρα $b^{-1} \in \mathcal{S}'$. Συμπέρασμα:

Παρατήρηση 2. *Αν $\mathcal{B} = \mathcal{S}'$ για κάποιο υποσύνολο $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, τότε $G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B}$.*

Παρατήρηση 3. *Αν το $\mathcal{S}$ είναι μεταθετικό σύνολο (δηλ. $s_1s_2 = s_2s_1$ για κάθε $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$), τότε ο δεύτερος μεταθέτης $\mathcal{S}''$ είναι μεταθετική άλγεβρα.*

Παράδειγμα 4. *Ο μεταθέτης ενός μεταθετικού συνόλου δεν είναι εν γένει μεταθετική άλγεβρα. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$ και $\mathcal{S} = \{\mathbf{1}\}$, τότε $\mathcal{S}' = \mathcal{A}$.*

Απόδειξη της Παρατήρησης 3. Αφού το $\mathcal{S}$ είναι μεταθετικό, ισχύει ότι $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ (κάθε $s \in \mathcal{S}$ μετατίθεται με το $\mathcal{S}$).

Επομένως, $(\mathcal{S}')' \subseteq \mathcal{S}'$ (αν ένα $b \in \mathcal{A}$ μετατίθεται με την $\mathcal{S}'$ τότε μετατίθεται και με οτιδήποτε περιέχεται στην $\mathcal{S}'$, άρα και με το $\mathcal{S}$).

Επαναλαμβάνοντας το ίδιο στη σχέση $\mathcal{S}'' \subseteq \mathcal{S}'$ συμπεραίνουμε ότι $(\mathcal{S}')' \subseteq \mathcal{S}'''$, δηλαδή $\mathcal{S}'' \subseteq (\mathcal{S}'')'$ που σημαίνει ότι η άλγεβρα $\mathcal{S}''$ περιέχεται στον μεταθέτη της, δηλαδή είναι μεταθετική. □

Συνοψίζοντας, έχουμε

Πρόταση 5. *Αν $\mathcal{A}$ είναι [νορμαρισμένη] άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ μεταθετικό σύνολο, τότε η $\mathcal{B} := \mathcal{S}''$ είναι [κλειστή] μεταθετική υπάλγεβρα που περιέχει την μονάδα της $\mathcal{A}$ και ικανοποιεί*

$$G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B}$$
$$\textit{και} \;\; b \in \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b)\,.$$

3 C* subalgebras are inverse-closed

Λήμμα 6. *Έστω $\mathcal{C}$ μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα.*
(α) Αν $a = a^* \in \mathcal{A}$, τότε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.
(β) Αν $u \in \mathcal{A}$ με $u^*u = \mathbf{1}$, τότε $\sigma(u) \subseteq \mathbb{T}$.

Απόδειξη. Έχουμε δείξει ότι $\overline{\phi(b)} = \phi(b^*)$ για κάθε $b \in \mathcal{C}$ και $\phi \in \mathfrak{M}(\mathcal{C})$, άρα $\phi(a) \in \mathbb{R}$ και $|\phi(u)|^2 = \overline{\phi(u)}\phi(u) = \phi(u^*)\phi(u) = \phi(u^*u) = 1$ για κάθε $\phi \in \mathfrak{M}(\mathcal{C})$) και συνεπώς

$$\sigma(a) = \{\phi(a) : \phi \in \mathfrak{M}(\mathcal{C}))\} \subseteq \mathbb{R} \ \text{ και } \ \sigma(u) = \{\phi(u) : \phi \in \mathfrak{M}(\mathcal{C}))\} \subseteq \mathbb{T}\,.$$

□

Πρόταση 7. *Αν $\mathcal{A}$ είναι C^* άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{B}$ κλειστή αυτοσυζυγής υπάλγεβρα που περιέχει την μονάδα της $\mathcal{A}$, τότε*

$$G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B}$$
$$\textit{και} \ \ b \in \mathcal{B} \ \Rightarrow \ \sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b)\,.$$

Απόδειξη. Έστω $b \in G_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $b \in G_{\mathcal{B}}$. Η μέθοδος της προηγουμένης παραγράφου δεν μπορεί να εφαρμοσθεί, καθώς δεν ισχύει εν γένει ότι ο δεύτερος μεταθέτης του $\{\mathbf{1}, b\}$ περιέχεται στην $\mathcal{B}$. [2]

Υποθέτουμε πρώτα ότι $b = b^*$. Ονομάζουμε $\mathcal{C} = C^*(\mathbf{1}, b)$ την μικρότερη C^* υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει το b και την $\mathbf{1}$ (είναι η κλειστή θήκη του συνόλου των πολυωνύμων του b). Είναι φανερό ότι $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, και ότι η $\mathcal{C}$ είναι *μεταθετική* C^* άλγεβρα. Θα δείξω ότι το b είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της $\mathcal{C}$.

Από το Λήμμα έχουμε $\sigma_{\mathcal{C}}(b) \subseteq \mathbb{R}$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το στοιχείο $b_n := b - \frac{i}{n}\mathbf{1}$ είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{C}$, άρα και στην $\mathcal{A}$. Επειδή $\lim_n b_n = b$ και η πράξη $y \to y^{-1}$ είναι συνεχής στο σύνολο $G_{\mathcal{A}}$, η ακολουθία $((b_n)^{-1})_n$ είναι βασική (αφού συγκλίνει) και αποτελείται από στοιχεία της $\mathcal{C}$. Επομένως, αφού η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στην $\mathcal{A}$, και το όριό της b^{-1} θα ανήκει στην $\mathcal{C}$ και άρα στην $\mathcal{B}$.

Για την γενική περίπτωση θέτω $a = b^*b$ και παρατηρώ ότι, αφού το b είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$, το ίδιο ισχύει για το a (γιατί $b \in G_{\mathcal{A}}, b^* \in G_{\mathcal{A}}$ άρα $a = b^*b \in G_{\mathcal{A}}$). Από την προηγούμενη παράγραφο, το a^{-1} ανήκει στην $\mathcal{B}$. Επειδή $\mathbf{1} = a^{-1}(b^*b) = (a^{-1}b^*)b$ και $\mathbf{1} = b^{-1}b$, η μοναδικότητα του αντιστρόφου δείχνει τώρα ότι $b^{-1} = a^{-1}b^*$, που ανήκει στην $\mathcal{B}$.

Η δεύτερη ισότητα είναι τώρα άμεση: Αν $b \in \mathcal{B}$ και $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathcal{A}}(b)$, το στοιχείο $\lambda\mathbf{1} - b$ της $\mathcal{B}$ είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$, οπότε είναι αντιστρέψιμο και στην $\mathcal{B}$

[2] Για παράδειγμα, αν $\mathcal{A} = C_b(\mathbb{R})$ και $\mathcal{B} = C_0(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$, τότε, αφού η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική, ο δεύτερος μεταθέτης οποιουδήποτε στοιχείου της $\mathcal{B}$ είναι ολόκληρη η $\mathcal{A}$.

(όπως μόλις δείξαμε), δηλαδή $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{B}}(b)$. Δείξαμε ότι $\mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathcal{B}}(b)$, και επειδή πάντα ισχύει η $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$ έχουμε ισότητα. $\square$

Παρατήρηση 8. *Η ύπαρξη ενέλιξης είναι ασφαλώς κρίσιμη στην προηγούμενη Πρόταση. Δεν αρκεί όμως από μόνη της: το συμπέρασμα της Πρότασης δεν ισχύει εν γένει σε άλγεβρες Banach με ισομετρική ενέλιξη, ούτε σε ενελικτικές άλγεβρες με νόρμα που ικανοποιεί την ιδιότητα C*, όπως φαίνεται από τα ακόλουθα παραδείγματα:*

Παράδειγμα 9. *Θεωρούμε την (μεταθετική) C* άλγεβρα $\mathcal{A} = C([0,1])$ και την *-υπάλγεβρα της $\mathcal{B}$ που αποτελείται από όλες τις πολυωνυμικές συναρτήσεις. Η συνάρτηση $p \in \mathcal{B}$ όπου $p(t) = t^2 + 1$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο $[0,1]$, επομένως αντιστρέφεται στην $\mathcal{A}$. Αλλά βεβαίως η αντίστροφή της $\frac{1}{p}(t) = \frac{1}{t^2+1}$ δεν είναι πολυώνυμο - δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$.*

Παράδειγμα 10. *Θεωρούμε την (μεταθετική) άλγεβρα Banach $\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ εφοδιασμένη με την ενέλιξη $f \to f^{\#}$ όπου $f^{\#}(z) = \overline{f(\bar{z})}$ και την αυτοσυζυγή υπάλγεβρα της $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ όπως στο Παράδειγμα 1.*[3] *Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι η συνάρτηση $\zeta \in \mathcal{B}$ όπου $\zeta(z) = z$ αντιστρέφεται στην $\mathcal{A}$, αλλά η αντίστροφή της δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$.*

4 Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Πόρισμα 11. *Αν $\mathcal{A}$ είναι C* άλγεβρα και $a \in \mathcal{A}$ τότε*
(α) Αν το a είναι φυσιολογικό στοιχείο (δηλ. $aa^* = a^*a$), τότε
$\|a\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.
(β) Αν $a = a^* \in \mathcal{A}$, τότε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.
(γ) Αν το a είναι unitary, δηλ. $a^*a = aa^* = \mathbf{1}$, τότε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$.

Απόδειξη. Αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, τότε θεωρούμε το a ως στοιχείο της μοναδοποίησης (υπενθυμίζουμε ότι έτσι ορίζεται το $\sigma(a)$). Μπορούμε λοιπόν να υποθέτουμε ότι η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα.

Ονομάζουμε $\mathcal{C} = C(\{\mathbf{1}, a\})$ την C* υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που παράγει το $\{\mathbf{1}, a\}$. Πρόκειται για την κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου των λέξεων $x_1 x_2 \dots x_n$ όπου $x_k \in \{\mathbf{1}, a, a^*\}$. Όμως, αφού το a ικανοποιεί $aa^* = a^*a$, κάθε τέτοια λέξη γράφεται $a^m a^{*n}$ όπου $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Δηλαδή, η $\mathcal{C}$ είναι η κλειστή θήκη των *πολυωνύμων* ως προς a και a^* (με μιγαδικούς συντελεστές).

Είναι *μεταθετική* C* άλγεβρα με μονάδα.

[3] Ότι η $f^{\#}$ ανήκει στην $\mathcal{B}$ για κάθε $f \in \mathcal{B}$ αφήνεται ως άσκηση.

Από την Πρόταση 7 γνωρίζουμε ότι $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{C}}(a)$ και γι αυτό γράφουμε απλώς $\sigma(a)$.

Το πόρισμα είναι τώρα άμεση συνέπεια της θεωρίας Gelfand για μεταθετικές C* άλγεβρες: Τα (β) και (γ) έπονται από το Λήμμα 6.

Το (α) έπεται από το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Gelfand
$\mathcal{C} \ni x \to \hat{x} \in C(\mathfrak{M}(\mathcal{C}))$ είναι ισομετρία:

$$\|a\| = \|\hat{a}\| = \sup\{\phi(a) : \phi \in \mathfrak{M}(\mathcal{C})\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}\,.$$

□

Παρατήρηση 12. *Σε μη μεταθετικές C* άλγεβρες, δεν αρκεί η σχέση $a^*a = \mathbf{1}$ για να συμπεράνουμε ότι $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$. Για παράδειγμα αν $a \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ ικανοποιεί $a(e_n) = e_{n+1}$, τότε $a^*a(e_n) = e_n$ για κάθε n, άρα $a^*a = \mathbf{1}$ αλλά αποδεικνύεται (δες την Ασκ. II.3) ότι $\sigma(a) = \overline{\mathbb{D}}$.*

Πόρισμα 13. *Κάθε C* άλγεβρα είναι ημιαπλή.*

Απόδειξη. Αν $q \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$, τότε $\sigma(aq) = \{0\}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. [4] Ειδικότερα, $\sigma(q^*q) = \{0\}$. Από το Πόρισμα 11 έπεται ότι $\|q^*q\| = 0$ και συνεπώς $\|q\|^2 = \|q^*q\| = 0$. □

Παρατήρηση 14. *Σε μια μη μεταθετική C* άλγεβρα, η σχέση $\|a\| = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(a)\}$ δεν ισχύει για αυθαίρετα στοιχεία της $\mathcal{A}$. Μπορεί για παράδειγμα να ισχύει $a^2 = 0$ και $a \neq 0$. Παράδειγμα: $a = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in M_2(\mathbb{C})$. Παρόλα αυτά,*

Παρατήρηση 15. *Η νόρμα σε μια C* άλγεβρα καθορίζεται από την αλγεβρική της δομή: για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε*

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x^*x)\}\,,$$

[4] *Απόδειξη όταν $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$:* Από τον ορισμό του, το $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ είναι η τομή όλων των αριστερών μεγιστικών ιδεωδών της $\mathcal{A}$.

(α) Ισχυρισμός. Το $\mathbf{1} - q$ έχει αριστερό αντίστροφο. Πράγματι, αν δεν είχε, το σύνολο $\mathcal{A}(\mathbf{1} - q)$ θα ήταν γνήσιο υποσύνολο της $\mathcal{A}$ και αφού είναι προφανώς αρ. ιδεώδες, περιέχεται (Zorn) σ' ένα μεγιστικό αριστερό (γνήσιο) ιδεώδες, έστω M, άρα $\mathbf{1} - q = \mathbf{1}(\mathbf{1} - q) \in M$. Αλλά και το q ανήκει στο M αφού ανήκει στην τομή όλων των αριστερών μεγιστικών ιδεωδών. Οπότε θα έχουμε $\mathbf{1} = \mathbf{1} - q + q \in M$, άτοπο.

(β) Ισχυρισμός. Το $\mathbf{1} - q$ έχει αντίστροφο. Πράγματι, από το (α), υπάρχει $b \in \mathcal{A}$ ώστε $b(\mathbf{1} - q) = \mathbf{1}$. Δηλαδή το b έχει δεξί αντίστροφο και $b = \mathbf{1} - (-bq)$. Αλλά αφού $q \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ που είναι αριστερό ιδεώδες, έχουμε $-bq \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$. Εφαρμόζοντας το (α) στο $-bq$, συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{1} - (-bq)$ έχει αριστερό αντίστροφο, δηλ. το b έχει αριστερό αντίστροφο. Άρα το b έχει αντίστροφο, οπότε η σχέση $b(\mathbf{1} - q) = \mathbf{1} = bb^{-1}$ δείχνει (μοναδικότητα αντιστρόφου) ότι $\mathbf{1} - q = b^{-1}$ που είναι αντιστρέψιμο.

Τελικώς για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ και κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχω $aq/\lambda \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ οπότε από το (β) το $\mathbf{1} - aq/\lambda$ είναι αντιστρέψιμο, άρα το $\lambda\mathbf{1} - aq$ είναι αντιστρέψιμο, δηλαδή $\lambda \notin \sigma(aq)$, οπότε $\sigma(aq) = \{0\}$.

όπου χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 11(α) για το φυσιολογικό στοιχείο $a = x^*x$.

Πρόταση 16 (Αυτόματη συνέχεια μορφισμών)**.** *Αν $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ είναι C^* άλγεβρες με μονάδα*[5] *και $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι *-μορφισμός, τότε ο ϕ είναι συνεχής και μάλιστα $\|\phi\| \leqslant 1$. Αν ο ϕ είναι *-ισομορφισμός (δηλ. 1-1 και επί), τότε είναι ισομετρία.*

Απόδειξη. Παρατηρώ ότι το $\phi(\mathbf{1})$ είναι μονάδα της *-άλγεβρας $\phi(\mathcal{A})$, άρα και της κλειστής της θήκης, έστω $\mathcal{C}$. Επομένως, περιοριζόμενος εν ανάγκη στην C^* άλγεβρα $\mathcal{C}$, μπορώ να υποθέσω ότι $\phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Παρατήρησε ότι $\sigma(\phi(y)) \subseteq \sigma(y)$ (αν $\lambda\mathbf{1} - y \in G_{\mathcal{A}}$, τότε $\lambda\mathbf{1} - \phi(y) = \phi(\lambda\mathbf{1} - y) \in G_{\mathcal{C}}$) για κάθε $y \in \mathcal{A}$. Επομένως για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε $r(\phi(x^*x)) \leqslant r(x^*x)$, ($r$: η φασματική ακτίνα) άρα

$$\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x)^*\phi(x)\| = r(\phi(x)^*\phi(x)) = r(\phi(x^*x)) \leqslant r(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2\,,$$

δηλαδή $\|\phi(x)\| \leqslant \|x\|$. Αν ο ϕ είναι *-ισομορφισμός, τότε εφαρμόζοντας τα προηγούμενα στον ϕ και στον ϕ^{-1}, βρίσκουμε

$$\|\phi(x)\| \leqslant \|x\| = \|\phi^{-1}(\phi(x))\| \leqslant \|\phi(x)\|$$

άρα $\|\phi(x)\| = \|x\|$. $\square$

Παρατήρηση 17. *Στην πραγματικότητα, αν ο ϕ είναι *-μορφισμός και 1-1, τότε είναι αυτομάτως ισομετρία.* [6] *Το γεγονός αυτό δεν προκύπτει άμεσα από τα προηγούμενα, καθώς δεν είναι εκ των προτέρων γνωστό ότι η εικόνα $\phi(\mathcal{A})$ είναι C^* άλγεβρα, δηλ. ότι είναι κλειστή στην $\mathcal{B}$.*

Πρόταση 18 (Μοναδικότητα της νόρμας)**.** *Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα με ενέλιξη, τότε ορίζεται το πολύ μία νόρμα στην $\mathcal{A}$ ως προς την οποία είναι C^* άλγεβρα.*

Πρόταση 19. *Έστω a φυσιολογικό στοιχείο μιας C*-άλγεβρας με μονάδα.*
Γράφουμε $K := \mathfrak{M}(C^*(1, a))$.
Έστω $\mathcal{G} : C^*(1, a) \to C(K)$ η αναπαράσταση Gelfand της $C^*(1, a)$.
Η απεικόνιση $\hat{a} := \mathcal{G}(a) : K \to \mathbb{C}$ απεικονίζει ομοιομορφικά το K επί του $\sigma(a)$.

Απόδειξη. Γράφουμε $\mathcal{C} := C^*(1, a)$.
Επειδή $\sigma(a) = \sigma_{\mathcal{C}}(a) = \{\phi(a) : \phi \in \mathfrak{M}(\mathcal{C})\}$, η απεικόνιση

$$\hat{a} : \mathfrak{M}(\mathcal{C}) \to \sigma(a) : \phi \to \phi(a)$$

είναι επί, και είναι βεβαίως συνεχής (από τον ορισμό της τοπολογίας του χώρου $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$.

[5] το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για C^* άλγεβρες χωρίς μονάδα

[6] Μια απόδειξη υπάρχει στο αρχείο
`https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH175/morph.pdf`.

Αρκεί λοιπόν (αφού ο $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$ είναι συμπαγής χώρος) να δειχθεί ότι είναι 1-1. Έστω $\hat{a}(\phi) = \hat{a}(\psi)$ όπου $\phi, \psi \in K$, δηλαδή $\phi(a) = \psi(a)$. Τότε $\phi(a^n) = \psi(a^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλά έχουμε δείξει (!) ότι $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$ και $\overline{\psi(a)} = \psi(a^*)$, οπότε $\phi(a^*) = \psi(a^*)$. Επομένως $\phi(a^{*m}) = \psi(a^{*m})$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και άρα $\phi(a^n a^{*m}) = \phi(a^n)\phi(a^{*m}) = \psi(a^n)\psi(a^{*m}) = \psi(a^n a^{*m})$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Όμως η $C^*(1, a)$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{a^n a^{*m} : n, m = 0, 1, 2, \ldots\}$ και οι ϕ και ψ είναι συνεχείς. Έπεται λοιπόν ότι $\phi = \psi$. $\square$

Θεώρημα 20 (Συναρτησιακός Λογισμός)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα, $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό στοιχείο και $S = \sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$. Τότε υπάρχει μοναδικός *-μορφισμός*

$$\Phi : C(S) \to \mathcal{A}$$

με $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\Phi(\iota) = a$ όπου $\iota : S \to S$ η ταυτοτική απεικόνιση $\iota(t) = t$. Ο Φ είναι ισομετρία, και η εικόνα του $\Phi(C(S))$ είναι η C^* άλγεβρα $C(\mathbf{1}, a)$ που παράγεται από το a (άρα αποτελείται από φυσιολογικά στοιχεία).

Αν $f \in C(\sigma(a))$ το στοιχείο $\Phi(f) \in C^*(\mathbf{1}, a)$ γράφεται συνήθως $f(a)$.

Απόδειξη. **(α)** Η συνθήκη $a^*a = aa^*$ είναι αναγκαία για την ύπαρξη του Φ. Πράγματι,

$$a^*a = \Phi(\iota)^*\Phi(\iota) = \Phi(\iota^*\iota) = \Phi(\iota\iota^*) = \Phi(\iota)\Phi(\iota)^* = aa^* .$$

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι η συνθήκη $a^*a = aa^*$ ικανοποιείται. Από το Λήμμα, η απεικόνιση $\hat{a} : \mathfrak{M}(\mathcal{C}) \to \sigma(a)$ είναι ομοιομορφισμός. Είναι εύκολο να ελέγξεις ότι η απεικόνιση

$$\Psi : C(\sigma(a)) \to C(\mathfrak{M}(\mathcal{C})) : f \to f \circ \hat{a}$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός. Αλλά από το Θεώρημα Gelfand - Naimark η απεικόνιση

$$\mathcal{G}^{-1} : C(\mathfrak{M}(\mathcal{C})) \to \mathcal{C} : \hat{y} \to y$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός. Ορίζουμε:

$$\Phi = \mathcal{G}^{-1} \circ \Psi : C(S) \xrightarrow{\Psi} C(\mathfrak{M}(\mathcal{C})) \xrightarrow{\mathcal{G}^{-1}} \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} .$$

Η Φ είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $C(\sigma(a))$ επί της $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$.

Μένει να ελεγχθεί ότι $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και ότι $\Phi(\iota) = a$. Η πρώτη σχέση αληθεύει γιατί $\Psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Η δεύτερη επίσης αληθεύει γιατί $\Psi(\iota) = \hat{a}$ και $\mathcal{G}^{-1}(\hat{a}) = a$.

(γ) *(Μοναδικότητα)* Έστω $\Psi : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ *-μορφισμός με $\Psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\Psi(\iota) = a$. Τότε $\Psi(\iota^*) = a^*$ Εφόσον όμως ο Φ είναι *-μορφισμός, για κάθε $n, m = 0, 1, \dots$ θα έχουμε

$$\Psi(\iota^n \iota^{*m}) = \Psi(\iota)^n \Psi(\iota)^{*m} = a^n a^{*m} = \Phi(\iota)^n \Phi(\iota)^{*m} = \Phi(\iota^n \iota^{*m}) .$$

Επομένως οι Φ και Ψ ταυτίζονται στην γραμμική θήκη του συνόλου $\{\iota^n \iota^{*m} : n, m = 0, 1, \dots\}$. Αλλά η γραμμική αυτή θήκη είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $C(\sigma(a))$ που περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις και χωρίζει τα σημεία του $\sigma(a)$. Επομένως, από το Θεώρημα Stone - Weierstrass, είναι πυκνή στην $C(\sigma(a))$. Επειδή οι $C(\sigma(a))$ και $\mathcal{A}$ είναι C^* άλγεβρες με μονάδα, έπεται από την Πρόταση 16 ότι ο Ψ είναι συνεχής.Αφού οι Φ και Ψ είναι συνεχείς, έπεται ότι θα ταυτίζονται. $\square$

Παρατήρηση Στην ειδική περίπτωση όπου $a = a^*$, υπάρχει και μια πιό στοιχειώδης προσέγγιση, που δεν προϋποθέτει την θεωρία Gelfand.
Δες π.χ. στο `funcalc.pdf`.

Πρόταση 21 (Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$ ισχύει*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Απόδειξη. Ονομάζουμε $\mathcal{C}$ την (μεταθετική) C* άλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$ που παράγεται από το a και την μονάδα. Έχουμε δείξει ότι το φάσμα δεν εξαρτάται από την άλγεβρα, άρα για κάθε $f \in C(\sigma(a))$ έχουμε $\sigma(f(a)) = \sigma_{\mathcal{C}}(f(a))$. Όπως η $\mathcal{C}$ είναι ισομορφική με την άλγεβρα $C(\sigma(a))$ μέσω του συναρτησιακού λογισμού $\Phi : f \to f(a)$ που διατηρεί και την μονάδα. Συνεπώς ένα στοιχείο $\mu\mathbf{1} - f(a) \in \mathcal{C}$ είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{C}$ αν και μόνον αν η συνάρτηση $g := \mu - f$ είναι αντιστρέψιμη στην $C(\sigma(a))$. Αυτό όμως συμβαίνει αν και μόνον αν η $\mu - f$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο πεδίο ορισμού της $\sigma(a)$, δηλ. αν και μόνον αν $\mu \notin f(\sigma(a))$. Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\mu \in \sigma(f(a)) = \sigma_{\mathcal{C}}(f(a)) \iff \mu \in f(\sigma(a)) .$$

$\square$