Η Αναπαράσταση GNS

Θεώρημα 1 (Gelfand, Naimark, Segal)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με ισομετρική ενέλιξη και μονάδα, και $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ θετική γραμμική μορφή (δηλ. $\phi(a^*a) \geqslant 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$). Τότε υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα κυκλικό [1] διάνυσμα ώστε*

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \quad \textit{για κάθε } \ a \in \mathcal{A}.$$

Όπως θα δούμε, η τριάδα GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

Θα χρειασθούν δύο Λήμματα:

Λήμμα 2. *Μια θετική γραμμική μορφή ϕ σε μια άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα και ισομετρική ενέλιξη είναι συνεχής, μάλιστα $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1}_\mathcal{A})$.*

Παρατήρηση Το Λήμμα είναι βέβαια γνωστό όταν η $\mathcal{A}$ είναι C* άλγεβρα.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι $|\phi(a)| \leqslant \phi(\mathbf{1}_\mathcal{A})$ όταν $a \in \mathcal{A}$ με $\|a\| \leqslant 1$. Έστω πρώτα $a = a^*$.

Ισχυρισμός Υπάρχει $y \in \mathcal{A}$ με $y = y^*$ ώστε $y^2 = \mathbf{1} - a$.

Απόδειξη Ισχυρισμού Θεωρούμε την σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n}(-a)^n$ όπου $\binom{1/2}{n} = \frac{1}{n!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)$ ο διωνυμικός συντελεστής. Η σειρά αυτή συγκλίνει (λόγω πληρότητας) αφού $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\binom{1/2}{n}| \, \|-a\|^n < \infty$ (γιατί $\|-a\| \leqslant 1$), οπότε ορίζει ένα στοιχείο $y \in \mathcal{A}$, το οποίο είναι αυτοσυζυγές αφού τα μερικά αθροίσματα της σειράς είναι αυτοσυζυγή (εφόσον οι συντελεστές είναι πραγματικοί και $a = a^*$) και η ενέλιξη έχει υποτεθεί συνεχής. Ελέγχεται όπως στην κλασική περίπτωση ($\mathcal{A} = \mathbb{C}$) ότι $y^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}\right)(-a)^n = 1 - a$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Έπεται από τον ισχυρισμό ότι $\phi(\mathbf{1} - a) = \phi(y^2) = \phi(y^*y) \geqslant 0$, επομένως $\phi(\mathbf{1}) \geqslant \phi(a)$, όπως θέλαμε.

Στη γενική περίπτωση τώρα: αν $b \in \mathcal{A}$ με $\|b\| \leqslant 1$, θέτοντας $a = b^*b$ έχουμε $a = a^*$ και $\|a\| = \|b^*b\| \leqslant \|b^*\| \, \|b\| = \|b\| \, \|b\| \leqslant 1$, οπότε από τα προηγούμενα έπεται ότι $|\phi(a)| \leqslant \phi(\mathbf{1})$, δηλαδή $\phi(b^*b) = |\phi(b^*b)| \leqslant \phi(\mathbf{1})$. Όμως, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$|\phi(b)|^2 = |\phi(\mathbf{1}^*b)| \leqslant \phi(b^*b)\phi(\mathbf{1}^*\mathbf{1}) \leqslant \phi(\mathbf{1})^2.$$

□

Λήμμα 3. *Με τις ίδιες υποθέσεις,*

$$\phi(b^*a^*ab) \leqslant \|a\|^2_\mathcal{A} \, \phi(b^*b) \quad \textit{ για κάθε } \ a, b \in \mathcal{A}\,.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $b \in \mathcal{A}$ και θεωρούμε την γραμμική μορφή

$$\phi_b : \mathcal{A} \to \mathbb{C} : a \to \phi(b^*ab)\,.$$

[1] δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi$ να είναι πυκνό στον H_ϕ.

Επειδή $\phi(b^*a^*ab) = \phi((ab)^*(ab))$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, η ϕ_b είναι θετική. Επομένως, από το προηγούμενο λήμμα έχουμε $\|\phi_b\| = \phi_b(\mathbf{1}) = \phi(b^*\mathbf{1}b)$, άρα, για κάθε $a \in \mathcal{A}$,

$$\phi(b^*a^*ab) = \phi_b(a^*a) \leqslant \|\phi_b\| \, \|a^*a\|_{\mathcal{A}} = \phi(b^*b) \, \|a^*a\|_{\mathcal{A}} \leqslant \phi(b^*b) \, \|a\|_{\mathcal{A}}^2$$

(χρησιμοποιήσαμε ότι $\|a^*a\| \leqslant \|a^*\| \, \|a\| = \|a\| \, \|a\|$). □

Απόδειξη του Θεωρήματος

1. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$.
2. Ορίζουμε $\langle a, b\rangle_0 := \phi(b^*a), a, b \in \mathcal{A}$.
   Το $\langle \cdot, \cdot\rangle_0$ είναι προφανώς sesquilinear μορφή, και αφού η ϕ είναι θετική, ικανοποιεί [2]
   $\langle b, a\rangle_0 = \phi(a^*b) = \overline{\phi(b^*a)} = \overline{\langle a, b\rangle_0}$ και $\langle a, a\rangle_0 := \phi(a^*a) \geqslant 0$ για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$.
   Είναι λοιπόν ημι-εσωτερικό γινόμενο στον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$.

Όταν $\mathcal{A} = C(X)$ όπου X συμπαγής χώρος Hausdorff και $\phi(a) = \int_X a(t)d\mu(t)$ όπου μ κανονικό μέτρο Borel, έχουμε $\langle a, b\rangle_0 = \int_X a(t)\overline{b(t)}d\mu(t)$.

Παρατηρούμε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz για την ϕ γράφεται $|\langle a, b\rangle_0|^2 \leqslant |\langle a, a\rangle_0\langle b, b\rangle_0|$.

3. Θέτουμε
   $$\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{A} \, : \langle u, u\rangle_0 = 0\} \, .$$
   Ισχύει η ισότητα
   $$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{A} \, : \langle u, a\rangle_0 = 0 \text{ για κάθε } a \in \mathcal{A}\} \qquad (*)$$
   και συνεπώς το $\mathcal{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{A}$

Πράγματι, αν $\langle u, a\rangle_0 = 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, τότε βέβαια $\langle u, u\rangle_0 = 0$. Αντίστροφα, αν $\langle u, u\rangle_0 = 0$, τότε λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwarz για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε $|\langle u, a\rangle_0|^2 \leqslant |\langle u, u\rangle_0\langle a, a\rangle_0| = 0$ άρα $\langle u, a\rangle_0 = 0$.

4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \mathcal{A}/\mathcal{N}$. Παρατηρούμε ότι το ημι-εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot\rangle_0$ επάγει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $H_{0\phi}$:
   $$\langle [a], [b]\rangle_\phi := \langle a, b\rangle_0, \quad \text{για κάθε} \quad [a] = a + \mathcal{N}, [b] = b + \mathcal{N} \text{ στον } \mathcal{A}/\mathcal{N} \, .$$
   Ονομάζουμε λοιπόν H_ϕ *την πλήρωση του* $H_{0\phi}$ *ως προς την* $\|[a]\|_\phi := \sqrt{\langle [a], [a]\rangle_\phi}$. Καταχρηστικά χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για το εσωτερικό γινόμενο στον H_ϕ.

Πράγματι, η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη: αν $[a] = [a_1]$ και $[b] = [b_1]$, δηλαδή $a_1 - a = u \in \mathcal{N}$ και $b_1 - b = v \in \mathcal{N}$ τότε

$$\langle [a_1], [b_1]\rangle_\phi = \langle a + u, b + v\rangle_0 = \langle a, b\rangle_0 + \langle u, b\rangle_0 + \langle a + u, v\rangle_0 = \langle a, b\rangle_0$$

από το βήμα (3), εφόσον $u, v \in \mathcal{N}$. Το $\langle \cdot, \cdot\rangle_\phi$ είναι προφανώς ημι-εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. Επιπλέον, αν $\langle [a], [a]\rangle_\phi = 0$ τότε $\langle a, a\rangle_0 = 0$, δηλαδή $a \in \mathcal{N}$ άρα $[a] = [0]$. Συνεπώς το $\langle \cdot, \cdot\rangle_\phi$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ και άρα η επαγόμενη $\|[u]\|_\phi := \sqrt{\langle [u], [u]\rangle_\phi}$ είναι νόρμα στον $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

[2] αυτό έπεται από την ταυτότητα πολικότητας (polarisation) $4\phi(a^*b) = \hat{\phi}(a+b) - \hat{\phi}(a-b) + i\hat{\phi}(a+ib) - i\hat{\phi}(a-ib)$ όπου $\hat{\phi}(a) = \phi(a^*a) \geqslant 0$, άρα $4\overline{\phi(a^*b)} = \hat{\phi}(a+b) - \hat{\phi}(a-b) - i\hat{\phi}(a+ib) + i\hat{\phi}(a-ib)$.

Όταν $\mathcal{A} = C(X)$ όπως πριν, τότε ο H_ϕ δεν είναι άλλος από τον $L^2(\mu)$.

Θα ορίσουμε τώρα δράση της $\mathcal{A}$ στον H_ϕ.

5. Η $\mathcal{A}$ δρα στον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$ με την λεγόμενη κανονική αριστερή αναπαράσταση π_0 που ορίζεται ως εξής: για κάθε $a \in \mathcal{A}$, η απεικόνιση $\pi_0(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ είναι η $\pi_0(a)(b) = ab, b \in \mathcal{A}$.

6. Αν $a \in \mathcal{A}$, η απεικόνιση
$$\pi_1(a) : H_{0\phi} \to H_{0\phi} : [b] \to [ab]$$
είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$, διότι $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ (δηλαδή το $\mathcal{N}$ είναι αριστερό ιδεώδες της $\mathcal{A}$).

Πράγματι, για κάθε $u \in \mathcal{N}$, έχουμε $\pi_0(a)(u) = au \in \mathcal{N}$ διότι για κάθε $b \in \mathcal{A}$ έχουμε $\langle au, b\rangle_0 = \phi(b^*au) = \phi((a^*b)^*u) = \langle u, a^*b\rangle_0 = 0$ από τη σχέση $(*)$ στο βήμα (3), οπότε $au \in \mathcal{N}$.

Επομένως αν $[b] = [b_1]$, δηλαδή $b_1 - b = u \in \mathcal{N}$, έχουμε $ab_1 - ab = au \in \mathcal{N}$, άρα $[ab] = [ab_1]$.

7. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και κάθε $[b] \in H_{0\phi}$ έχουμε
$$\|\pi_1(a)([b])\|_\phi \leqslant \|a\| \, \|[b]\|_\phi \, .$$
από το Λήμμα 3, διότι $\|\pi_1(a)([b])\|_\phi^2 = \|[ab]\|_\phi^2 = \phi(b^*a^*ab)) \leqslant \phi(b^*b) \, \|a\|_{\mathcal{A}}^2 = \|[b]\|_\phi^2 \, \|a\|_{\mathcal{A}}^2$.
(Η ανισότητα αυτή αντιστοιχεί στην $\|ab\|_2 \leqslant \|a\|_\infty \|b\|_2$ όταν $a, b \in C(X)$.)
Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.

8. Είναι τώρα εύκολο να δείξει κανείς ότι η απεικόνιση
$$\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\phi)$$
είναι *-αναπαράσταση.

[Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, τότε $\pi_\phi(a) = M_a$, δηλαδή $(\pi_\phi(a)b)(t) = b(t)u(t)$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$.]

Απόδειξη Αν $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, για να δείξουμε ότι $\pi_\phi(a_1 + \lambda a_2) = \pi_\phi(a_1) + \lambda\pi_\phi(a_2)$ και ότι $\pi_\phi(a_1a_2) = \pi_\phi(a_1)\pi_\phi(a_2)$, επειδή είναι ισότητες *φραγμένων* τελεστών, αρκεί να τις ελέγξουμε σε κάθε σημείο $[b]$ του πυκνού υποχώρου $H_{0\phi}$. Από τον ορισμό των πράξεων στον χώρο πηλίκο $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$, έχουμε $[a_1b + \lambda a_2b] = [a_1b] + \lambda[a_2b]$ και συνεπώς
$$\begin{aligned}\pi_\phi(a_1 + \lambda a_2)[b] &= \pi_1(a_1 + \lambda a_2)[b] = [(a_1 + \lambda a_2)b] = [a_1b] + \lambda[a_2b] \\ &= \pi_\phi(a_1)[b] + \lambda\pi_\phi(a_2)[b] = (\pi_\phi(a_1) + \lambda\pi_\phi(a_2))[b] \, .\end{aligned}$$

Επίσης
$$\begin{aligned}\pi_\phi(a_1a_2)[b] &= \pi_1(a_1a_2)[b] = [(a_1a_2)b] = [a_1(a_2b)] \\ &= \pi_\phi(a_1)[a_2b] = \pi_\phi(a_1)(\pi_\phi(a_2)[b]) = (\pi_\phi(a_1)\pi_\phi(a_2))[b] \, .\end{aligned}$$

Τέλος, αν $a \in \mathcal{A}$ και $[b], [c] \in H_{0\phi}$,
$$\begin{aligned}\langle\pi_\phi(a)^*[b], [c]\rangle_\phi &= \langle[b], \pi_\phi(a)[c]\rangle_\phi = \langle[b], [ac]\rangle_\phi \\ &= \phi((ac)^*b) = \phi(c^*a^*b) = \langle[a^*b], [c]\rangle_\phi = \langle\pi_\phi(a^*)[b], [c]\rangle_\phi\end{aligned}$$
και συνεπώς $\pi_\phi(a)^* = \pi_\phi(a^*)$.

9. Θέτουμε $\xi_\phi = [\mathbf{1}_{\mathcal{A}}]$. Το ξ_ϕ είναι κυκλικό διάνυσμα για την π_ϕ γιατί

$$\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi = \{\pi_\phi(a)[\mathbf{1}] : a \in \mathcal{A}\} = \{[a] : a \in \mathcal{A}\} = H_{0\phi}$$

που είναι πυκνός υπόχωρος του H_ϕ. Τέλος, για κάθε $a \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi\rangle_\phi &= \langle \pi_\phi(a)[\mathbf{1}], [\mathbf{1}]\rangle_\phi \\ &= \langle a, \mathbf{1}\rangle_\phi = \phi(\mathbf{1}^* a) = \phi(a)\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Πρόταση 4 (“Μοναδικότητα”)**.** *Έστω (π, H, ξ) και (π', H, ξ') *-αναπαραστάσεις μιας *-άλγεβρας $\mathcal{A}$, όπου ξ κυκλικό διάνυσμα για την (π, H) (δηλαδή $\{\pi(a)\xi : a \in \mathcal{A}\}$ πυκνός στον H) και ξ' κυκλικό για την (π', H'). Αν $\phi_\xi = \phi_{\xi'}$, δηλαδή*

$$\langle \pi(a)\xi, \xi\rangle_H = \langle \pi'(a)\xi', \xi'\rangle_{H'} \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}\,,$$

τότε οι αναπαραστάσεις είναι unitarily ισοδύναμες, δηλ. υπάρχει $U : H \to H'$ unitary ώστε $U\xi = \xi'$ και για κάθε $a \in \mathcal{A}$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, tail, two heads, "U"] \arrow[d, "\pi(a)"'] & H' \arrow[d, "\pi'(a)"] \\ H \arrow[r, tail, two heads, "U"'] & H' \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό: $U\pi(a) = \pi'(a)U$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$U_0 : \mathcal{A}\xi \to \mathcal{A}\xi' : \pi(a)\xi \to \pi'(a)\xi',\ a \in \mathcal{A}\,.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\xi\|_H^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi\rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi\rangle = \langle \pi'(a^*a)\xi', \xi'\rangle = \\ &= \langle \pi'(a)\xi, \pi'(a)\xi\rangle = \left\|\pi'(a)\xi\right\|_{H'}^2\,.\end{aligned}$$

Επομένως η U_0 είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (αν $\pi(a)\xi = \pi(b)\xi$ τότε $\pi(a-b)\xi = 0$ άρα $\pi'(a-b)\xi' = 0$ άρα $\pi'(a)\xi' = \pi'(b)\xi'$), προφανώς γραμμική και ισομετρική. Επεκτείνεται λοιπόν σε μια γραμμική ισομετρία U από την κλειστή θήκη H του $(\mathcal{A}\xi, \|\cdot\|_H)$ στην κλειστή θήκη H' του $(\mathcal{A}\xi', \|\cdot\|_{H'})$. Το σύνολο τιμών της περιέχει τον πυκνό υπόχωρο $\mathcal{A}\xi'$ του H' και επομένως η U είναι επί του H'. Επομένως ο U είναι αντιστρέψιμος και $U^{-1} = U^*$.

Για να δείξουμε ότι $\pi'(a)U = U\pi(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, αρκεί να ελέγξουμε την ισότητα στον πυκνό υπόχωρο $\mathcal{A}\xi$. Έστω λοιπόν $x = \pi(b)\xi \in \mathcal{A}\xi$. Τότε

$$\pi'(a)U(x) = \pi'(a)U(\pi(b)\xi) = \pi'(a)(\pi'(b)\xi') = \pi'(ab)\xi' = U(\pi(ab)\xi) = U\pi(a)(\pi_(b)\xi) = U\pi(a)(x)\,.$$

Αφού οι *φραγμένοι τελεστές* $\pi'(a)U$ και $U\pi(a)$ ταυτίζονται στο πυκνό υποσύνολο $\mathcal{A}\xi$, είναι ίσοι.

Τέλος, δείχνουμε ότι $U\xi = \xi'$: [3]

Αφού ο U είναι unitary, διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα: $\langle Ux, Uy\rangle_{H'} = \langle x, y\rangle_H$ για κάθε $x, y \in H$ και ειδικότερα $\langle U\pi(a)\xi, U\xi\rangle_{H'} = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle_H$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Όμως $\langle \pi(a)\xi, \xi\rangle_H = \langle \pi'(a)\xi', \xi'\rangle_{H'}$ από την υπόθεση, και συνεπώς $\langle U\pi(a)\xi, U\xi\rangle_{H'} = \langle \pi'(a)\xi', \xi'\rangle_{H'}$. Αλλά $U\pi(a)\xi = \pi'(a)\xi'$ (ορισμός του U) , άρα $\langle \pi'(a)\xi', U\xi\rangle_{H'} = \langle \pi'(a)\xi', \xi'\rangle_{H'}$, δηλαδή $\langle \pi'(a)\xi', U\xi - \xi'\rangle_{H'} = 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Δηλαδή το διάνυσμα $U\xi - \xi'$ είναι κάθετο στον πυκνό υπόχωρο $\mathcal{A}\xi'$ του H', επομένως είναι 0. $\square$

[3]Όταν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, η ισότητα αυτή είναι προφανής απ' τον ορισμό του U