Ασκήσεις 3 (ΚΠΓΜ)

Ασκ. 1 : Θεωρούμε το εξής μοντέλο παλινδρόμησης :

$$Y_i = b_1 + b_2 X_{i,2} + b_3 X_{i,3} + b_4 X_{i,4} + \varepsilon_i \ , \ 1 \le i \le n,$$

όπου $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^t \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$.

Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι τα εξής :

$$X^t X = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 15 & 4 \\ 0 & 15 & 30 & 10 \\ 0 & 4 & 10 & 40 \end{bmatrix}, \quad X^t Y = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \\ 80 \end{bmatrix}, \quad Y^t Y = 640.$$

Ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 4 \\ 15 & 30 & 10 \\ 4 & 10 & 40 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{13720} \begin{bmatrix} 1100 & -560 & 30 \\ -560 & 784 & -140 \\ 30 & -140 & 375 \end{bmatrix}$$

α) Υπολογίστε την εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων $\hat{b}$ του b, το άθροισμα $\sum_{i=1}^{50} \hat{\varepsilon}_i^2$ και δώστε την $\hat{\sigma}^2$ του σ^2.

β) Δώστε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το b_2, επιπέδου 95 %. Κάντε το ίδιο και για το σ^2 (δείτε τα ποσοστημόρια μέσα από πίνακες).

γ) Κάντε έναν καθολικό έλεγχο Fisher του μοντέλου με $b_2 = b_3 = b_4 = 0$ σε επίπεδο 5 %.

δ) Υποθέτουμε ότι $X_{51,2} = 1$, $X_{51,3} = -1$ και $X_{51,4} = 0.5$. Δώστε ένα 95% διάστημα πρόβλεψης για την παρατήρηση Y_{51}.

Ασκ. 2 : Θέλουμε να ελέγξουμε τη μηδενικότητα μιας παραμέτρου. Αποδείξτε την ισοδυναμία μεταξύ του ελέγχου Student και του ελέγχου Fisher.

Ασκ. 3 : Θέλουμε να εξηγήσουμε τη συγκέντρωση του όζοντος ως συνάρτηση των μεταβλητών T9, T12, Ne9, Ne12 και Vx.
Τα εξαγόμενα της παλινδρόμησης από την R είναι τα εξής:

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(>|t|)
(Intercept)	62	10	$\boxed{1}$	0
T9	−4	$\boxed{2}$	−5	0
T12	5	0.75	$\boxed{3}$	0
Ne9	−1.5	1	$\boxed{4}$	0.13
Ne12	−0.5	0.5	$\boxed{5}$	0.32
Vx	0.8	0.15	5.3	0

Multiple R-Squared: 0.6233, Adjusted R-Squared: 0.6081

Residual standard error: 16 on 124 degrees of freedom

F-statistic: $\boxed{6}$ on $\boxed{7}$ and $\boxed{8}$ DF, p-value: 0.

α) Συμπληρώστε προσεγγιστικά τα τετράγωνα $\boxed{i}$, για $1 \le i \le 8$.

β) Υπενθυμίστε το στατιστικό του ελέγχου και ελέγξτε τη μηδενικότητα όλων των παραμέτρων, εκτός από τη σταθερά, για $a = 0.05$.

γ) Υπενθυμίστε το στατιστικό του ελέγχου και ελέγξτε τη μηδενικότητα καθε μιας από τις παραμέτρους ξεχωριστά σε κατώφλι του 5%.

δ) Οι μεταβλητές Ne9 και Ne12 δεν μοιάζουν να επηρεάζουν τη συγκέντρωση του όζοντος και θέλουμε να ελέγξουμε την ταυτόχρονη μηδενικότητα των b_{Ne9} και b_{Ne12}. Προτείνετε έναν έλεγχο που επιτρέπει να το κάνουμε αυτό και κάντε τον έλεγχο με την βοήθεια των παρακάτω αποτελεσμάτων

Coefficients :

	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(>|t|)
(Intercept)	66	11	6	0
T9	−5	1	−5	0
T12	6	0.75	8	0
Vx	1	0.2	5	0
...				

Multiple R-Squared : 0.5312   Adjusted R-squared : 0.52

Residual standard error : 16.5 on 126 degrees of freedom

Ασκ. 4 : (Μοντέλο του Cobb-Douglas)

Διαθέτουμε για n-επιχειρήσεις την αξία του κεφαλαίου K_i, της εργασίας L_i και της προστιθέμενης αξίας V_i. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής αυτών των επιχειρήσεων είναι τύπου Cobb-Douglas, δηλ.

$$V_i = \lambda L_i^{b} K_i^{\gamma}$$

α) κάνοντας μετασχηματισμό στα δεδομένα προτείνετε ένα κατάλληλο κανονικό πολλαπλό γραμμικό μοντέλο για να εξηγήσετε την V_i ως συνάρτηση των άλλων μεταβλητών.

β) Γράψτε το μετασχηματισμένο μοντέλο με τη βοήθεια πινάκων στη μορφή $Y = Xb + \varepsilon$, καθορίζοντας με ακρίβεια τα Y, X και b. Δώστε τον πίνακα συνδιακύμανσης του $\hat{b}$, και μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2. Μπορείτε να βρείτε και μία αμερόληπτη εκτιμήτρια $\widehat{Cov}(\hat{b})$ του πίνακα συνδιακύμανσης $Cov(\hat{b})$?

γ) Για 1658 επιχειρήσεις, πήραμε τα εξής αποτελέσματα

$$\begin{cases} Y_i = 3.136 + 0.738\, X_{i,2} + 0.282\, X_{i,3} \\ R^2 = 0.945 \\ SSE = 148.27 \end{cases}$$

Δίνεται επίσης ότι

$$(X^t X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0288 & 0.0012 & -0.0034 \\ 0.0012 & 0.0016 & -0.0010 \\ -0.0034 & -0.0010 & 0.0009 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε την $\hat{\sigma}^2$ και μία εκτίμηση του $Cov(\hat{b})$.

δ) Δώστε ένα 95 % διάστημα εμπιστοσύνης για το b και για το γ.

ε) Ελέγξτε σε ε.σ. $\alpha = 0.05$, την H_0 : "$\gamma = 0$" vs H_1 : "$\gamma > 0$"

Ασκ. 5

Έχουμε το ΚΠΓΜ $Y = Xb + \varepsilon$. Υποθέτουμε ότι πήραμε τα εξής αποτελέσματα :

$$\hat{y} = \underset{(2.67)}{6.683} + \underset{(2.32)}{0.44}\, X_1 + \underset{(2.47)}{0.425\, X_2} + \underset{(2.09)}{0.171 X_3} + \underset{(2.24)}{0.009 X_4}$$

$R^2 = 0.54$, όπου απο κάτω απο κάθε συντελεστή, ο αριθμός που είναι σε παρένθεση δείχνει την απόλυτη τιμή του στατιστικού του αντίστοιχου ελέγχου.

α) ελέγξτε τη μηδενικότητα του b_1 σε ε.σ. $\alpha = 0.05$.

β) Μπορείτε να ελέγξετε την H_0 : "$b_3 = 1$" vs H_1 : "$b_3 \neq 1$".

γ) Ελέγξτε την ταυτόχρονη μηδενικότητα των παραμέτρων που αντιστοιχούν στις μεταβλητές X_1, X_2, X_3, X_4 σε ε.σ. $\alpha = 0.05$.

Ασκ. 6.

Αποδείξτε ότι τα εξωτερικά τυποποιημένα κατάλοιπα

$$t_i^* = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma}_{(-i)}\sqrt{1-p_{ii}}} \sim t_{n-p-1}.$$