Να λυθεί η διαφορική εξίσωση : $\underbrace{ye^{xy}}_{M(x,y)}dx + (\underbrace{3 + xe^{xy}}_{N(x,y)})dy = 0$ (1)

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy}$ (2)

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3 + xe^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy}$ (3)

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Από θεώρημα η (1) είναι ακριβής, δηλαδή υπάρχει $F(x,y)=c$.

$\frac{\partial F}{\partial x} = M = ye^{xy}$ (4) και $\frac{\partial F}{\partial y} = N = 3 + xe^{xy}$ (5)

Ολοκληρώνω την (4) ως προς x: $F(x,y) = e^{xy} + h(y)$ (6).

Παραγωγίζω την (6) ως προς y και τη συγκρίνω με την (5): $h'(y) + xe^{xy} = 3 + xe^{xy} \Rightarrow h'(y) = 3 \Rightarrow h(y) = 3y + c_1$ (7)

(6), (7) : $F(x,y) = e^{xy} + 3y + c_1$ (8) $\Rightarrow e^{xy} + 3y + c_1 = c_2$ (8)

Άρα : $F(x,y) = e^{xy} + 3y = c, \ c = c_2 - c_1$.
(9)

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (9).

2) $ty' + 6y = 3ty^{4/3} \Rightarrow y' + \frac{6}{t}y = 3y^{4/3}$ (1)

Η (1) είναι Bernoulli με $r = 4/3$, $p(t) = \frac{6}{t}$ και $q(t) = 3$.

Επειδή $r = \frac{4}{3} > 0$, η $y(t) = 0$ είναι λύση της (1).

Για $y(t) \neq 0$: Θέτουμε $u = y^{1-r} = y^{1-4/3} \Rightarrow u = y^{-1/3}$ (2).

Τότε $u' = -\frac{1}{3}y' \cdot y^{-4/3}$ (3).

Πολλαπλασιάζω την (1) με την παράσταση $-\frac{y^{-4/3}}{3}$:

$\frac{-y^{-4/3}}{3}y' - \frac{6}{t}y^{-4/3}\frac{y}{3} = 3y^{4/3}\left(-\frac{y^{-4/3}}{3}\right) \Rightarrow -\frac{y'y^{-4/3}}{3} - \frac{2}{t}y^{-1/3} = -1 \Rightarrow$

$u' - \frac{2u}{t} = -1$ (4) (γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με $p(t) = \frac{-2}{t}$, $q(t) = -1$)

Έχουμε: $\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -2/t\, dt} = e^{-2\ln t} = t^{-2} \Rightarrow \mu(t) = t^{-2}$ (5) (ένας ολοκληρωτικός παράγοντας)

(4),(5): $u't^{-2} - \frac{2u}{t}t^{-2} = -t^{-2} \Rightarrow (ut^{-2})' = -t^{-2} \Rightarrow$

$ut^{-2} = -\int t^{-2}dt + c \Rightarrow ut^{-2} = \int \frac{-1}{t^2} + c \Rightarrow ut^{-2} = \frac{1}{t} + c \Rightarrow$

$u = t^2\left(\frac{1}{t} + c\right) \Rightarrow u = t + ct^2$ (6)

Από τη (2): $u = y^{-1/3} \Rightarrow u = \frac{1}{y^{1/3}} \Rightarrow ct^2 + t = \frac{1}{y^{1/3}} \Rightarrow$

$y^{1/3} = \frac{1}{ct^2+t} \Rightarrow$

$y = \sqrt[3]{\frac{1}{ct^2+t}}$

Άρα, η γενική λύση της (1) είναι η $y(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{ct^2+t}}$.

3) $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2$

$y' + 2ty = y^2 + (t^2 + 1) \quad (1)$

Η (1) είναι διαφ.εξ. Riccati με $p(t) = 2t$, $q(t) = 1$ και $f(t) = t^2 + 1$.

Έστω $y_1(t)$ μία λύση της (1). Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό:

$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad (2)$

$y' = y_1' - \frac{1}{u^2} \quad (3)$ και $y^2 = y_1^2 + \frac{2y_1}{u} + \frac{1}{u^2} \quad (4)$

Από (1), (2), (3), (4): $y_1' - \frac{u'}{u^2} + p(t)y_1 + \frac{p(t)}{u} = q(t)y_1^2 + \frac{2q(t)y_1}{u} + \frac{q(t)}{u^2} + f(t) \Rightarrow$

$\frac{-u'}{u^2} + \frac{p(t)}{u} = 2q(t)\frac{y_1}{u} + \frac{q(t)}{u^2} \xrightarrow{(\cdot u^2)} -u' + p(t) = 2q(t)y_1 u + q(t) \Rightarrow$

$-u' + u(p(t) - 2q(t)y_1) = q(t) \Rightarrow u' + (2q(t)y_1 - p(t)) = -q(t) \Rightarrow$

$u' + (2y_1 - 2t)u = -1 \quad (5)$

$\mu(t) = e^{2\int (y_1 - t)dt} \quad (6)$

$(5), (6) \Rightarrow \left(u e^{2\int (y_1 - t)dt}\right)' = -e^{2\int (y_1 - t)dt} \Rightarrow$

$u \cdot e^{2\int (y_1 - t)dt} = \int -e^{2\int (y_1 - t)dt} + c \Rightarrow$

$u = e^{-2\int (y_1 - t)dt} \cdot \int -e^{2\int (y_1 - t)dt} + ce^{-2\int (y_1 - t)dt}$

Από (2), η γενική λύση της (1) είναι η

$$y(t) = y_1 + \frac{1}{e^{-2\int (y_1 - t)dt} \cdot \int -e^{2\int (y_1 - t)dt} + ce^{-2\int (y_1 - t)dt}}$$

4) $ty'-y=t^2$, $t>0$

$y'-\frac{y}{t}=t$ (1)

Η (1) είναι της μορφής $y'+p(t)y=q(t)$, με $p(t)=\frac{-1}{t}$ και $q(t)=t$.

Επειδή $q(t)=t\neq 0$ ($q(t)>0$), για την επίλυσή της θα κάνουμε χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα $\mu(t)\neq 0$. Ειδικότερα, έχουμε:

$\mu(t)=ce^{\int p(t)dt}$, $c\in\mathbb{R}$. Παίρνουμε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα. Για $c=1$ προκύπτει:

$\mu(t)=e^{\int p(t)dt}=e^{\int -1/t\,dt}=e^{-\ln|t|}=e^{-\ln t}=t^{-1}=\frac{1}{t} \Rightarrow \mu(t)=\frac{1}{t}$ (2)

Πολλαπλασιάζω τις σχέσεις (1) και (2):

$y'\cdot\frac{1}{t}-\frac{y}{t^2}=t\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow y'\frac{1}{t}+y\left(\frac{1}{t}\right)'=1 \Rightarrow \left(y\cdot\frac{1}{t}\right)'=1 \Rightarrow \left(y\frac{1}{t}\right)'=1 \Rightarrow$

$y\frac{1}{t}=t+c \Rightarrow y=t^2+ct$, όπου $t>0$ και $c\in\mathbb{R}$.

Άρα, η γενική λύση της (1) είναι η $y(t)=t^2+ct$, $c\in\mathbb{R}$ και $t>0$.

1) i) $\begin{pmatrix} y'=y^2 \\ y(0)=1 \end{pmatrix}$ Π.Α.Τ. (έχει μοναδική λύση)

Πιθανές λύσεις: • $y(t)=0$ (απορρίπτεται γιατί $y(0)=1$)

• Για $y(t)\neq 0$: $\frac{dy}{dt}=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=dt \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2}=\int dt+c_1 \Rightarrow -\frac{1}{y}=t+c_1 \Rightarrow$

$y(t)=-\frac{1}{t+c_1}$, $t\neq c_1$.

Για $y(0)=1$ έχουμε: $1=-\frac{1}{c_1} \Rightarrow c_1=-1$

Άρα, η μοναδική λύση είναι η $y(t)=\frac{-1}{t-1}$, $t\neq 1$.

ii) $\begin{pmatrix} y'=y^2 \\ y(1)=0 \end{pmatrix}$ Π.Α.Τ. (έχει μοναδική λύση)

Πιθανές λύσεις: • $y(t)=\frac{-1}{t+c_1}$ (όπως αποδείχθηκε στο προηγούμενο ερώτημα)

Η $y(t)$ απορρίπτεται γιατί $y(1)=0$.

• $y(t)=0$

Η λύση αυτή είναι αποδεκτή, αφού $y(1)=0$.

Άρα, η μοναδική λύση είναι η $y(t)=0$.

iii) $\begin{pmatrix} y' = -y^2 \\ y(1) = \alpha \end{pmatrix}$ Π.Α.Τ.

Πιθανές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης : • $y(t)=0$

• Για $y(t) \neq 0$: $\frac{dy}{dt} = -y^2 \Rightarrow \frac{dy}{-y^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dy}{-y^2} = \int dt + c_1 \Rightarrow \frac{1}{y} = t + c_1 \Rightarrow$

$y(t) = \frac{1}{t+c}$, $t \neq -c$

Αν $\alpha=0$ η $y(t)=0$ είναι η μοναδική λύση.

Αν $\alpha \neq 0$: $y(1)=\alpha \Rightarrow \frac{1}{1+c} = \alpha \Rightarrow \alpha(1+c)=1 \Rightarrow 1+c=\frac{1}{\alpha} \Rightarrow c=\frac{1}{\alpha}-1 \Rightarrow c=\frac{1-\alpha}{\alpha}$

Άρα η μοναδική λύση είναι η $y(t) = \frac{1}{t+\frac{1-\alpha}{\alpha}}$.

iv) $\begin{pmatrix} y' = t^2(y-1) \quad (1) \\ y(0) = 2 \end{pmatrix}$ $y' = yt^2 - t^2 \Rightarrow y' - t^2 y = -t^2$

Είναι της μορφής : $y' + p(t)y = q(t)$, με $p(t) = -t^2$ και $q(t) = -t^2$

$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -t^2 dt} = e^{-t^3/3} \Rightarrow \mu(t) = e^{-t^3/3}$ (2)

Πολλαπλασιάζω την (1) με τη (2) : $y'(e^{-t^3/3}) - t^2 e^{-t^3/3} y = -t^2 \cdot e^{-t^3/3} \Rightarrow$

$(ye^{-t^3/3})' = -t^2 e^{-t^3/3} \Rightarrow \int (ye^{-t^3/3})' = \int -t^2 e^{-t^3/3} + c_1 \Rightarrow$

$ye^{-t^3/3} = e^{-t^3/3} + c_1 \Rightarrow$

$y = 1 + c_1 e^{-t^3/3}$

$y(0)=2 \Rightarrow 2 = 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1$

Άρα, η μοναδική λύση είναι η $y(t) = 1 + e^{-t^3/3}$.