Εργασία 1

Ιωάννης Τσόγκας
201600190

1. i) $y' = y^2$
$y(0) = 1$

→ • Αν $y(t) \neq 0$ τότε: $\frac{dy}{dt} = y^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2}\,dy = dt \Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int dt + c \Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c \Rightarrow$
$y = -\frac{1}{t+c}$, $t \neq -c$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη, για $t=0$ έχουμε: $c = -1$. Άρα: $\boxed{y = -\frac{1}{t-1},\ t \neq 1}$

• Αν $y(t) \equiv 0$ ιδιάζουσα λύση της δ.ε.

ii) $y' = y^2$
$y(1) = 0$

→ • Από πριν έχουμε $y = -\frac{1}{t+c}$ για $y(t) \neq 0$.

• Παρατηρούμε πως για $t=1$ καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως $y(t) \equiv 0$ κ' $y(1) = 0$ ιδιάζουσα λύση της δ.ε.

iii) $y' = -y^2$
$y(1) = a$

→ • Αν $y(t) \neq 0$ κ' $a \neq 0$: $\frac{dy}{dt} = -y^2 \Rightarrow -\frac{1}{y^2}\,dy = dt \Rightarrow -\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int dt + c \Rightarrow \frac{1}{y} = t + c \Rightarrow$

$y = \frac{1}{t+c}$, $t \neq -c$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη, για $t=1$: $a = \frac{1}{1+c} \Rightarrow a + ac = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{a} - 1$

Επομένως: $\boxed{y = \frac{1}{t + \frac{1}{a} - 1}}$ • Αν $y(t) \equiv 0$ ιδιάζουσα λύση της δ.ε

Αν $a = 0 \Rightarrow y(1) = 0$ ιδιάζουσα λύση της δ.ε

iv) $y' = t^2(y-1)$
$y(0)=2$

→ · Αν $y(t)=1$, λύση της εξίσωσης

· Αν $y(t)\neq 1$, τότε: $\frac{1}{y-1}dy = t^2 dt \Rightarrow \int \frac{1}{y-1}dy = \int t^2 dt \Rightarrow \ln(y-1) = \frac{t^3}{3} + c_1 \Rightarrow$

$y = e^{t^3/3 + c_1} + 1$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη, για $t=0$ έχουμε: $c_1=0$. Άρα: $\boxed{y = e^{t^3/3} + 1}$

v) $y'+y = \int_0^2 y(t)\,dt$
$y(0)=1$

→ Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός, συνεπώς η ① είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξης
Έστω $M = \int_0^2 y(t)dt$
Πολλαπλασιάζω την ① με τον παράγοντα $\mu(t) = e^{\int dt} = e^t$

$\Rightarrow (y\cdot e^t)' = Me^t \Rightarrow y\cdot e^t = \int Me^t dt \Rightarrow ye^t = M\int e^t dt = Me^t + c \Rightarrow$

$\Rightarrow y = M + e^{-t}c$. Από την αρχική συνθήκη: $1 = M+c \Rightarrow c = 1-M$

Τελικά: $\boxed{y(t) = M + e^{-t}(1-M)}$

vi) $y' + \frac{1}{t}y = 0$, $t>0$, $y(1)=2$

→ $y' + \frac{1}{t}y = 0$, γραμμική $1^{ης}$ τάξης. Πολλαπλασιάζω με τον παράγοντα, $\mu(t)=t$ και έχουμε: $(t\cdot y)' = 0 \Rightarrow t\cdot y = c \Rightarrow y = \frac{c}{t}$

Από την αρχική συνθήκη έχουμε $c=2$. Άρα $\boxed{y = \frac{2}{t},\ t>0}$

2. Να βρεθεί η γενική λύση της δ.εξ: $ty' + 6y = 3ty^{4/3}$ (1)

→ Η εξίσωση είναι τύπου Bernoulli με $r = 4/3$

• Αν $y(t)=0$, λύση της εξίσωσης

• Αν $y(t)\neq 0$, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό: $u = y^{1-r} = y^{-1/3}$ (2)

$$u' = -\frac{1}{3} y^{-4/3} y' \quad (3)$$

Έτσι από (1), (2), (3): $(-3u'u^{-4})t + 6u^{-3} = 3tu^{-4} \Rightarrow -3u' + \frac{6}{t}u = 3 \Rightarrow u' - \frac{2}{t}u = -1$ (4)
γραμμική 1ης τάξης.

Πολλ/ζω την (4) με τον παράγοντα $\mu(t) = e^{\int -\frac{2}{t}dt} = t^{-2}$ (5)

$$\overset{(5)(4)}{\Rightarrow} (ut^{-2})' = -t^{-2} \Rightarrow ut^{-2} = -\int t^{-2}dt + c \Rightarrow u\cdot t^{-2} = \frac{1}{t} + c \Rightarrow u = t + t^2 c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{-1/3} = t(1+tc) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{(t(1+tc))^3}}$$

3. Να βρεθεί η γενική λύση της δ.εξ: $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2$ (1) $\Rightarrow y' + 2ty = y^2 + 1 + t^2$

→ Η εξίσωση είναι τύπου Ricatti, με προφανή λύση $y_1(t) = t$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό: $y = t + \frac{1}{u}$ (2)

$$y' = 1 - \frac{u'}{u^2} \quad (3)$$

$$y^2 = t^2 + \frac{2t}{u} + \frac{1}{u^2} \quad (4)$$

Από (1), (2), (3), (4): $1 - \frac{u'}{u^2} + 2t^2 + \frac{2t}{u} = t^2 + \frac{2t}{u} + \frac{1}{u^2} + 1 + t^2 \Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u^2} \Rightarrow u' = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u' = -t + c \Rightarrow \frac{1}{y-t} = -t + c \Rightarrow y - t = \frac{1}{-t+c} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{-t+c} + t}$$

4. Να λυθεί η Δ.Ε.: $ty' - y = t^2, \ t>0$

→ $y' - \frac{1}{t}y = t$ (1).

Η εξίσωση είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξης. Πολλ/ζω την (1) με τον παράγοντα

$$\mu(t) = e^{-\int \frac{1}{t}dt} = t^{-1}$$

Άρα: $\left(\frac{1}{t}y\right)' = 1 \Rightarrow \frac{1}{t}y = t + c \Rightarrow \boxed{y = t^2 + tc, \ t>0}$