* Μέθοδος απροσδ. συντ. σε δ.εξ. 2ης τάξης

Άσκηση: Να λυθούν οι δ.εξ.:

i) $y'' - 4y' + 3y = 2e^{t} + 2\sin t + e^{2t}\cos t$

ii) $y''' + y'' = 3e^{t} + 4t^{2}$

Λύση:

i) χαρ.εξ.: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 3$

$y_{ομ}(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{3t}$

* Για τα A, B, Γ αντικαθιστούμε στην αρχική

Ισχύει η Αρχή της Υπέρθεσης

$y'' - 4y' + 3y = 2e^{t} \longrightarrow y_{ειδ_1}(t) = A \cdot t \cdot e^{t}$

$y'' - 4y' + 3y = 2\sin t \longrightarrow y_{ειδ_2}(t) = B\cos t + \Gamma \sin t$

$y'' - 4y' + 3y = e^{2t}\cos t \longrightarrow y_{ειδ_3}(t) = e^{2t}(\Delta\cos t + E\sin t)$

$y_{ειδ}(t) = y_{ειδ_1}(t) + y_{ειδ_2}(t) + y_{ειδ_3}(t)$

$y(t) = y_{ομ}(t) + y_{ειδ}(t)$

ii) χαρ.εξ.: $\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ (διπλή) , $\lambda_2 = -1$

$y_{ομ}(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}$

Ισχύει η Αρχή της Υπέρθεσης

$y''' + y'' = 3e^{t} \longrightarrow y_{ειδ_1}(t) = Ae^{t}$

$y''' + y'' = 4t^{2} \longrightarrow y_{ειδ_2}(t) = t^{2}(A_0 + A_1 t + A_2 t^{2})$

$y_{ειδ}(t) = y_{ειδ_1}(t) + y_{ειδ_2}(t)$

Άσκηση: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{-t} + t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση:

χαρ.εξ.: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \;,\; \lambda_2 = -2$

$y_{o\mu}(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{-2t}$

* ΠΡΟΣΟΧΗ! Πάντα βρίσκουμε γενική λύση & μετά αντικαθιστούμε τις αρχικές συνθήκες. ΔΕΝ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΟΥΜΕ ΣΤΗΝ $y_{o\mu}$!!!

Ισχύει η Αρχή της Υπέρθεσης

(1) $y'' + 3y' + 2y = e^{-t} \longrightarrow y_{\varepsilon\iota\delta_1}(t) = A \cdot t \cdot e^{-t}$

$y'_{\varepsilon\iota\delta_1}(t) = A \cdot e^{-t} - Ate^{-t}$

$y''_{\varepsilon\iota\delta_1}(t) = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t}$

$= -2Ae^{-t} + Ate^{-t}$

Αντικαθιστούμε στην (1):

$-2Ae^{-t} + \cancel{Ate^{-t}} + 3Ae^{-t} - \cancel{3Ate^{-t}} + \cancel{2Ate^{-t}} = e^{-t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Ae^{-t} = e^{-t} \Leftrightarrow A = 1$

Οπότε:

$y_{\varepsilon\iota\delta_1}(t) = t \cdot e^{-t}$

(2) $y'' + 3y' + 2y = t \longrightarrow y_{\varepsilon\iota\delta_2}(t) = A_0 + A_1 t$

$y'_{\varepsilon\iota\delta_2}(t) = A_1$

$y''_{\varepsilon\iota\delta_2}(t) = 0$

Αντικαθιστούμε στη (2):

$3A_1 + 2A_0 + 2A_1 t = t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3A_1 + 2A_0 = 0 \\ 2A_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = -\frac{3}{4} \\ A_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Οπότε:

$$y_{ειδ_2}(t) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t$$

$$y_{ειδ}(t) = y_{ειδ_1}(t) + y_{ειδ_2}(t) = te^{-t} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$$

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + te^{-t} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}}$$

$$y'(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} + e^{-t} - te^{-t} + \frac{1}{2}$$

Αντικαθιστούμε:

$$\left.\begin{aligned} y(0) = 0 &\Leftrightarrow c_1 + c_2 = \frac{3}{4} \\ y'(0) = 0 &\Leftrightarrow -c_1 - 2c_2 + 1 + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Άντικαθιστούμε

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{4}e^{-2t} + t \cdot e^{-t} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}}$$

Άσκηση:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad , t \in I \qquad (*)$$

Να δειχθεί ότι οι y_1, y_2 έχουν τοπικό ακρότατο στο ίδιο σημείο του I, τότε δεν μπορούν να αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της $(*)$. ⇝ *δηλ. γραμμ. ανεξάρτητα

Λύση:

Έστω $t_0 \in I$ το σημείο τοπικού ακροτάτου των λύσεων y_1, y_2.

$$y_1'(t_0) = y_2'(t_0) = 0$$

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα y_1, y_2 γραμμικά εξαρτημένα.

*Με δυναμοσειρές (σχεδόν πάντα μπαίνει ένα θέμα!)

Άσκηση: Με τη μέθοδο δυναμοσειρών να λυθεί η εξίσωση

$$(t^2-4)y'' + 3ty' + y = 0 \xrightarrow{:(t^2-4)} y'' + \underbrace{\frac{3t}{t^2-4}}_{p(t)} y' + \underbrace{\frac{1}{t^2-4}}_{q(t)} y = 0$$

*Το φέρνω στη μορφή $\frac{1}{g} y'' + \dots$

που ικανοποιεί τις αρχ. συνθήκες

$$y(0) = 4 \quad , y'(0) = 1$$

Λύση:

$$p(t) = \frac{3t}{t^2-4} \quad , q(t) = \frac{1}{t^2-4}$$

Το $t_0 = 0$ είναι ομαλό σημείο, άρα p, q αναλυτικές στο 0 με ακτίνα σύγκλισης $R = 2$.

Άρα η εξίσωση έχει λύση της μορφής:

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$y'(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$ ← για $n=0$ μηδενίζεται όλος ο όρος, οπότε ξεκινάμε από $n=1$

$$y''(t)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)a_n t^{n-2}-4\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)a_n t^{n-2}+3\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^n-\underbrace{4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}}_{\parallel\, m=n-2}+3\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$4\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}t^m$$

*Όλα τα άλλα n τα κάνω m - μια μεταβλητή είναι, δεν παίζει ρόλο - οπότε μπορούμε να το αφαιρέσουμε.

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)a_n-4(n+2)(n+1)a_{n+2}+3na_n+a_n]t^n=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[(n^2-n+3n+1)a_n-4(n+1)(n+2)a_{n+2}]t^n=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[\underbrace{(n+1)^2 a_n-4(n+1)(n+2)a_{n+2}}]t^n=0$$

* ← αφού έχω δυναμοσειρά ίση με 0, θα πρέπει όλοι οι συντελεστές να είναι ίσοι με 0

Πρέπει $(n+1)^2 a_n-4(n+1)(n+2)a_{n+2}=0$, $n=0,1,2,\dots$

$$\Leftrightarrow a_{n+2}=\frac{n+1}{4(n+2)}a_n \quad , n=0,1,\dots$$

• $n=0 \Rightarrow a_2=\frac{1}{4\cdot 2}a_0$

$n=2 \Rightarrow a_4=\frac{3}{4\cdot 4}a_2=\frac{3}{4\cdot 4}\cdot\frac{1}{4\cdot 2}a_0=\frac{1\cdot 3}{4^2\cdot 2\cdot 4}a_0$

$n=4 \Rightarrow a_6=\frac{5}{4\cdot 6}a_4=\frac{5}{4\cdot 6}\cdot\frac{1\cdot 3}{4^2\cdot 2\cdot 4}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6}a_0$

...

$$a_{2k}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{4^k\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2k}a_0$$

$$a_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{4^k \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)} \cdot a_0$$

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k) = (2 \cdot 1)(2 \cdot 2)(2 \cdot 3) \ldots (2k) = 2^k \cdot (k!)$$

← *τέτοιου είδους σχέση, είναι χρήσιμη

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k \cdot (k!)}$$

←

Αντικαθιστώντας:

$$a_{2k} = \frac{\frac{(2k)!}{2^k (k!)}}{4^k \cdot 2^k (k!)} = \frac{(2k)!}{4^{2k} (k!)^2}$$

Τώρα δουλεύουμε με τους περιττούς όρους:

- $n = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{2}{4 \cdot 3} \cdot a_1$

$n = 3 \Rightarrow a_5 = \frac{2 \cdot 4}{4^2 \cdot 3 \cdot 5} a_1$

...

$$a_{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)}{4^k \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \cdot a_1$$

$$= \frac{2^k \cdot (k!)}{4^k \frac{(2k)!}{2^k (k!)} \cdot (2k+1)} \cdot a_1$$

$$= \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} \cdot a_1$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \ldots$$

Αντικατάσταση αρχικών συνθηκών:

$y(0) = 4 \Leftrightarrow a_0 = 4$

$y'(0) = 1 \Leftrightarrow a_1 = 1$

* Πρέπει να χωρίσουν άρτιοι - περιττοί

- $$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \cdot t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} t^{2k+1}$$

$$= \underset{\uparrow\, a_0 = 4}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^{2k} (k!)^2} t^{2k} + \underset{\uparrow\, a_1 = 1}{\sum_{k=0}^{\infty}} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

$$\vec{y}'(t) = A(t) \cdot \vec{y}(t)$$

* δε βάλαμε "γράψτε τις ιδιότητες" - για ασκ μόνο.

Θεώρημα: (Τύπος του Liouville)

$\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n \in L_0$ λύσεις του $\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t)$, $t_0 \in I$, τότε ισχύει ο τύπος του Liouville

$$W[\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n](t) = W[\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n](t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)\,ds}$$

$$\underset{\text{ίχνος}}{tr}\,A(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$$

Υπενθύμιση:

$$\left(\begin{array}{l} \vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{array} \right) \quad (1)$$

$$\vec{y}(t) = \Phi(t) \cdot \vec{c}$$

$$\Phi(t_0) \cdot \vec{c} = \vec{y}_0$$

$$\vec{c} = \vec{\Phi}^{-1}(t_0) \cdot \vec{y}_0$$

Τελικά:

$$\boxed{\vec{y}(t) = \underbrace{\Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)}_{G(t,t_0)} \vec{y}_0}$$

$$\boxed{\vec{y}(t) = G(t,t_0) \cdot \vec{y}_0}$$

Λύση:

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα
$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

Άρα $\varphi_1(t) = e^{5t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\varphi_2(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, οπότε η γενική λύση
είναι $y(t) = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{5t} + c_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}e^{-3t}$

Αντικαθιστούμε την αρχ. συνθ.:

$$y(0) = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2b - a \\ c_2 = a - b \end{cases}$$

⇝ θέλω να μηδενίζεται ώστε να απειρίζεται η λύση.

$y(t)$ φραγμένη στο $[0, +\infty) \Leftrightarrow c_1 = 0 \Leftrightarrow a = 2b$

Άσκηση: (Επαναληπτική)

Για ποιες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ είναι περιοδική συνάρτηση η λύση του π.α.τ. $y' + \underbrace{2}_{p(t)}y = \underbrace{5\cos t}_{q(t)}$, $y(0) = a$;

Λύση:

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι $\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int 2\,dt} = e^{2t}$

Η εξίσωση γράφεται

$$e^{2t}y' + 2e^{2t}y = 5e^{2t}\cos t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{2t}y)' = \left(5\int e^{2t}\cos t\,dt\right)' \quad (1)$$

$$I = \int e^{2t}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int (e^{2t})'\cos t\,dt = \frac{1}{2}e^{2t}\cos t + \frac{1}{4}\int (e^{2t})'\sin t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}\cos t + \frac{1}{4}e^{2t}\sin t - \frac{1}{4}\underbrace{\int e^{2t}\cos t\,dt}_{I} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}I = \frac{1}{2}e^{2t}\cos t + \frac{1}{4}e^{2t}\sin t$$

$\Leftrightarrow I = \frac{1}{5}(2e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t)$ (*)

Άρα

$$① \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (e^{2t}y)' = (2e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t)'$$

$$\Rightarrow e^{2t}y = 2e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t + c$$

$$\Leftrightarrow y(t) = 2\cos t + \sin t + c \cdot e^{-2t}$$

Αντικαθιστούμε την αρχ. συνθ.

$$y(0) = 2 + c = a \Leftrightarrow c = a - 2$$

Τελικά $y(t) = 2\cos t + \sin t + (a-2)e^{-2t}$

Για $a = 2 \Leftrightarrow$ περιοδική

Άσκηση (Επαναληπτική):

$$y' - \frac{1}{t} y = \frac{\ln t}{t} y^2 \quad , \; t > 0$$

*Bernoulli γιατί είναι κοντά το 0..

Λύση:

Η $y \equiv 0$ είναι λύση!

$$u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2} y'$$

Πολ/ζουμε με $-y^{-2}$:

$$-y^{-2} y' + \frac{1}{t} y^{-1} = -\frac{\ln t}{t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u' + \frac{1}{t} u = -\frac{\ln t}{t}$$

$$\overset{\cdot t}{\Longleftrightarrow} t u' + u = -\ln t$$

$$\Leftrightarrow (tu)' = \left(-\int \ln t \, dt\right)'$$

$$\Leftrightarrow (tu)' = (-t\ln t + t)' \Rightarrow$$

$$\int \ln t \, dt = \int (t)' \ln t \, dt = t\ln t - \int t \cdot \frac{1}{t} \, dt = t \ln t - t + C$$

από πάνω δεν το βάζουμε γιατί μια σταθερά να τη δω

$\Rightarrow tu = -t\ln t + t + c$

$\Leftrightarrow u(t) = -\ln t + 1 + \frac{c}{t}$

$$y(t) = \frac{1}{-\ln t + 1 + \frac{c}{t}}, \quad t > 0$$

* Ασκήσεις στην τάξη *

① Να λυθεί το Π.Α.Τ : $y' = 3t^2 y^2$, $y(0) = 1$.

Η διαφορική εξίσωση είναι "χωριζομένων μεταβλητών".
Και έχουμε:

Για $y \neq 0$ έχουμε:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 3t^2 dt + c$$

$$-y^{-1} = t^3 + c$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{t^3 + c} \\ y(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{c} = 1 \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

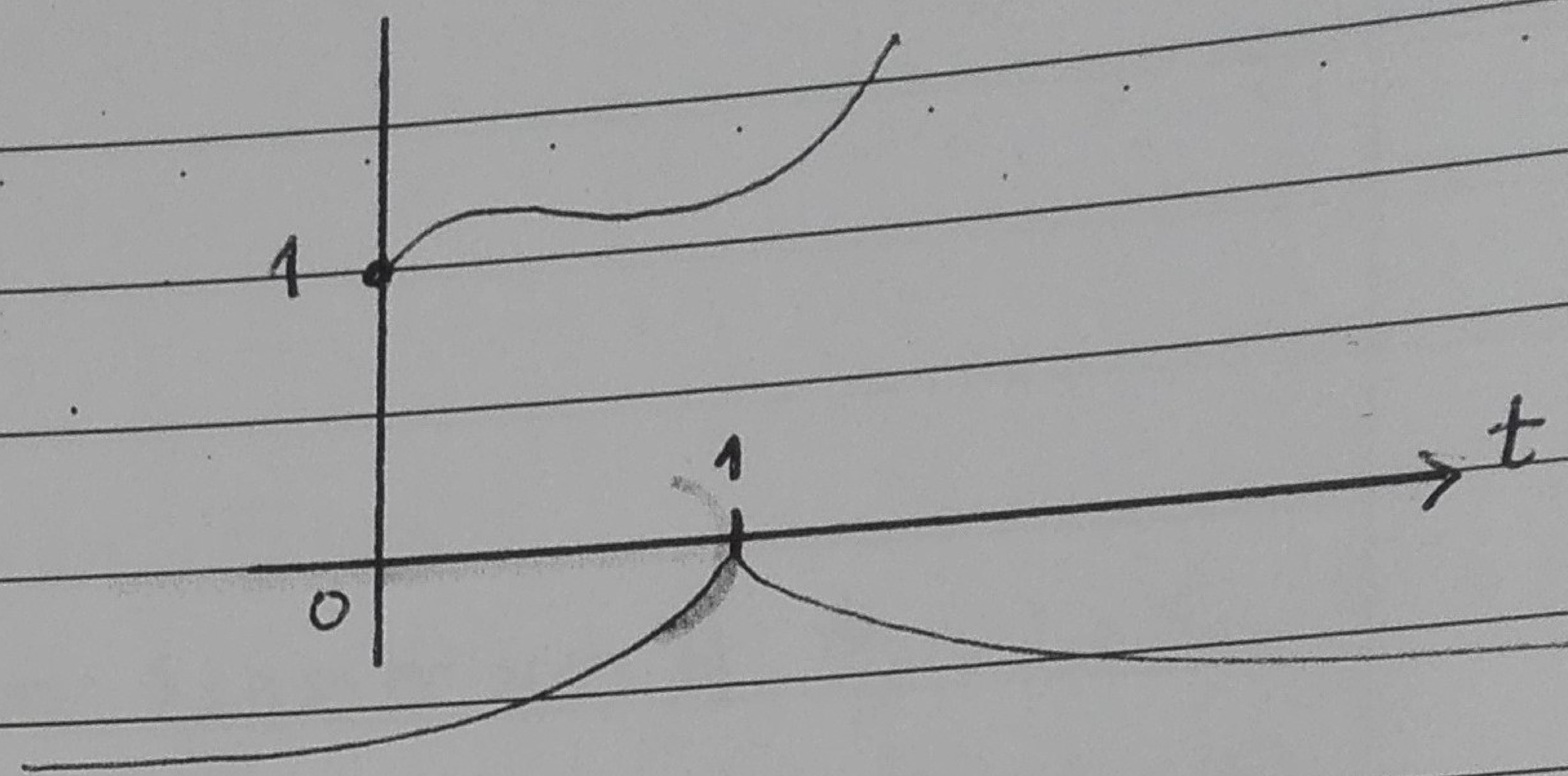
Άρα η γενική λύση της εξίσωσης είναι η : $y(t) = -\dfrac{1}{t^3 - 1}$, $\boxed{t \neq 1}$

▷ Το πρόβλημά μας έχει ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ (σύμφωνα με το Θεώρημα (P-L) [$y' = f(t,y)$, $y(0) = 1$
$f, \dfrac{\partial f}{\partial y}$: συνεχής , $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$.])

Άρα : $f(t,y) = 3t^2 y^2$: συνεχής

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6t^2 y \quad (P\text{-}L) \text{ συνεχής.} \qquad \Longrightarrow$$

Όμως $t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)$



• $t\neq 1$ και $t>1$ ή $t<1$

ΤΕΛΙΚΑ : $t\in(-\infty,1)$

$\lim y(t)=0$

$\lim\limits_{t\to 1^-} y(t)=+\infty$

② Να λυθεί το Π.Α.Τ : $y'=y^2+1$, $y(0)=1$

Λύση

Υπενθύμιση:

Bernoulli : $y'+p(t)y=q(t)\cdot y^r$

Riccati : $y'+p(t)y=q(t)\,y^2+r(t)$

Η δ.ε. είναι Riccati + χωριζομένων μεταβλητών.

$f(t,y)=y^2+1$

$\frac{dy}{dt}=y^2+1$

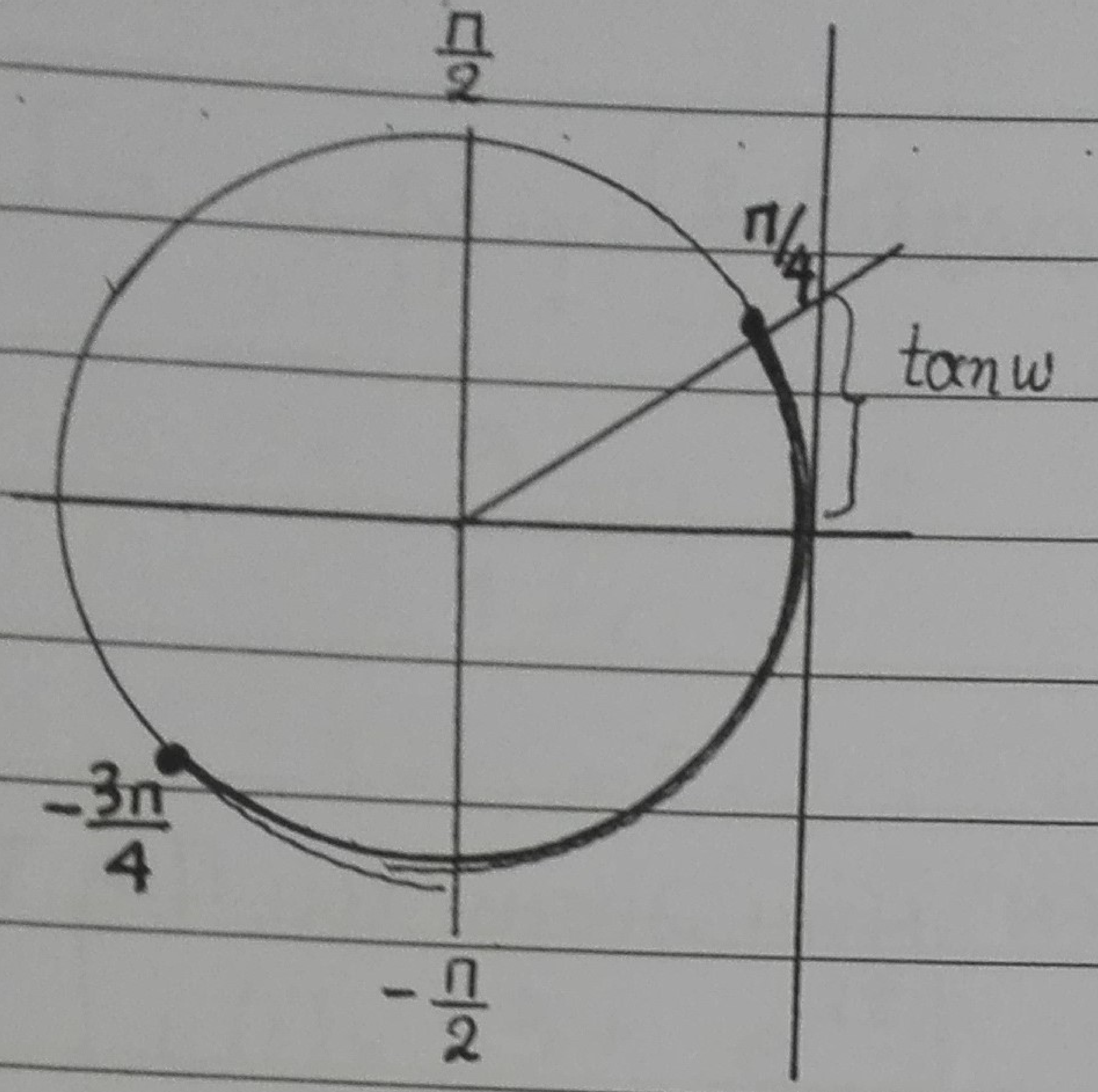
$\int\frac{dy}{y^2+1}=\int dt+c$

$\arctan y=t+c$

$y=\tan(t+c)$

$y(0)=1$

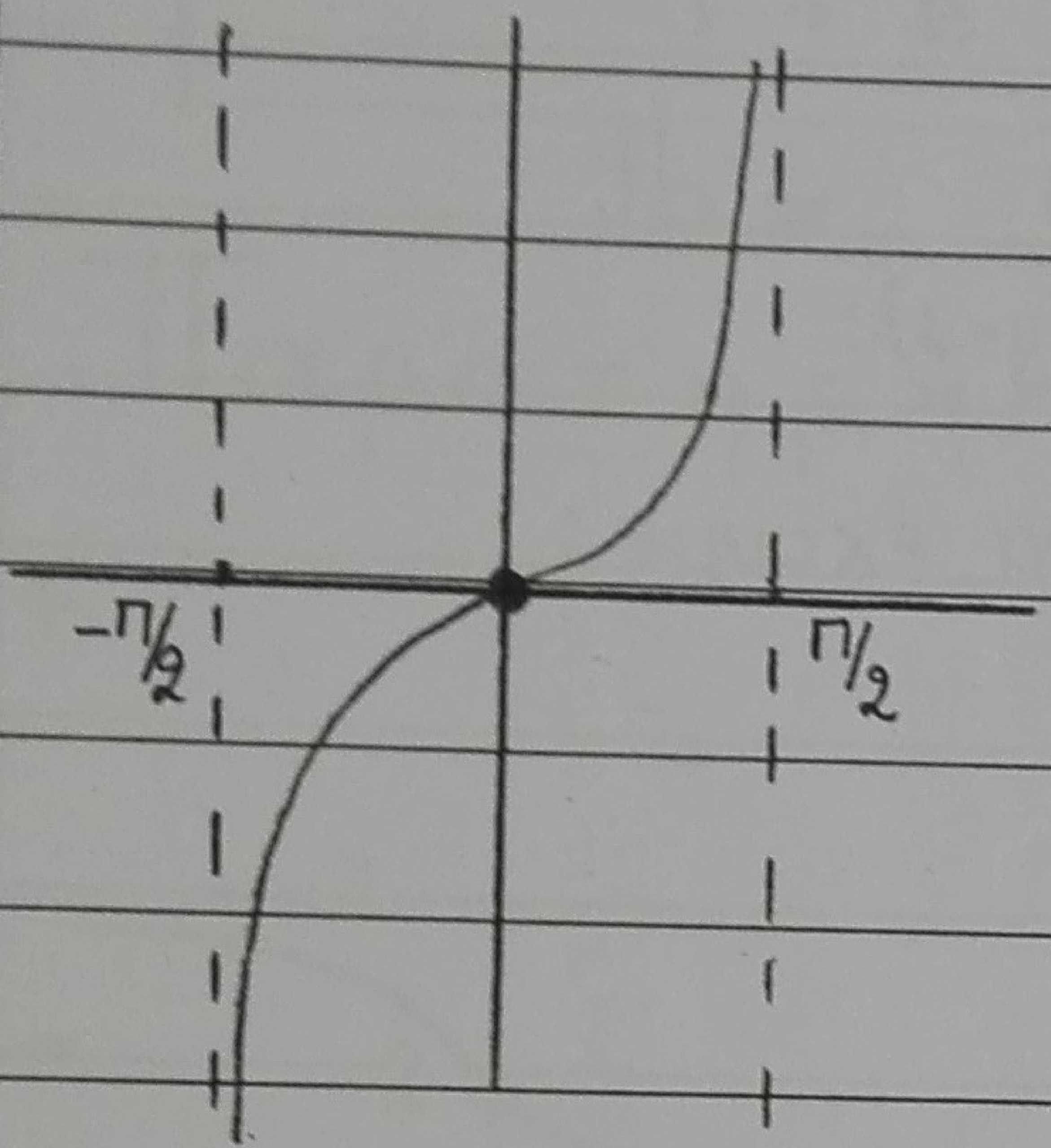
$\tan(c)=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{\pi}{4}} \Rightarrow y=\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$



Πεδίο ορισμού της λύσης:

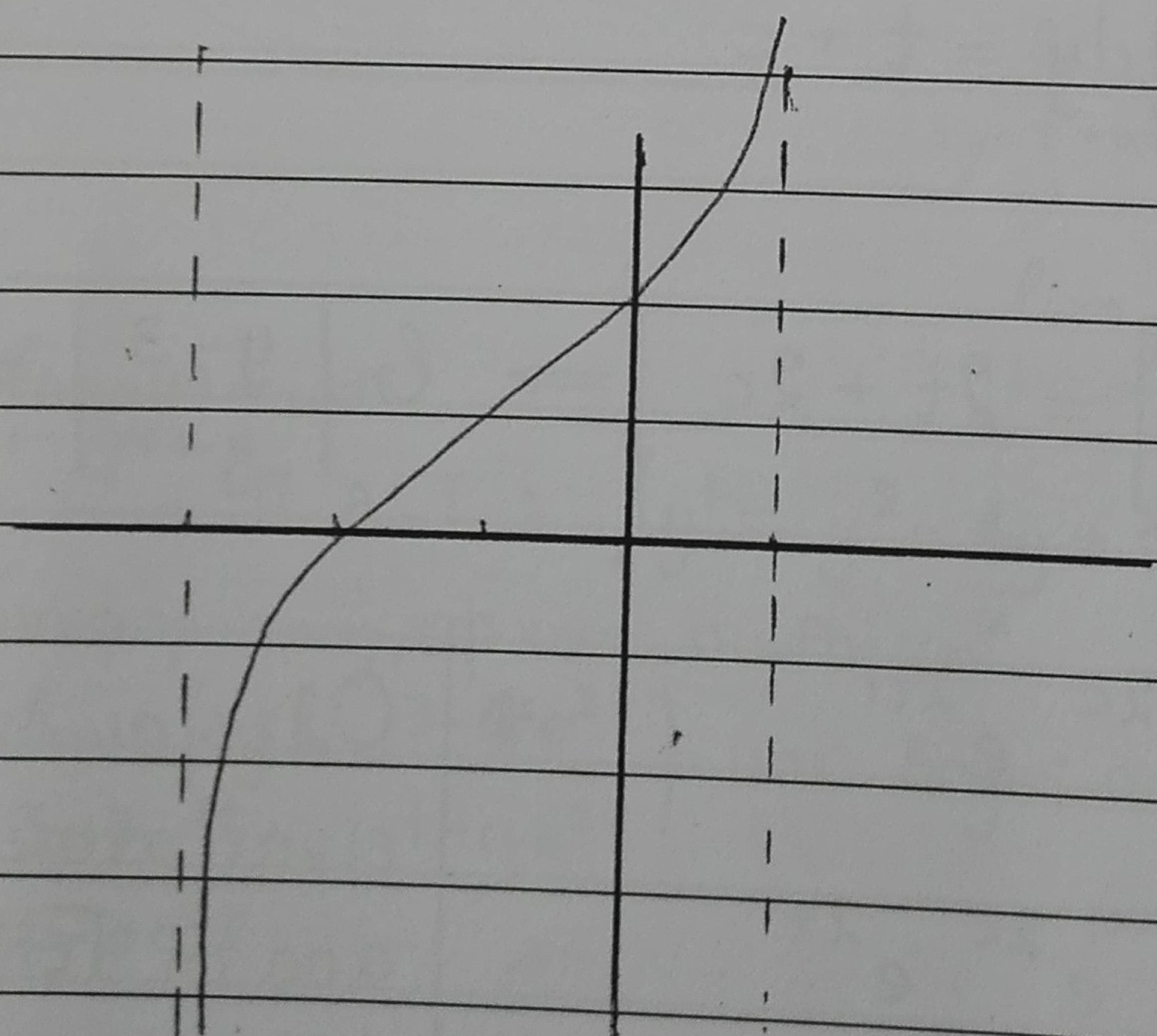
$$-\frac{\pi}{2} < t + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{-\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}}$$



y = tany

και για το παράδειγμά μας:



* Ασκήσεις *

① Να βρεθεί η συνάρτηση $f(t)$, $t>0$ έτσι ώστε η δ.ε.

$$f(t)y' + t^2 + y = 0 \quad , t>0 \qquad (1)$$

να έχει πολ/στή Euler.

$$\mu = t$$

Λύση: Πολ/ζω με $\mu = t$ την δ.ε., δηλ:

$$(1) \quad \underbrace{t \cdot f(t)}_{N} \cdot y' + \underbrace{t^3 + ty}_{M} = 0, \quad t>0 \quad (2)$$

και η (2) είναι ακριβής, επομένως ισχύει

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad \text{δηλ.}$$

$$t = f(t) + t \cdot f'(t)$$

$$\Leftrightarrow (t \cdot f(t))' = t$$

$$\Rightarrow t \cdot f(t) = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{c}{t} + \frac{t}{2}} \quad (3),$$

$$(1),(3) \Rightarrow t^2 + y + \left(\frac{c}{t} + \frac{t}{2}\right) y' = 0$$

$$\overset{\mu=t}{\Longrightarrow} (t^3 + ty) + \left(c + \frac{t^2}{2}\right) y' = 0 \quad (4)$$

Η (4) είναι ακριβής $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = t = \frac{\partial N}{\partial t}\right)$

Επιλύουμε το δ. Σύστημα

$$\frac{\partial F}{\partial t} = t^3 + ty \quad (5) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = c + \frac{t^2}{2} \quad (6)$$

$$(5) \xrightarrow{\int dt} F = \int (t^3 - ty)\,dt + h(y)$$

$$= \frac{t^4}{4} + \frac{t^2 y}{2} + h(y) \quad (7)$$

$$(6),(7) \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{t^2}{2} + h'(y) = c + \frac{t^2}{2}$$

$$\Longrightarrow h'(y) = c \Longrightarrow \boxed{h(y) = c \cdot y + c_1} \quad (8)$$

$$(7),(8) \Longrightarrow F = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2 y}{2} + cy + c_1$$

η γεν. λύση της δ.ε. (1) είναι:

$$F(t,y) = c_2$$

$$\Longrightarrow c_2 = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2 y}{2} + cy + c_1 \Longrightarrow \boxed{c_3 = t^4 + 2t^3 y + 4cy}$$

$$\Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \boxed{y = \frac{-t^4 + c_3}{2t^2 + 4c}} \qquad 2t^2 + 4c \neq 0.$$

Σημείωση: Η (3) είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξης, επομένως μπορούσε να λυθεί και ευκολότερα.

■

② Να λυθεί η δ.ε.

$$\underbrace{2\cdot e^x\cdot y+\frac{y^2}{2}}_{M}+\underbrace{(y+e^x)}_{N}y'=0 \qquad (1)$$

Λύση: Εξετάζω αν είναι ακριβής.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}&=2e^x+y\\ \frac{\partial N}{\partial x}&=e^x\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=e^x+y$$

$\Rightarrow$ (1) δεν είναι ακριβής.

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{e^x+y}{y+e^x}=1$$

Άρα $\mu=\mu(x)=e^{\int f(x)dx}=e^x \Rightarrow \boxed{\mu(x)=e^x}$ (2)

Πολ/ζω την (1) με $\mu(x)=e^x$

Τότε:

$$(1)\Rightarrow \underbrace{2e^{2x}y+\frac{1}{2}e^x\cdot y^2}_{\tilde{M}}+\underbrace{(ye^x+e^{2x})}_{\tilde{N}}y'=0 \qquad (3)$$

Ελέγχω αν η (3) είναι ακριβής; πράγματι:

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}=2\cdot e^{2x}+e^x\cdot y=\frac{\partial \tilde{N}}{\partial y}$$

Λύνουμε το δ. Σύστημα:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2e^{2x}y + \frac{1}{2}e^{x}y^{2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y\cdot e^{x} + e^{2x} \quad (5)$$

Ολοκληρώνω την (5) ως προς y:

$$(5) \Rightarrow F = \frac{y^2}{2}e^{x} + e^{2x}\cdot y + h(x) \quad (6)$$

$$(4),(6) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \cancel{\frac{y^2\cdot e^{x}}{2}} + \cancel{2e^{2x}\cdot y} + h'(x) = \cancel{2e^{2x}\cdot y} + \cancel{\frac{1}{2}e^{x}\cdot y^{2}}$$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{h(x) = c_1} \quad (7)$$

$$(6),(7) \Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{2}y^{2}\cdot e^{x} + y\cdot e^{2x} + c_1$$

Η γεν. λύση σε πεπλεγμένη μορφή είναι:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}y^{2}\cdot e^{x} + y\cdot e^{2x} + c_1\cdot x = c_2$$

$$\boxed{y^{2}\cdot e^{x} + 2ye^{2x} = c}$$

■

③ $\underbrace{3x^2y^2+y}_{M}+\underbrace{(2y^2-x)}_{N}y'=0 \quad (1)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}&=6x^2y+1\\ \frac{\partial N}{\partial x}&=-1\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=6x^2y+2$$

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{1}{y(3x^2y+1)}\cdot 2(3x^2y+1)=-\frac{2}{y}=f(y)/\ y\neq 0$$

$$\mu(y)=e^{\int f(y)dy}=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln|y|}=y^{-2}$$

(Συνεχίζεται...)

Τελική λύση: $\boxed{x^3+\frac{x}{y}+y^2=c}$ και $\boxed{y=0}$ (Ιδιάζουσα λύση)

④ $(3t+2y+y^2)+(t+4ty+5y^2)y'=0 \quad (1)$

Υπόδειξη : $\mu=\mu(t+y^2)$

Λυση: $M+Ny'=0$ γίνεται ακριβής αν πολ/στεί
με εναν πολ/στή Euler, δηλ.

Ανν $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$

δηλ.

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial t}=-\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)\mu \quad (2)$$

Θέτουμε : $\boxed{v = t + y^2}$ (3)

Τότε: $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \cdot \frac{d\mu}{dv}$ (4)

$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{d\mu}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d\mu}{dv}$ (5)

Από (4), (5) έχω :

$(1),(2) \xrightarrow[(5)]{(4)} (3t + 2y + y^2) \cdot 2y \cdot \frac{d\mu}{dv} - (t + 4ty + 5y^2)\frac{d\mu}{dv}$

$= -(2 + 2y - 1 - 4y)\mu$

$\Longrightarrow (6ty + 4y^2 + 2y^3 - t - 4ty - 5y^2)\frac{d\mu}{dv} = -(1-2y)\mu$

$\Longrightarrow (2y^3 - y^2 + 2ty - t)\frac{d\mu}{dv} = (2y-1)\mu$

$\Longrightarrow (2y(y^2+t) - (y^2+t))\frac{d\mu}{dv} = (2y-1)\mu$

$\Longrightarrow (y^2+t)\cancel{(2y-1)}\frac{d\mu}{dv} = \cancel{(2y-1)}\mu$

$\xRightarrow{v=t+y^2} v\frac{d\mu}{dv} = \mu$

$\frac{1}{\mu}d\mu = \frac{1}{v}dv$

$\ln|\mu| = \ln|v| + c$

$\Longrightarrow \dots \Longrightarrow \mu = v = t + y^2$

Άσκηση

(1) $$\underbrace{-3ty+8y^3}_{M} + \underbrace{(t^2+4ty^2+\cancel{5y^2})}_{N}\, y' = 0 \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζω με τον πολ/στή Euler $\mu(t,y)=t^{\alpha}y^{\beta}\neq 0$

$$\underbrace{(-3t^{\alpha+1}y^{\beta+1}+8t^{\alpha}y^{\beta+3})}_{\tilde{M}} + \underbrace{(t^{\alpha+2}y^{\beta}+4t^{\alpha+1}y^{\beta+2})}_{\tilde{N}}\, y' = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}$$

$$-3(\beta+1)t^{\alpha+1}y^{\beta} + 8(\beta+3)t^{\alpha}y^{\beta+2} = (\alpha+2)t^{\alpha+1}y^{\beta} + 4(\alpha+1)t^{\alpha}y^{\beta+2}$$

$$\left.\begin{aligned} -3(\beta+1) &= \alpha+2 \\ 8(\beta+3) &= 4(\alpha+1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha+3\beta &= -5 \\ 4\alpha-8\beta &= 20 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= -2 \end{aligned}\right.$$

Άρα ο πολ/στής Euler είναι ο $\mu(t,y)=t\cdot y^{-2}$ και έχουμε:

$$\underbrace{-3t^2y^{-1}+8ty}_{\tilde{\tilde{M}}} + \underbrace{(t^3y^{-2}+4t^2)}_{\tilde{\tilde{N}}}\, y' = 0 \quad (3)$$

* Κάνω έναν έλεγχο: $\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 3t^2y^{-2}+8t \overset{*}{=} \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial t}$

Άρα η (3) είναι ακριβής. $F(t,y)=c$

Η γενική της λύση είναι σε πεπλεγμένη μορφή, όπου F είναι η λύση του δ. συστήματος.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} = -3t^2 y^{-1} + 8ty & (4) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = t^3 y^{-2} + 4t^2 & (5) \end{cases}$$

• Ολοκληρώνω ως προς t και έχω:

$$(4) \Longrightarrow F(t,y) = -t^3 y^{-1} + 4t^2 y + h(y) \quad (6)$$

• Στη συνέχεια

$$(5),(6) \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \cancel{t^3 y^{-2}} + \cancel{\boxed{4t^2}} + h'(y) = \cancel{t^3 y^{-2}} + \cancel{\boxed{4t^2}}$$

άρα $h'(y) = 0 \Longrightarrow h(y) = c_1 \quad (7)$

$$(6),(7) \Longrightarrow F(t,y) = -t^3 y^{-1} + 4t^2 y + c_1$$

$$-t^3 y^{-1} + 4t^2 y + c_1 = c_2$$

$$\boxed{-t^3 y^{-1} + 4t^2 y = c} \quad y \neq 0$$

Και ελέγχω είτε στην αρχή, είτε στο τέλος εάν υπάρχει κάποια προφανής λύση/ρίζα της εξίσωσης. Εδώ για παράδειγμα η $\boxed{y=0}$ (ιδιάζουσα λύση) είναι η προφανής λύση της (1)