Ποιοτική μελέτη (χώρος φάσης - διαγράμματα φάσης...)

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Αυτόνομη διαφορική εξίσωση $y' = \underbrace{y^2 - 3y + 2}_{f(y)}$

* Μελετάμε αυτόνομες διαφορικές, δηλ. να μην έχουν το t μέσα.

$y' = f(y) \quad : \quad y = y(t)$

π.χ. $y' = y : f(y) = y$

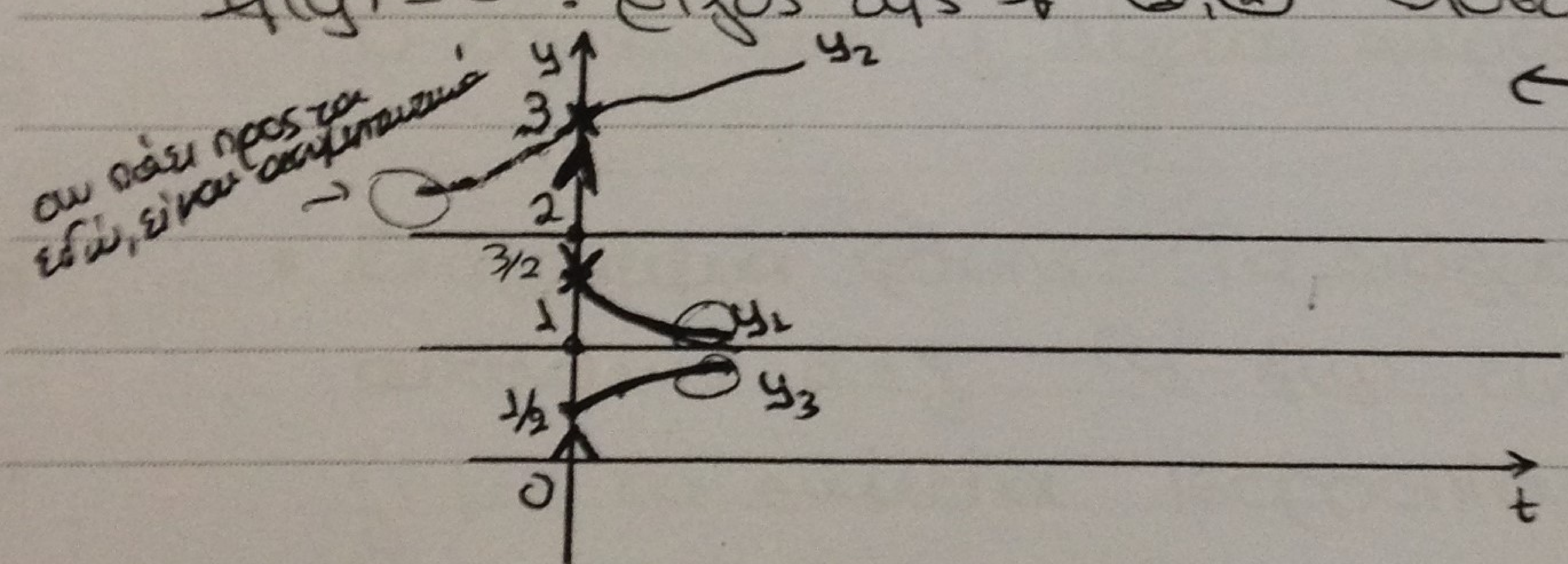
$$y' = \underbrace{y(y-1)(y-2)}_{f(y)} \qquad ①$$

Λύση: $y' = \underbrace{y^2 - 3y + 2}_{f(y)}$

Βάσει εμπειρίας την γράφω:

$$y' = (y-1)(y-2) \qquad ①$$

$f(y) = 0$: ρίζες της f ①,② (λύσεις της δ.εξ.)



← έστω ότι πάει προς τα επάνω

* Παίρνω μια τυχαία ενδιάμεση τιμή (π.χ. 3/2) και προσπαθώ να φτιάξω ΠΑΤ με αυτήν την τιμή

i) $\begin{cases} y' = (y-1)(y-2) \\ y(0) = 3/2 \end{cases} \rightsquigarrow y_1(t)$

* Η f συνεχής και οι μερικές της παράγωγοι επίσης.

i) $\left(\begin{array}{l} y' = (y-1)(y-2) \\ y(0) = 3/2 \end{array} \right) \rightsquigarrow y_1(t)$

ii) $\left(\begin{array}{l} y' = (y-1)(y-2) \\ y(0) = 3 \end{array} \right) \rightsquigarrow y_2(t)$

iii) $\left(\begin{array}{l} y' = (y-1)(y-2) \\ y(0) = 1/2 \end{array} \right) \rightsquigarrow y_3(t)$

Σχόλια για τα i, ii, iii:

i) $f(y) < 0$, $y' < 0$ συνάρτηση (φθίνουσα)

ii) $f(y) > 0$, $y' > 0$ συνάρτηση (αύξουσα)

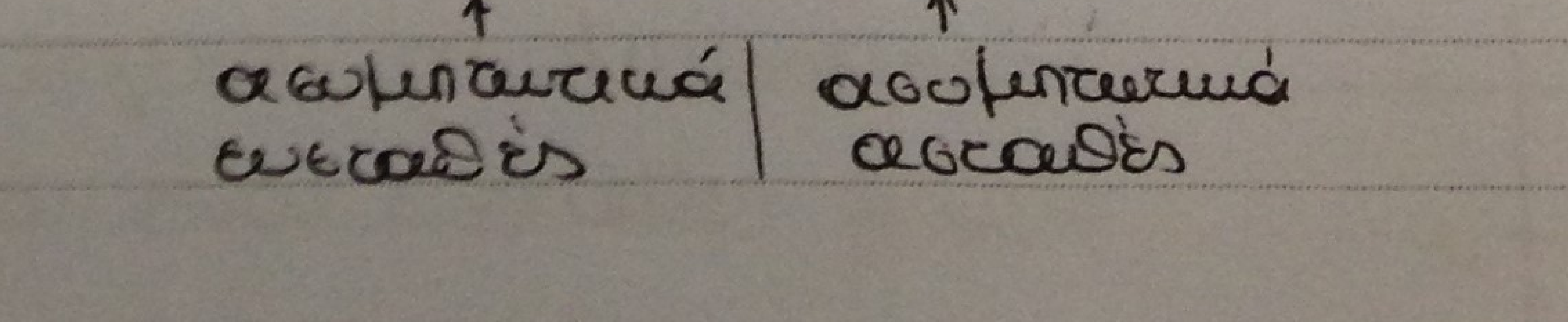
iii) $f(y) > 0$, $y' > 0$ συνάρτηση (αύξουσα)

- Οι ρίζες της συνάρτησης f, λέγονται σημεία ισορροπίας.

- Ο άξονας των y, λέγεται χώρος φάσης.

- Διάγραμμα φάσης: Το διάγραμμα φάσης της (~~δ.εξ. (1)~~) αυτόνομης δ.εξ. ($y' = f(y)$) είναι ο άξονας των y, μαζί με τα σημεία ισορροπίας και τα βέλη που δείχνουν το πρόσημο της συνάρτησης f.

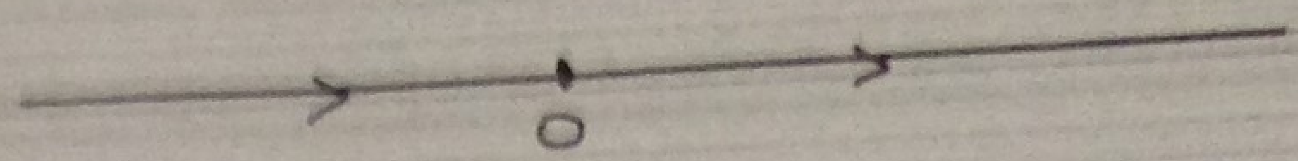
Ο άξονας των y του διαγρ. μπορεί να γίνει και οριζόντια



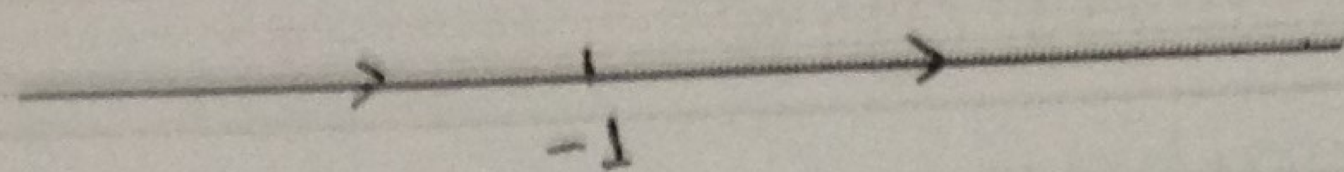
(62)

1. $y' = \underbrace{y^2}_{f(y)}$ $f(y)=0$: $\boxed{\bar{y}=0}$
σημείο ισορροπίας

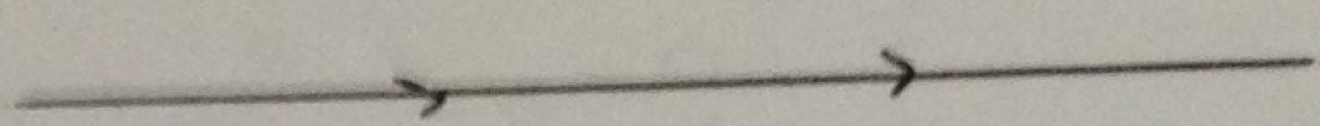
* ένα σημείο ισορροπίας χωρίς ευστάθειες ημι.



2. $y' = \underbrace{(1+y)^2}_{f(y)}$ $\bar{y}=-1$ (σημείο ισορροπίας)



3. $y' = 1+y^2$ δεν έχει σημεία ισορροπίας



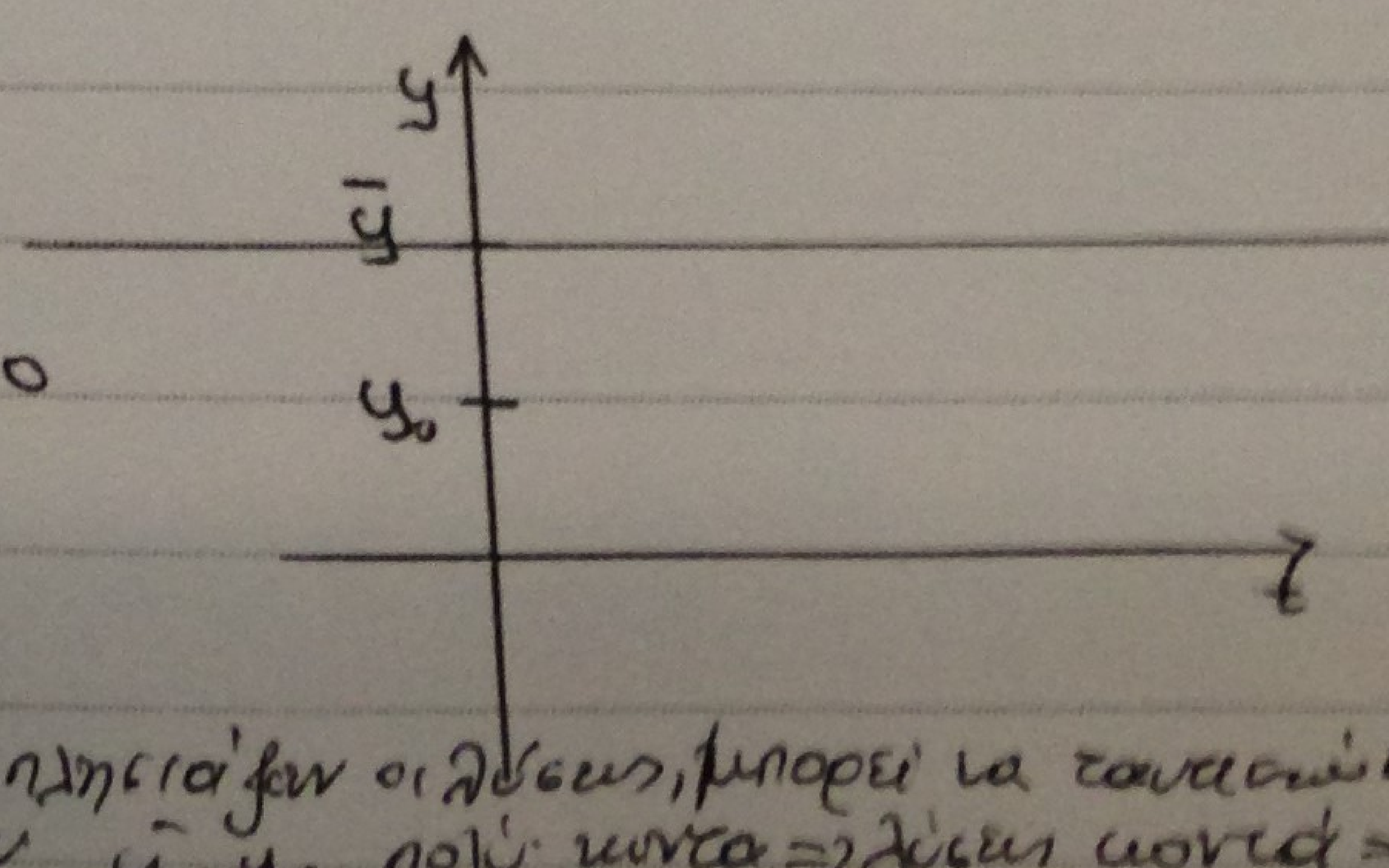
* Αυτά ↑ είναι διαγράμματα φάσης.
* Αν δεν μπορώ να βρω λύση, μπορώ να μελετήσω τη συμπεριφορά της συνάρτησης.

$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ μοναδικής λύσης
Λύση: $\varphi(0,y_0)=y_0$

$f(\bar{y})=0$
↓
σημείο ισορροπίας

Ορισμός: Το σημείο $\bar{y}$ ισορροπίας ($f(\bar{y})=0$) λέγεται ευσταθές αν $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0 : |y_0-\bar{y}|<\delta$, τότε $|\varphi(t,y_0)-\varphi(t,\bar{y})|<\varepsilon$, για $t \geq 0$

Το $\bar{y}$ λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας και επιπλέον



* όσο πλησιάζουν οι λύσεις, μπορεί να ταυτιστούν όταν $\bar{y}, y_0$ πολύ κοντά ⇒ λύσεις κοντά ⇒

για: $|y_0-\bar{y}|<\delta$ να ισχύει: $\lim_{t\to\infty} \varphi(t,y_0)=\bar{y}$.

Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται ασταθές, αν δεν είναι ευσταθές

<u>Ιδιότητα:</u>

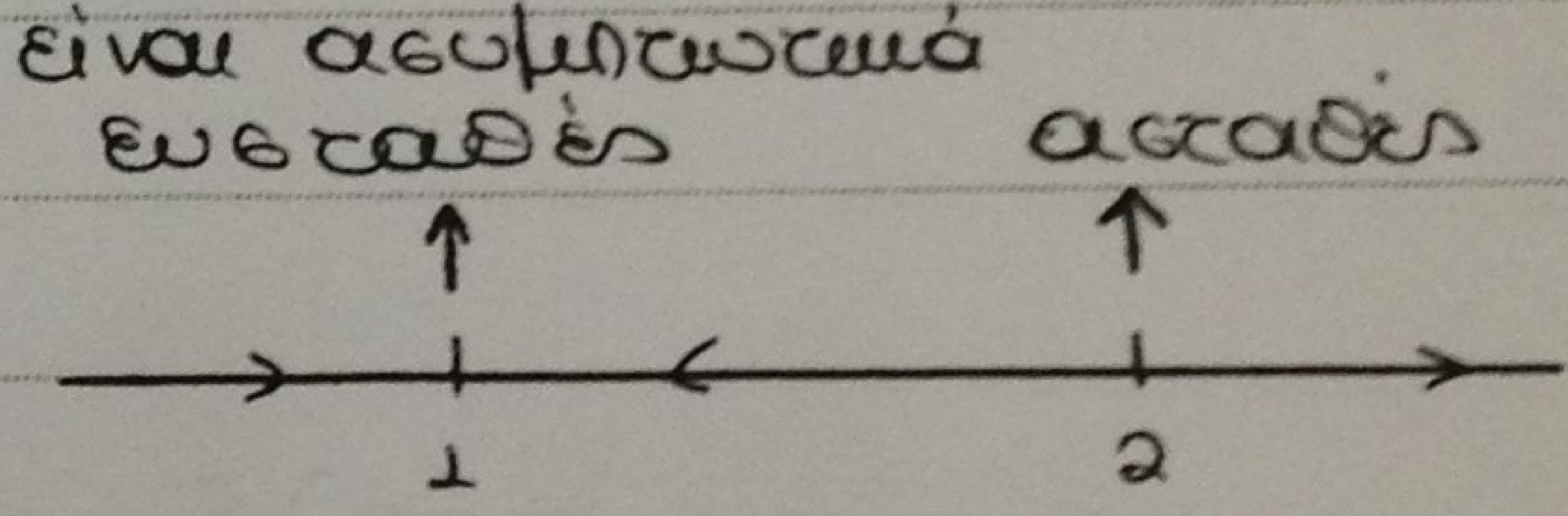
Στην περίπτωση $f'(\bar{y})\neq 0$.

- Τότε το $\bar{y}$ είναι <u>ασυμπτωτικά ευσταθές</u> αν $f'(\bar{y})<0$
- και <u>ασταθές</u> αν $f'(\bar{y})>0$

$$y' = \underbrace{y^2-3y+2}_{f(y)}$$

$f'(y)=2y-3$

$f'(1)=-1<0$

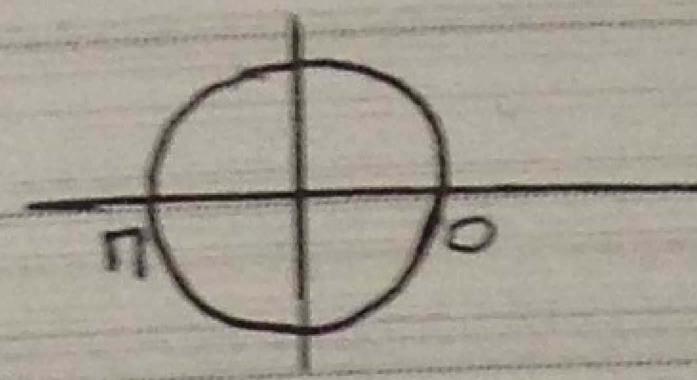


$f'(2)=1>0$

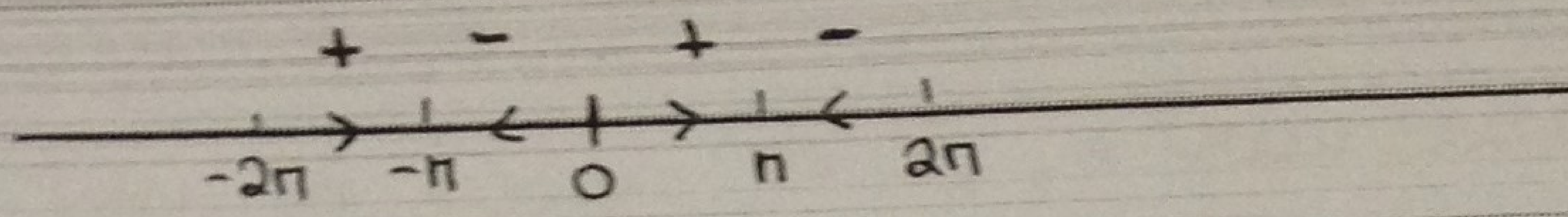
ασταθές το σημείο ισορροπίας "2"

Παράδειγμα: Να γίνει το διάγραμμα φάσης για την

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{\sin y}_{f(y)}$$



$\bar{y} = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$, $k \in \mathbb{Z}$



* Στα περιττά ευστάθεια, στα άρτια αστάθεια

Για $n = 2k$ (αστάθεια)

Για $n = 2k+1$ (ευστάθεια)

Παράδειγμα: Να γίνει το διάγραμμα φάσης για την

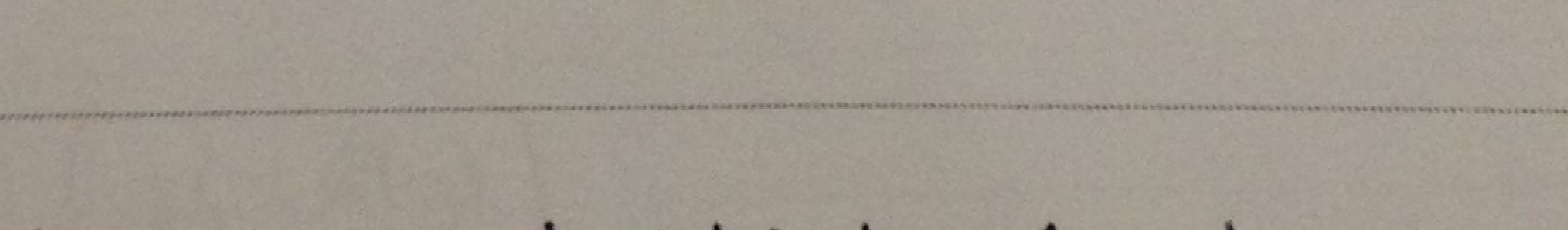
$$y' = \underbrace{(y-2)\cdot \sin y}_{f(y)}$$

Σημεία ισορροπίας:

$\bar{y} = 2$, $\bar{y} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $(k = 0, \pm 1, \dots)$

* βολεύει να κάνουμε πινακάκι, όπως στο σχολείο

		$-\pi$	0	2	π
$(y-2)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\sin y$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$(y-2)\sin y$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$



Σπίτι

Άσκηση : Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της δ.ε:

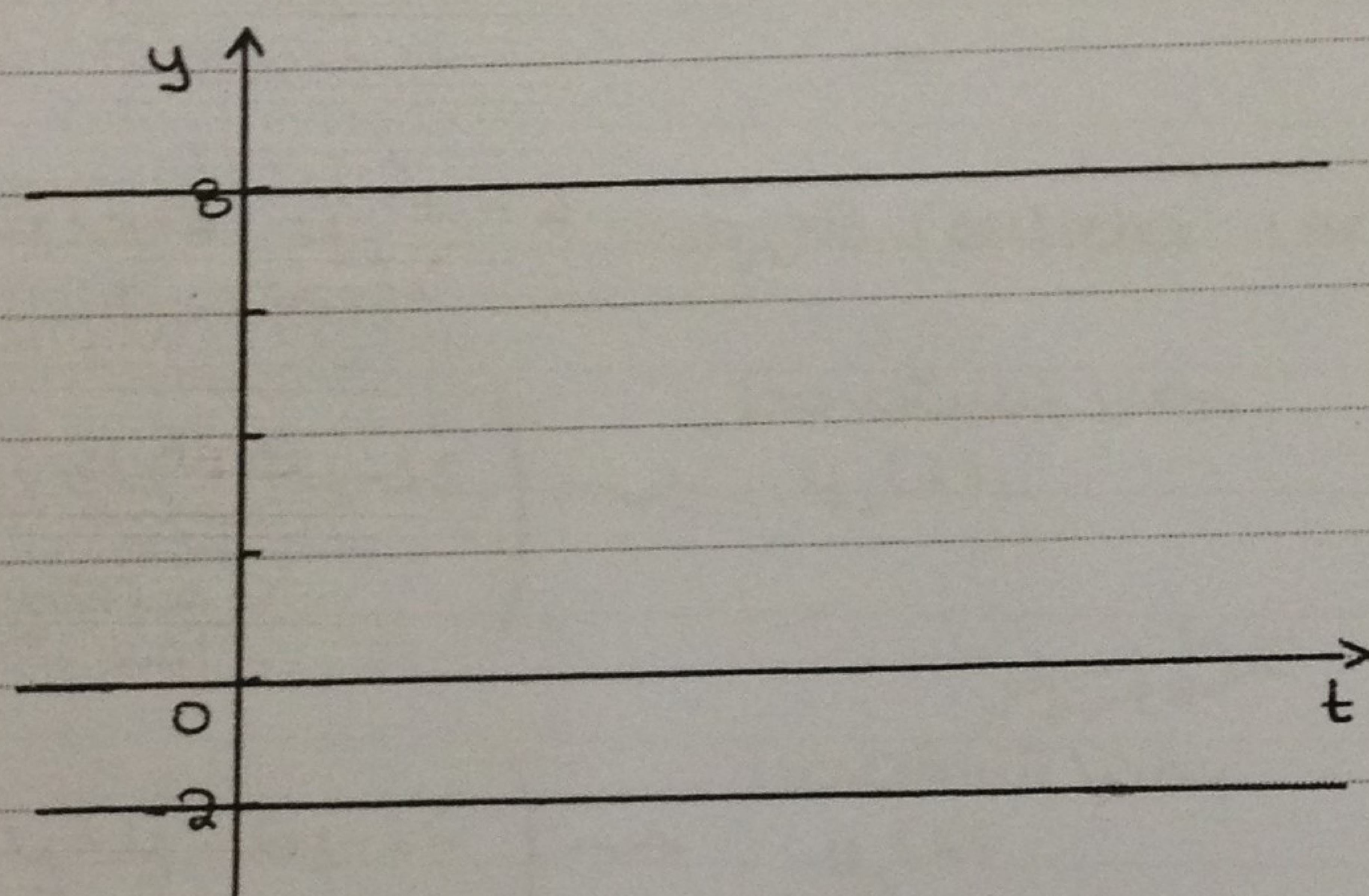
$$y' = \overbrace{y^2 - 6y - 16}^{f(y)}$$

και να βρεθούν τα όρια των λύσεων ($\lim_{t \to +\infty} y(t)$) που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες

$y(0) = 0$, $y(0) = -3$, $y(0) = 8$

* Πρέπει να βρούμε τα $\bar{y}$; * Όταν έχω αρχ. συνθ. παίρνω άξονα.

$\bar{y} = 8$, $\bar{y} = -2$



* Φτιάχνουμε τρία ΠΑΤ:

* μεταξύ ριζών θετικά

* Θα φανεί ότι είναι μία δια,μο-νασική η 8.

i) $\begin{pmatrix} y' = f(y) \\ y(0) = 0 \end{pmatrix}$

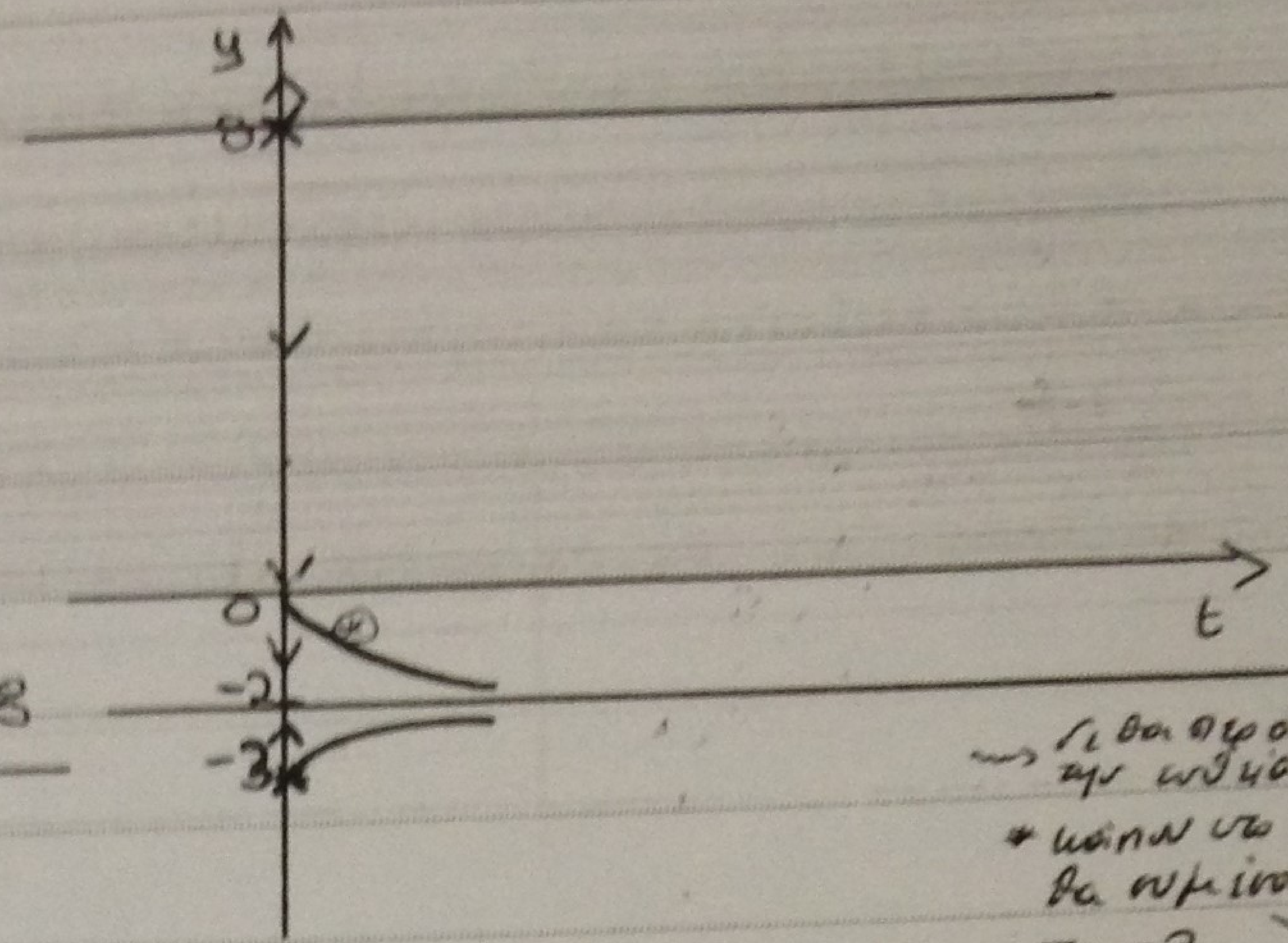
ii) $\begin{pmatrix} y' = f(y) \\ y(0) = -3 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} y' = f(y) \\ y(0) = 8 \end{pmatrix}$

Λύση:

$$y' = \underbrace{y^2 - 6y - 16}_{f(y)}$$

$$\left(\begin{array}{l}\lim_{t\to+\infty} y(t) \\ \\ y(0)=0,\ y(0)=-3,\ y(0)=8\end{array}\right.$$



→ τι θα συμβαίνει την λύση

* κάποια στο άπειρο θα συγκλίνουν με το -2

$f(y) = y^2 - 6y - 16$

* $f(y)=0$, $\bar{y}_1 = -2$, $\bar{y}_2 = 8$ (σημεία ισορροπίας)

* έχω αρχ. τιμ., άρα έχω να λύσω 3 προβλήματα

⊕ για την αρχ. τιμ. μεταξύ των ε. ξέρω ότι είναι φθίνουσα και ποτέ δεν τέμνει την άλλη)

i) $\left(\begin{array}{l} y' = y^2 - 6y - 16 \\ y(0) = 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$ μοναδική λύση $y_1(t)$

\+ σύμφωνα με το διάγραμμα

ii) $\left(\begin{array}{l} y' = y^2 - 6y - 16 \\ y(0) = -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$ μοναδική λύση $y_2(t)$

Έχουμε:

$$\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = -2$$

$$\lim_{t\to+\infty} y_2(t) = -2$$

* Εδώ προσοχή! Στο iii πρόβλημα

iii) $\left(\begin{array}{l} y' = y^2 - 6y - 16 \\ y(0) = 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow$ μοναδική λύση $y_3(t) = 8$

* δεν μπορεί να περάσει από το ίδιο σημείο 2η λύση (ήδη περνάει η λύση $y=8$), άρα μόνο η $y=8$ είναι λύση.

$$\lim_{t\to+\infty} y_3(t) = 8$$

<u>Άσκηση:</u> Με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, να λυθεί η Δ.Ε.

$$y'' + t y' + y = 0 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ y'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n t^{n-1} \\ y''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1) a_n t^{n-2} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$(1)(2)\quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \underbrace{t \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n t^{n-1}}_{\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$n-2 = k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + (n+1) a_n \right] t^n = 0$$

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}}$$

$n = 0, 2, 4, \ldots$

$$a_{\underset{2\cdot 1}{2}} = -\frac{a_0}{2}$$

$$a_{\underset{2\cdot 2}{4}} = -\frac{a_2}{2} = \frac{a_0}{2\cdot 4}$$

$$a_{\underset{2\cdot 3}{6}} = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6}$$

$\vdots$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{\underset{2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdots 2k}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}} = \frac{(-1)^k a_0}{2^k \cdot k!}$$

$n = 1, 3, 5, \ldots$

$$a_{\underset{(2\cdot 1+1)}{3}} = \frac{a_1}{3}$$

$$a_{\underset{(2\cdot 2+1)}{5}} = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3\cdot 5}$$

$$a_{\underset{(2\cdot 3+1)}{7}} = -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3\cdot 5\cdot 7}$$

$\vdots$

$$a_{2k+1} = \frac{\overset{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}{(-1)^k a_1}}{\underset{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1)}} = \frac{(-1)^k 2^k k! \cdot a_1}{(2k+1)!}$$

*τεχνική για να βγει πάλι πιο ωραίο

Οπότε, η λύση θα είναι:

$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{(-1)^n \cdot t^{2n}}{2^n \cdot n!}} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n! \cdot t^{n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} = e^{-t^2/2}$$

Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

f συνεχής σε ορθογώνιο

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \underset{\text{ΠΑΤ}}{①} \iff y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds \quad ②$$

το παίρνω έτοιμο

$$\left(\int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds \right.$$

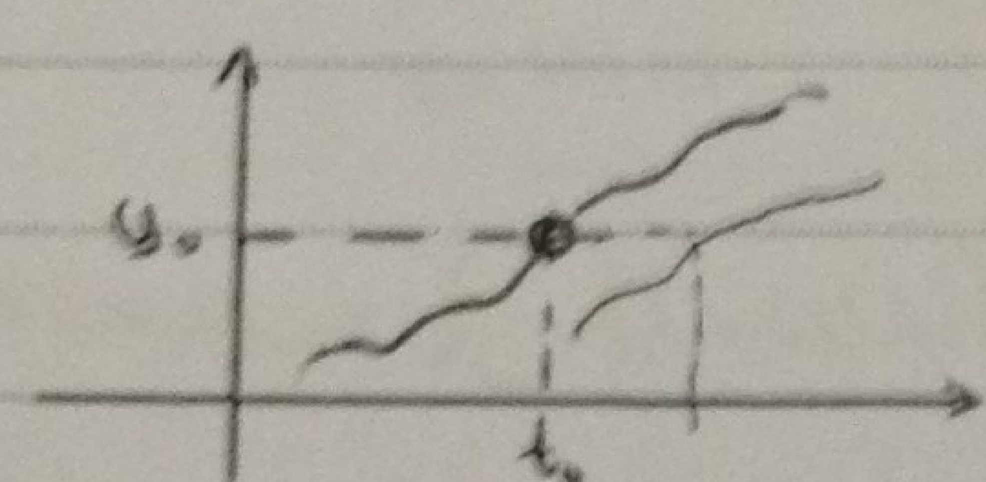
$$y(t) - \underbrace{\boxed{y(t_0)}}_{y_0} = \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds$$

$$\left. \to y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds \right)$$

Ερωτήματα:

- Έχει λύση;
- Αν έχει λύση, είναι μοναδική;
- Αν η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα;

* μικροαλλαγές στα δεδ., τι συμβαίνει;



Προσεγγίσεις Picard

* λόγω της δυσκολίας επίλυσης, θα χρειασαί Προσεγγίσεις Picard

$$\boxed{y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,ds \quad , n = 1, 2, \ldots} \quad ③$$

* από όλες αυτές τις μορφές ικανοποιείται η αρχ. συνθήκη
* μέχρι στιγμής [illegible]

Παρατήρηση:

Όλες οι $y_n(t)$ θα ικανοποιούν πάντα την αρχική συνθήκη

$$\begin{cases} y_0(t) = y_0 \leftarrow \text{αρχική} \\ y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))\,ds \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,ds \\ \vdots \end{cases}$$

$$y_n(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, y_{n-1}(s))\,ds = y_0$$

[illegible]

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί η ακολουθία Picard

$$\begin{pmatrix} y' = y \\ y(0) = 1 \end{pmatrix} \quad \text{π.α.τ.}$$

$t_0 \quad y_0$

$f(t,y) = y$ συνεχής

παρ

① $\Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$

③

$n = 0, \quad y_0(t) = 1$ ← αρχ. συνθ.

$y_0(t) = 1$

$n = 1, \quad y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))\,ds$

$= 1 + \int_0^t ds$

$= 1 + t$

$n = 2, \quad y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))\,ds$

$= 1 + \int_0^t (1+s)\,ds$

$= 1 + \left[\frac{(1+s)^2}{2} \right]_0^t$

$= 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!}$

$\vdots \qquad \vdots$

$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,ds \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$

$= 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$

[illegible]

* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

$S_1 = a_1$

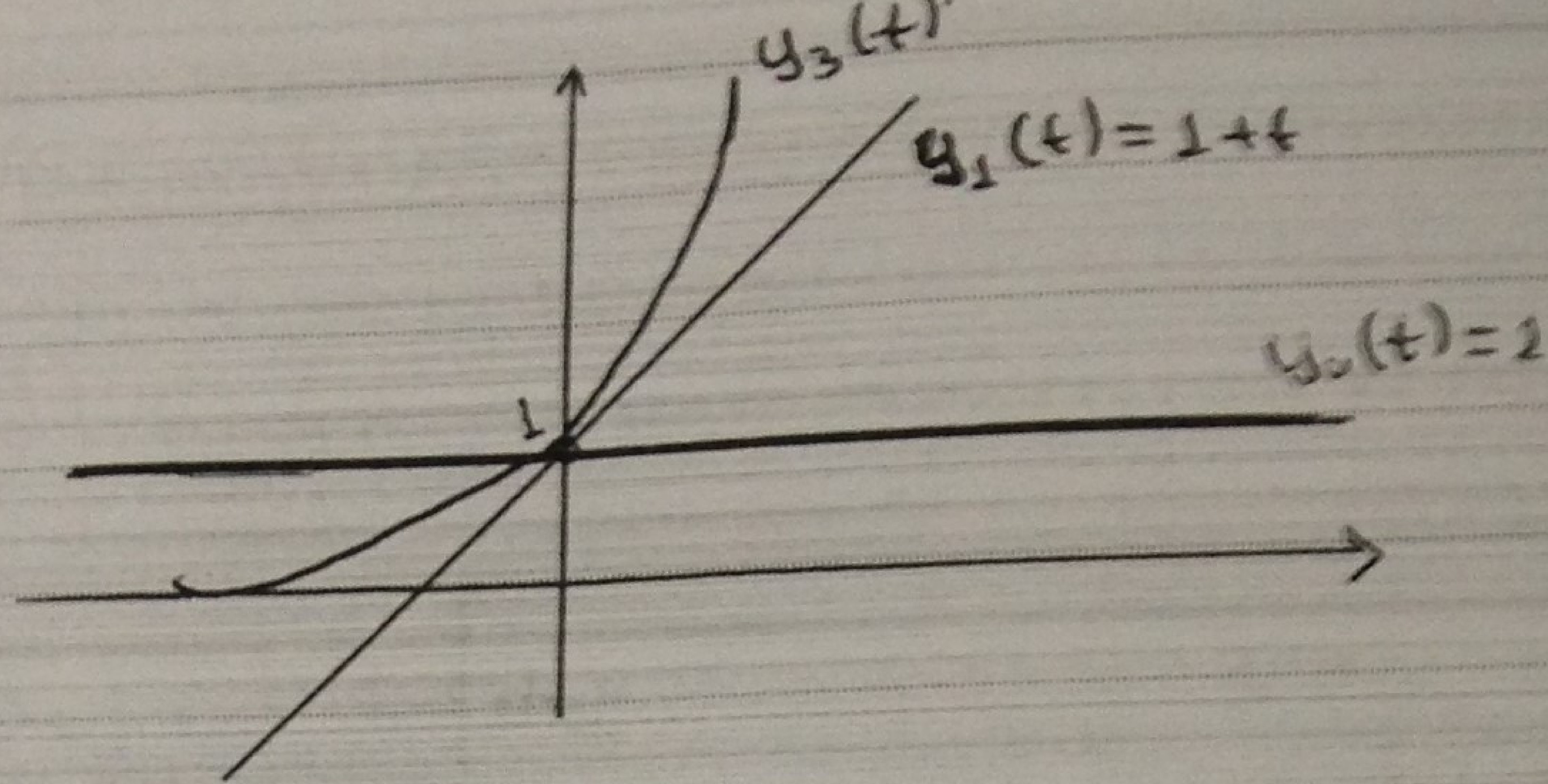
Για να δω αν συγκλ.: ακολ. μερ. αθροισμάτων

$S_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει



* μπορεί να εφαρμοσθεί το Picard με μια απλή λύση.

$$\begin{pmatrix} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{pmatrix} \underset{①}{\text{π.α.τ.}} \iff y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds \quad ②$$

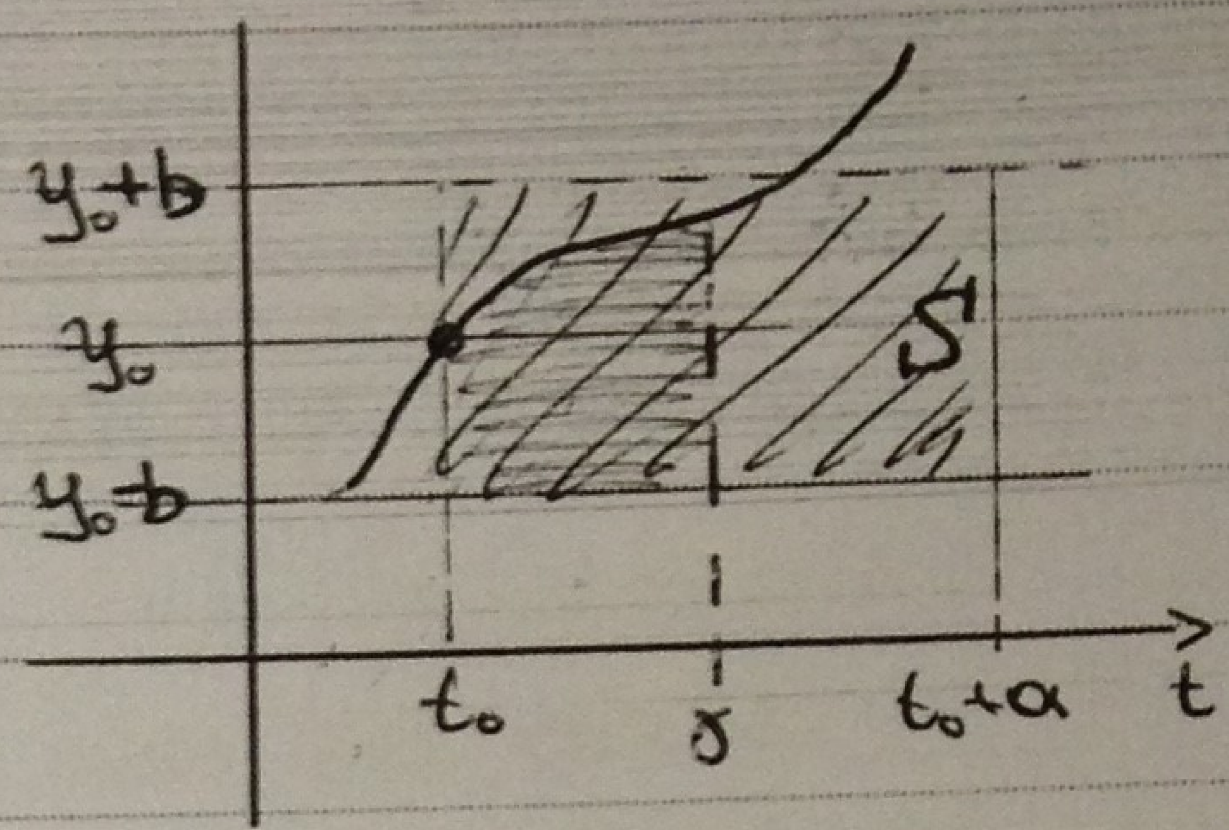
$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,ds \quad ③$$

46

<u>Θεώρημα (Ύπαρξης και Μοναδικότητας) (Picard-Lindelöf)</u>

<u>Έστω</u>

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1) \ \text{π.α.τ.}$$



<u>Θεωρούμε</u> το ορθογώνιο

$$S = \{(t,y) : t_0 \le t \le t_0 + a, \ |y - y_0| < b\}$$

$f, \dfrac{\partial f}{\partial y}$, συνεχείς στο S

<u>Τότε</u> το π.α.τ. έχει μοναδική λύση στο $[t_0, t_0+\gamma]$, όπου

$$\gamma = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_S |f(t,y)|$$

δεν φαίνεται δύσκολο - ίσως να λέει

<u>Απόδειξη:</u> Θεωρούμε τις προσεγγίσεις Picard $\{y_n(t)\}$:

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

Θα αποδείξουμε:

δε χρειάζεται απόδειξη

1) $|y_n(t) - y_0| \le M(t - t_0), \quad t_0 \le t \le t_0 + a$

Πράγματι:

$$|y_n(t) - y_0| = \left|\cancel{y_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,ds - \cancel{y_0}\right|$$

*λόγω συνέχειας

$$\le \int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n-1}(s))|\,ds \le M(t - t_0)$$

η διαφορά των διαδοχικών μικραίνει επόμενα

2) $|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le \dfrac{ML^{n-1}}{n!}(t - t_0)^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t_0 \le t \le t_0 + a$

$$L = \max_S \left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right|$$

Επαγωγικά:

i) Για $n=1$, έχουμε:

$$|y_1(t)-y_0(t)| \leq \frac{M L^0}{1!}(t-t_0) = M(t-t_0)$$ (Ισχύει από το 1º σκέλος)

ii) Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$

$$|y_k(t)-y_{k-1}(t)| \leq \frac{M L^{k-1}}{k!}(t-t_0)^k \quad , k \in \mathbb{N}$$

iii) Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$

$$|y_{k+1}(t)-y_k(t)| \leq \frac{M L^k}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1} \ ?$$

Πράγματι:

$$|y_{k+1}(t)-y_k(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,y_k(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} f(s,y_{k-1}(s))\,ds\right|$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t}\left[f(s,y_k(s)) - f(s,y_{k-1}(s))\right]ds\right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s,y_k(s)) - f(s,y_{k-1}(s))|}\,ds$$

$$= \int_{t_0}^{t}\left(\left|\int_{y_{k-1}}^{y_k} \frac{\partial f(s,y)}{\partial y}\,dy\right|\right)ds$$

* όπως $\int y' = y$ αλλά κι μερικέ

$$\leq L \int_{t_0}^{t} |y_k(s)-y_{k-1}(s)|\,ds$$

$$\leq \frac{L M L^{k-1}}{k!}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^k\,ds$$

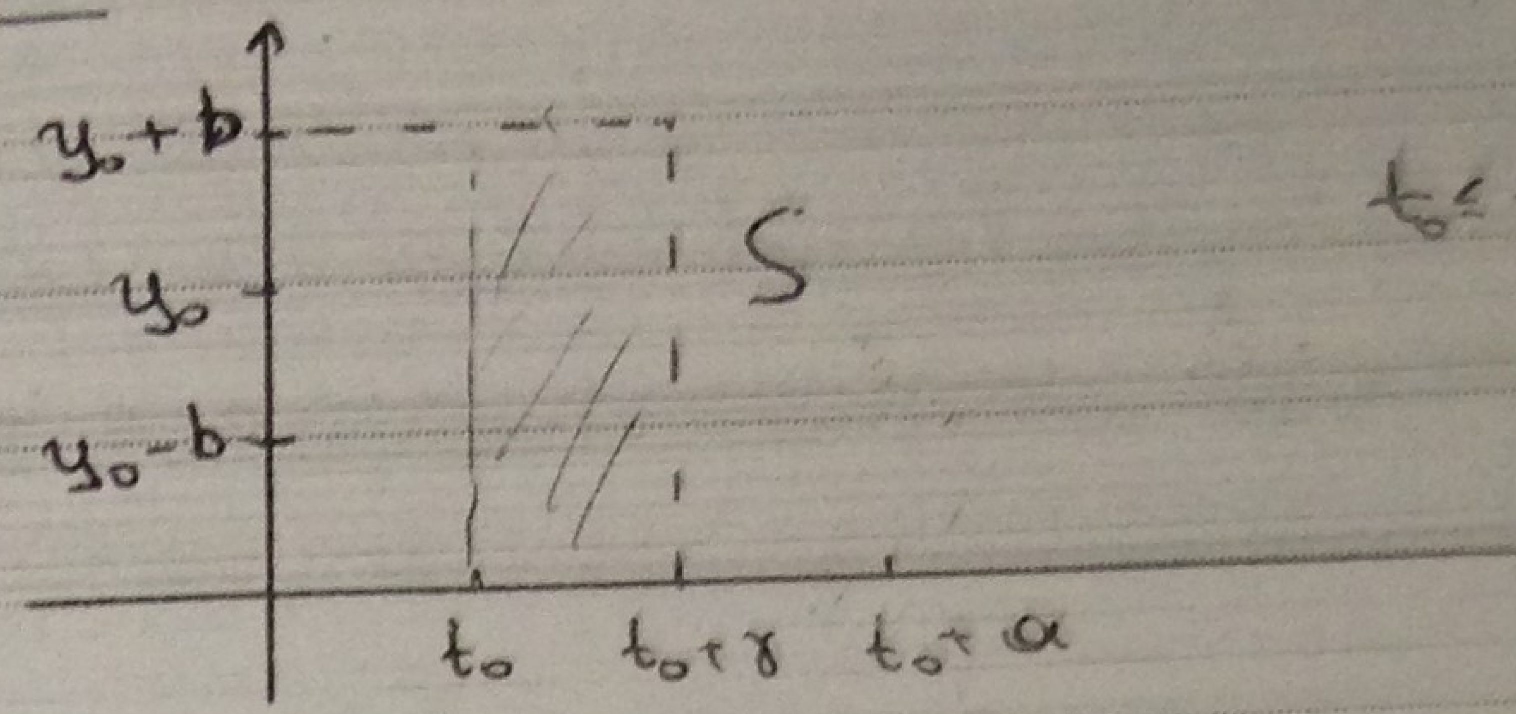
$$= \frac{M L^k}{k!}\,\frac{(s-t_0)^{k+1}}{k+1}\Bigg]_{t_0}^{t}$$

$$= \frac{M L^k}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1}$$ (Ισχύει για $n=k+1$)

Άρα η σχέση ισχύει.

Θεώρημα (P-L) (Ύπαρξης και μοναδ.)

Υπόθ.: F, $\dfrac{\partial F(t,y)}{\partial y}$ συνεχείς



$t_0 \le t \le t_0+a$

Απόδειξη:

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,ds$$

$y_0(t) = y_0$

1. $|y_n(t) - y_0| \le M(t-t_0)$

2. $|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le \dfrac{ML^{n-1}}{n!}(t-t_0)^n \quad , n=1,2,\dots$

3. $\lim y_n(t) = \;;$

$$y_n(t) = y_0(t) + [y_1(t)-y_0(t)] + [y_2(t)-y_1(t)] + \dots + [y_n(t)-y_{n-1}(t)] \quad (A)$$

Παίρνουμε το $\lim_{n\to\infty} y_n(t)$

Έχουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n(t) - y_{n-1}(t))$

Θεωρούμε (από βήμα 2)

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le \frac{ML^{n-1}}{n!}\gamma^n = \frac{M}{L}\underbrace{\frac{L^n\gamma^n}{n!}}$$

αριθμ. ακολουθία της οποίας η αντίστοιχη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^n\gamma^n}{n!} = e^{L\gamma} - 1$$

Από κριτήριο Weierstrass η $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n(t) - y_{n-1}(t))$ συγκλίνει ομοιόμορφα

δηλ. $\lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t)$

4. Να αποδείξουμε ότι η $y(t)$ ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση (2).

$$y_n(t) = y_0(t) + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\, ds \quad (3)$$

Παίρνουμε τα όρια (λόγω συνέχειας)

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

5. Να αποδείξετε ότι η $y(t)$ λύση μοναδική του ΠΑΤ (1)

Έστω $z(t)$ μια άλλη λύση του (1).

$$z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\, ds$$

Από βήμα 2. επαγωγικά έχουμε:

$$|y_n(t) - z(t)| \leq \frac{M L^{n} (t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (*)$$

$$(*) = \frac{M}{L} \frac{L^{n+1} (t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Άρα $y(t) = z(t)$.

Άρα $y(t)$ μοναδική λύση του (1).

Παρατηρούμε ότι:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = \left| \int_{y_2}^{y_1} \frac{\partial F(t,y)}{\partial y} dy \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial F(t,y)}{\partial y} \right| dy$$

$$\leq L|y_1 - y_2| \quad (L>0)$$

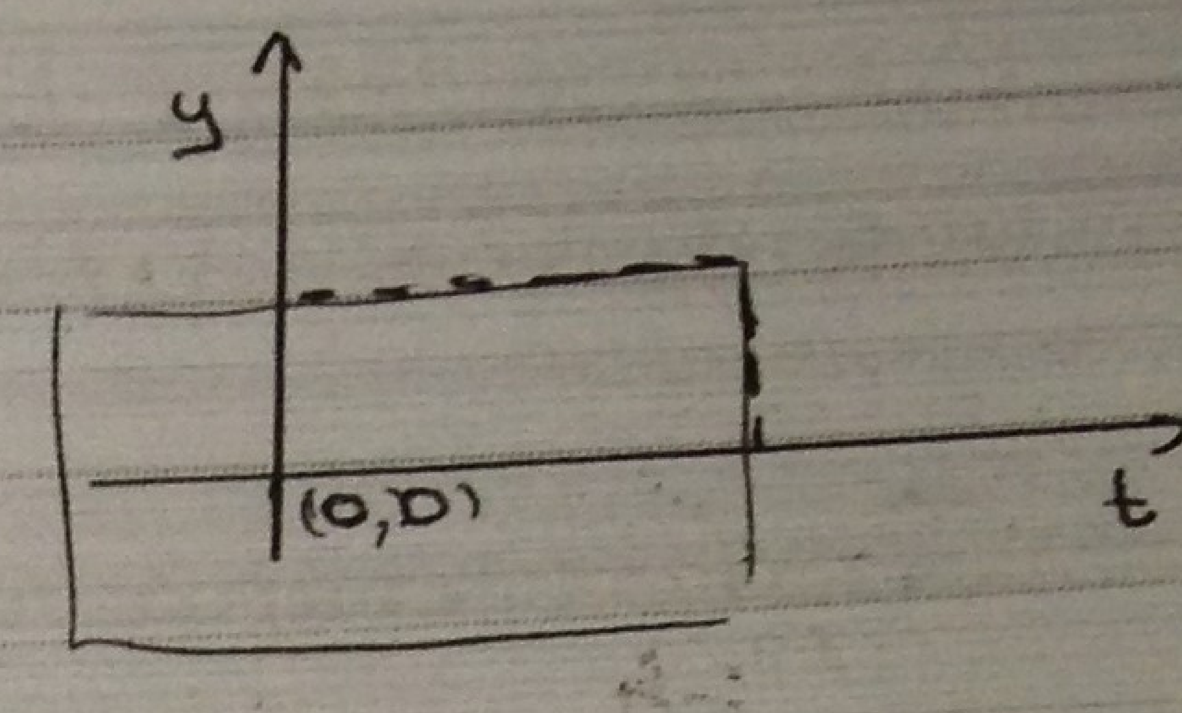
Στην περίπτωση αυτή, η f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz με σταθερά $(L>0)$.

Παρατήρηση: Αν στο θεώρημα αντικαταστήσουμε τη συνθήκη $\frac{\partial F(t,y)}{\partial y}$ (συνεχής) με τη συνθήκη

f Lipschitz (δε θα έχουμε αλλαγή στο συμπέρασμα).

Άσκηση:

$f(t,y) = y^{2/3}$ (όχι Lipschitz)



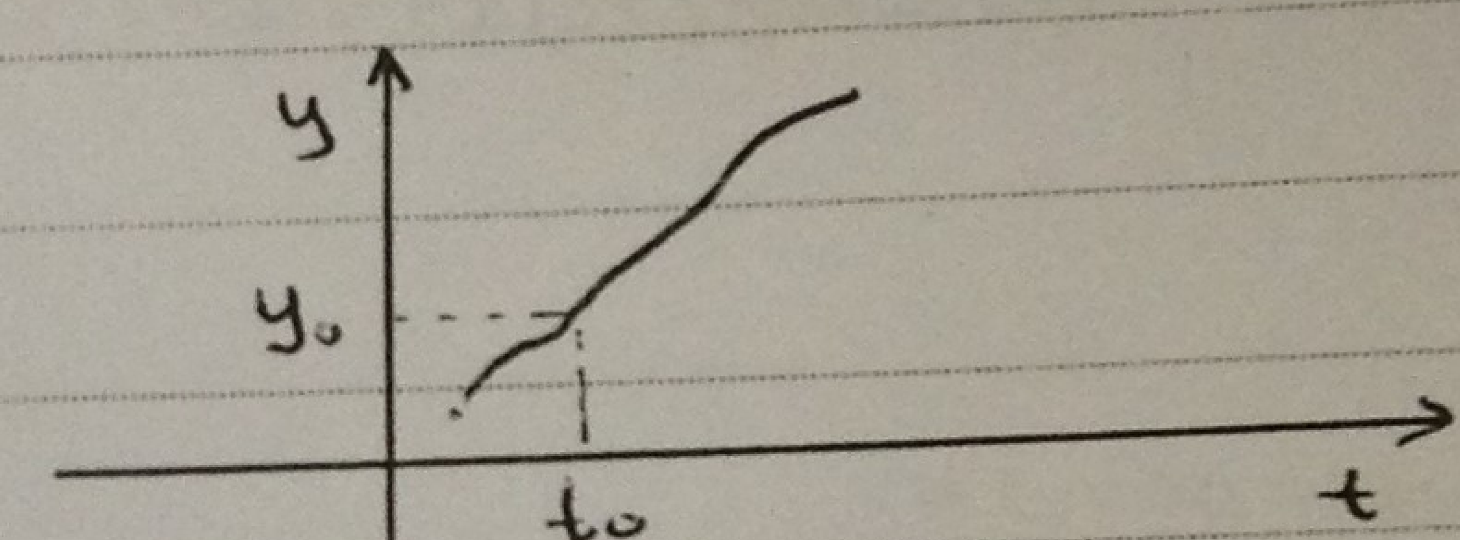
$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \underset{;}{\leq} L|y_1 - y_2|$ κοντά περ. $(0,0)$

$|-y^{2/3}| \underset{;}{\leq} L|y|$

$\left|\frac{y^{2/3}}{y}\right| = \frac{1}{|y^{1/3}|} \longrightarrow \infty$ συν. η $f(t,y) = y^{2/3}$ όχι Lipschitz

Παρατήρηση:

$$\left(\begin{array}{l} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right) \quad ① \text{ π.α.τ.}$$



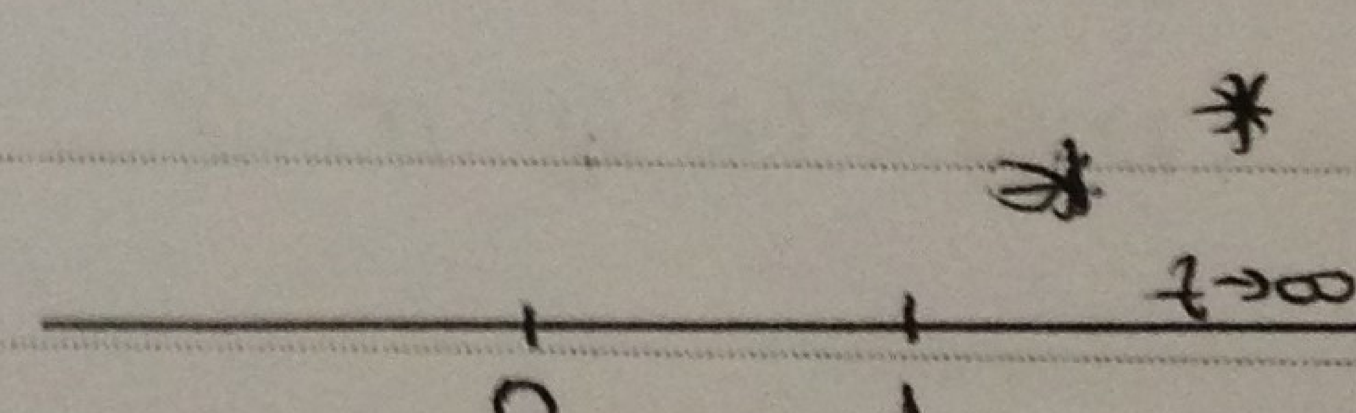
Το πεδίο ορισμού της λύσης του π.α.τ ① ορίζεται σαν το μέγιστο ανοικτό διάστημα $I = (a,b)$ του t, μέσα στο οποίο ορίζεται η λύση και που περιέχει το t_0.

Π.χ.

$$\left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = y^2 \\ \\ y(0) = 1 \end{array}\right) \rightarrow y(t) = -\frac{1}{t+c}$$

$y(\underset{t_0}{\underset{\downarrow}{0}}) = \underset{y_0}{\underset{\downarrow}{1}} \Rightarrow c = -1$

Άρα $y(t) = -\frac{1}{t-1}$



$I = (-\infty, 1)$

$I=(a,b)$

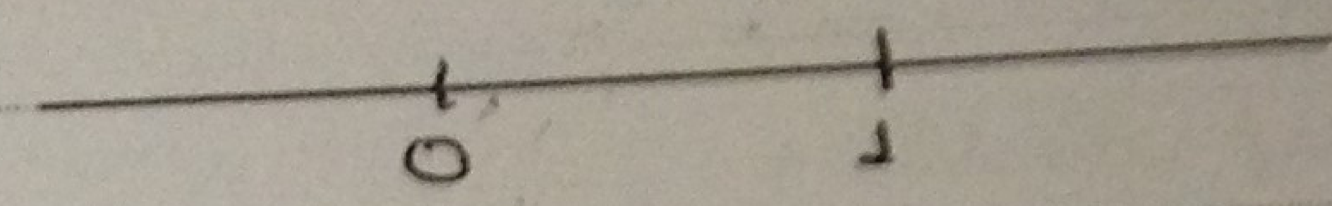
Παρατήρηση:

Αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια (δηλ. $t\to a^+$ ή $t\to b^-$), τότε η λύση μπορεί να επεκταθεί εκτός του διαστήματος $I=(a,b)$.

Στην περίπτωση που $\lim\limits_{\substack{t\to a^+ \\ \text{ή } t\to b^-}} |y(t)| = +\infty$, τότε λέμε

ότι η λύση εκρήγνυται.

$y(t) = -\dfrac{1}{t-1}$, $(-\infty, 1)$

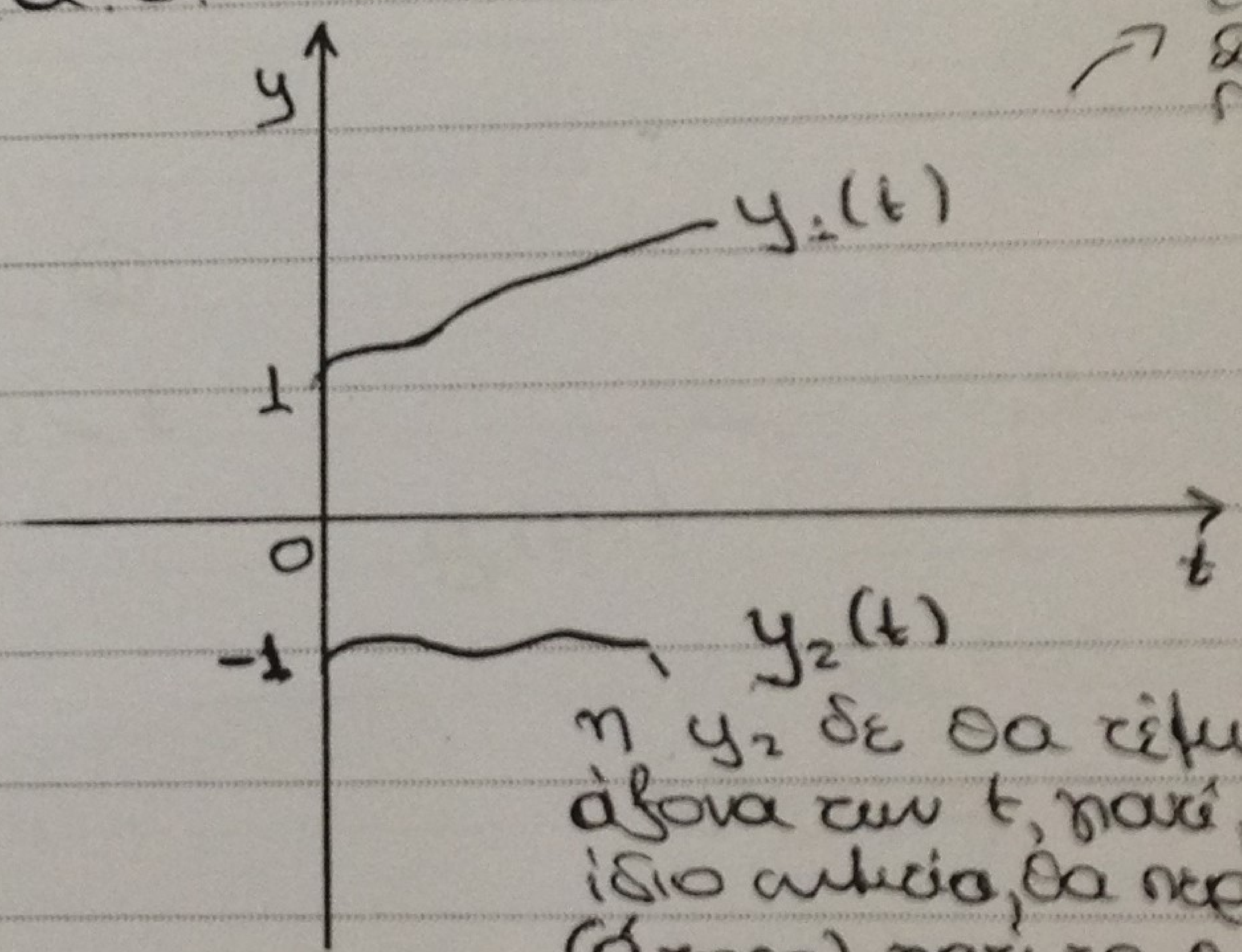


$\lim\limits_{t\to 1^-} y(t) = +\infty$ (η λύση του π.α.τ. εκρήγνυται)

Άσκηση: Δίνονται τα π.α.τ.

$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ① $\rightsquigarrow y_1(t)$ (συνεχής), $y_1(t) = e^t$

$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = -1 \end{cases}$ ② $\rightsquigarrow y_2(t)$, $y_2(t) = -e^t$



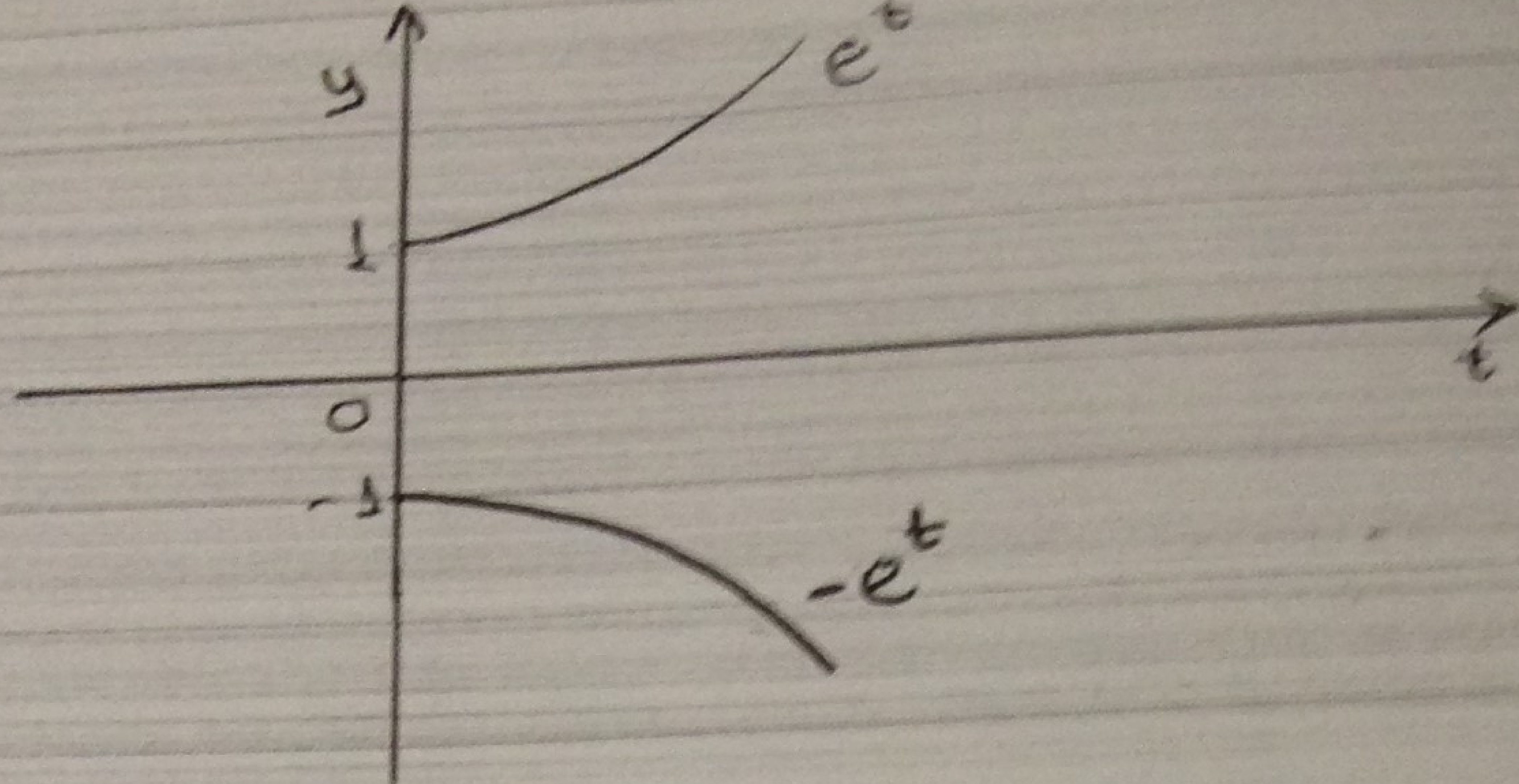
* Επίσης η y_2 δεν τέμνει άλλη λύση, δεν υπάρχουν γενικά τομές

η y_2 δε θα τέμνει τον άξονα των t, γιατί, από το ίδιο σημείο, θα περνάνε 2 λύσεις (άτοπο), γιατί το π.α.τ. ② έχει μοναδική λύση την $y_2(t)$

Ερωτήματα:

- Τέμνει η $y_1(t)$ τον άξονα των t; ή η $y_2(t)$ τέμνει τον άξονα των t;
- Είναι η $y_1(t) > y_2(t)$;

* Εδώ οι λύσεις ήταν σχετικά απλές, δε δίνονται, όμως, όλες οι διαφορικές - κάποιες φορές πρέπει να βλέπουμε τη συμπεριφορά τους



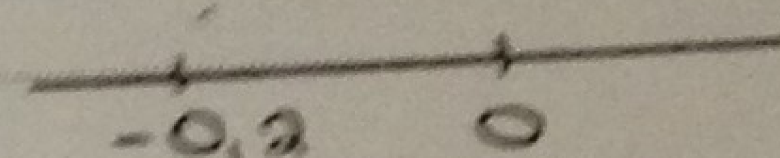
Άσκηση: Θεωρούμε

$$\left(\begin{array}{l} y' = \dfrac{(1+t)^2}{(1+y)^2} \\ \\ y(0) = -0{,}2 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ \text{Π.Α.Τ.} \\ y_1 \end{array}$$

Έστω $y_1(t)$, λύση του (1), $\forall\ t \in I$.

Να δειχθεί ότι $y_1(t) < t$, $\forall\ t \in I$

* Εδώ δεν μπορώ να βρω λύση - θα εξετάσω τη συμπεριφορά της μέσω μονοτονίας



Λύση:

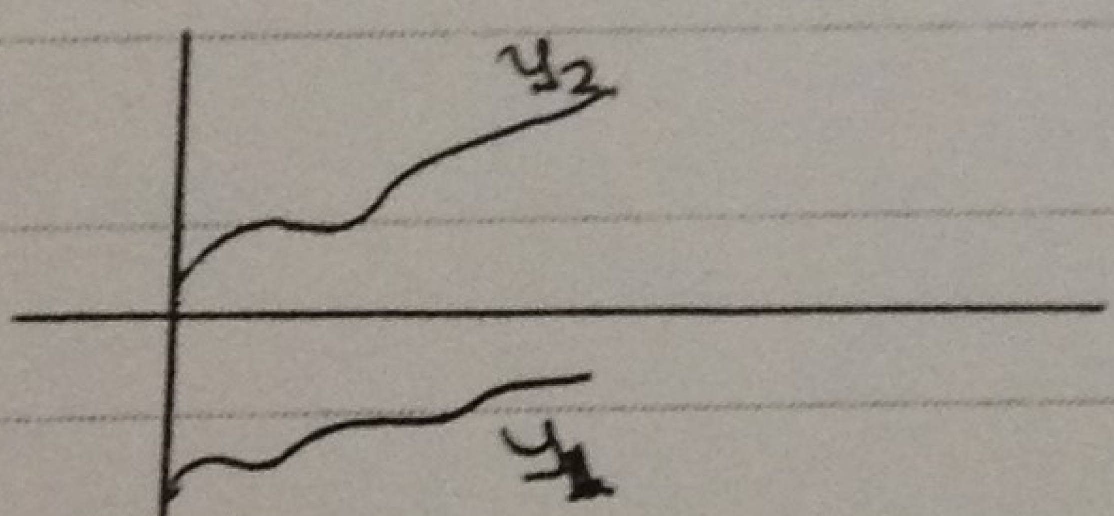
Θεωρούμε το Π.Α.Τ. (2)

$$\left(\begin{array}{l} y' = \dfrac{(1+t)^2}{(1+y)^2} \\ \\ y(0) = 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow y_2(t) = t$$

$y_2(t) = t$

$$-0{,}2 < 0$$
$$\downarrow$$
$$y_1(0) < y_2(0)$$

(* Δηλ., στη θέση 0 ισχύει)



Λόγω του θεωρήματος μοναδικότητας:

$$y_1(t) < t \ , \ \forall\ t \in I$$