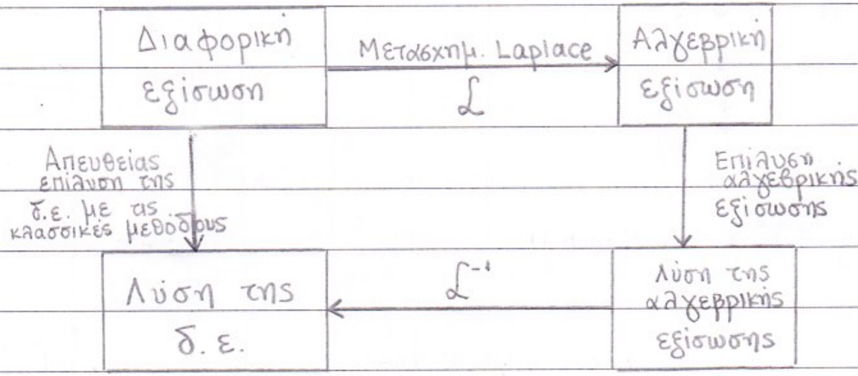
Μετασχηματισμός Laplace

Μία άλλη μέθοδος επίλυσης γραμμικών δ.ε είναι ο μετασχημ Laplace (ML). Αυτός μετασχηματίζει μία δ.ε σε αλγεβρική εξ. Τότε, η μετασχηματισμένη κατά Laplace $Y(s)$ της $y(t)$ ικανοποιεί μία αλγεβ. εξ η οποία επιλύεται. Στη συνέχεια αντιστρέφουμε το μετασχημ. Laplace και βρίσκουμε τη λύση της δ.ε

Σχηματικά:



Ορισμός:

Για μία συνάρτηση $f(t)$, $t \in [0,+\infty)$, ο M.L. συμβολίζεται

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \text{ ή } Y(s)$$

και ορίζεται:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = Y(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Σχόλιο:

Για την ύπαρξη του γενικευμένου ολοκληρώματος, υποθέτουμε ότι η f είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης.

Ορισμός:

Η συνάρτηση $f(t)$ λέγεται εκθετικής τάξης $(t \to +\infty)$ ανν υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές M, c, T τ.ω.:

$$|f(t)| \leq M e^{ct}, \quad \forall\, t \geq T$$

πχ. Να υπολογιστεί ο M.L. $\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at}\, dt$

$\boxed{\text{όπου } t = a-s}$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-st} e^{\alpha t}}_{e^{(\alpha-s)t}}\, dt = \frac{1}{a-s} \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{(\alpha-s)t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha - s} \lim_{b \to +\infty} \left[e^{(\alpha-s)b} - 1 \right] = \frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$$

πχ. $\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(\alpha t)\, dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-st} \sin at\, dt$$

$$\int e^{-st} \sin at\, dt = -\frac{1}{a} \int e^{-st} (\cos at)'\, dt = -\frac{1}{a} \left[e^{-st} \cos at + s \int e^{-st} \cos at\, dt \right]$$

$$= -\frac{1}{a} \left[e^{-st} \cos at + \frac{s}{a} \int e^{-st} (\sin at)'\, dt \right] =$$

$$= -\frac{1}{a}\left[e^{-st}\cos at + \frac{s}{a}\left(e^{-st}\sin at + s\int e^{-st}\sin at\,dt\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)\int e^{-st}\sin at\,dt = \int_0^b e^{-st}\sin at\,dt = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+s^2}\left[-\frac{1}{a}e^{-st}\cos at - \right.$$

$$\left. - \frac{s}{a^2}e^{-st}\sin at\right]_0^b$$

άρα $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-st}\sin at\,dt = \dfrac{a}{\alpha^2+s^2}$

Γενικά, χρησιμοποιούμε το εξής τυπολόγιο:

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ
$f(t)$	$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{n-j} f^{(n-1)}(0)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
1	$1/s$
e^{at}	$1/s-a \quad , s>a$
$\delta_a(t)$	e^{-as}
$\sin\omega t$	$\omega / s^2+\omega^2$
$e^{at}\sin\omega t$	$\omega / (s-a)^2+\omega^2$
$t\sin\omega t$	$2\omega s/(s^2+\omega^2)^2$
$\cos\omega t$	$s / s^2+\omega^2$
$e^{at}\cos\omega t$	$s-a / (s-a)^2+\omega^2$
$t\cos\omega t$	$s^2-\omega^2/(s^2+\omega^2)^2$
$u_a(t)$	$e^{-as}/s \quad , s>0$
t^n	$n!/s^n+1 \quad , s>0$

πχ. $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-st} f'(t)dt =$

$= \lim_{b\to+\infty} \left[\underbrace{e^{-st} f(t)}_{\xrightarrow{b\to\infty} 0} \Big|_{t=0}^{b} + s\int_0^b e^{-st} f(t)\,dt \right] = \lim_{b\to+\infty} \left[e^{-sb} f(b) - f(0) + s\int_0^b e^{-st} f(t)dt \right]$

$= s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$

Ιδιότητες :

1. Γραμμικότητα :
$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\} = \lambda\,\mathcal{L}\{f(t)\} + \mu\,\mathcal{L}\{g(t)\} = \lambda F(s) + \mu G(s)$
2. Μετατόπιση ως προς s :
Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε $\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(s-\alpha)$
3. Μετατόπιση ως προς t :
Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε $\mathcal{L}\{f(t-\alpha) = e^{-\alpha s} F(s)$
4. Αλλαγή κλίμακας :
Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
5. Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός

Αν f, g κατά τμήματα συνεχείς και εκθετικής τάξης συναρτήσεις με $F(s) = G(s)$ (δηλ. οι Μ.L.), τότε $f(t) = g(t)$ $\forall\, t \in [0, +\infty)$, στα σημεία συνέχειας των f, g.

Μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό ως εξής:

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$

Υπενθύμιση:

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Θεώρημα: (Μονοσημάντου του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace)
Έστω $f(t)$, $g(t)$ συναρτήσεις κατά τμήματα συνεχείς και εκθετικής τάξης στο $[0, +\infty)$
Έστω ακόμα ότι ισχύει: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$ $\forall s > a$.
Τότε, στα σημεία ασυνέχειας έχουμε $\overset{F(s) = G(s)}{} f(t) = g(t)$, $t > 0$.

Ορισμός:
Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε η $f(t)$ λέγεται αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $F(s)$ και συμβολίζεται με $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Ιδιότητες του αντίστροφου μετασχ. Laplace:
1. Γραμμικότητα:
$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s) + c_2F_2(s)\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$
2. Μετατόπιση:
Αν $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$, $a \in \mathbb{R}$
3. Αν $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, τότε $\mathcal{L}^{-1}\{sF(s) - f(0)\} = f'(t)$
4. Αν $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, τότε $\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$.

πχ. Να βρεθούν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace:

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+9}\right\} = \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} = \frac{2}{3}\sin 3t$

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}t^4$

$\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-4}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = 3e^{4t}$, $s>4$.

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+3}{s^4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^4}\right\} = t + \frac{3}{3!}t^3$

Εφαρμογές στις διαφορικές εξισώσεις:

1. Να λυθεί με χρήση του μετασχ. Laplace: $y' + y = t$.

λόγω γραμμικότητας του μετ. Laplace, έχουμε:

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\}$$

$$sY(s) - \underbrace{y(0)}_{c} + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s+1)Y(s) = \frac{1}{s^2} + c$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} + \frac{c}{s+1}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma}{s+1} \quad \Bigg\| \begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \\ \Gamma=2 \end{array}$$

$$Y(s) = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{c+2}{s+1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{-1/s\} + \mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} + (c+2)\mathcal{L}^{-1}\{1/s+1\}$$

άρα, έχουμε:

$$y(t) = -1 + t + (c+2)e^{-t}$$

Θα μπορούσε να δίνεται και σαν πατ: $\left(\begin{array}{c} y' + y = t \\ y(0) = 1 \end{array} \right)$, οπότε βρίσκω το c μέσω της αρχικής συνθήκης.

2. Να λυθεί με χρήση μετασχ. Laplace το πατ: $\left(\begin{array}{c} y'' + y = t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{array} \right)$

Λόγω γραμμικότητας:

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{t\}$$

$$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=1} - \underbrace{y'(0)}_{-2} + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{1}{s^2} + s - 2$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+1} \qquad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s^2+1} + \frac{}{s^2+1}$$

$\vdots$

$$y(t) = t - 3\sin t + \cos t$$

(καλό είναι στο τέλος να κάνω επαλήθευση)