Παρασκευή 08-03-2019

Να λυθεί η: $y' + y = ty^2$

Διαφ. εξ. 1ης τάξης - ειδικής μορφής που ανάγονται σε χωριζομ. μεταβλητών

Ορισμός:

$$\frac{dy}{dt} = f(\underbrace{at+by}_{z}) \quad , \quad a,b \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Επίλυση της (1):

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό:

$$z = at + by$$

$$\frac{dz}{dt} = a + b\frac{dy}{dt} = a + bf(z)$$

$$\frac{dz}{a+bf(z)} = dt \quad (\text{δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών})$$

Να βρεθεί η λύση της δ.ε.: $\frac{dy}{dt} = 2t + y \qquad (1)$

Θέτουμε το μετασχηματισμό:

$$z = 2t + y$$

$$\frac{dz}{dt} = 2 + \frac{dy}{dt} = 2 + z$$

$$\frac{dz}{z+2} = dt$$

$$\ln|z+2| = t + c_1$$

$$|z+2| = e^{c_1} e^t$$

$$z+2 = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{c} e^t$$

$$z = c \cdot e^t - 2 \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$2t + y = ce^t - 2$$

$$\boxed{y(t) = ce^t - 2t - 2}$$

Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε.: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{\underbrace{t-y}_{z}} + 1 \quad (1)$

Θέτουμε τον μετασχηματισμό:

$$z = t - y$$

$$\frac{dz}{dt} = 1 - \frac{dy}{dt} = \cancel{1} - \frac{1}{\underbrace{t-y}_{z}} - \cancel{1}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z}$$

$$z\,dz = -dt$$

$$\frac{z^2}{2} = -t + c_1$$

$$z^2 = -2t + \underbrace{2c_1}_{c}$$

$$(t-y)^2 = -2t + c$$ (η λύση είναι σε πεπλεγμένη μορφή)

Να λυθεί: $\begin{pmatrix} y' + ay = \int_0^b y\,dt \\ y(0) = c \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $m = \int_0^b y\,dt$

(εφαρμογή) Να λυθεί: $\begin{pmatrix} y' + y = \int_0^2 y(t)\,dt \\ y(0) = 1 \end{pmatrix}^{(1)} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{matrix}$

Θέτουμε $m = \int_0^2 y(t)\,dt$

$$y' + y = m \quad (2) \quad (p(t) = 1, \; q(t) = m)$$

$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{t}$

Πολ/ζω με $\mu(t)$ την (2)

$(ue^{t})' = me^{t}$

$\vdots$

$y(t) = ce^{-t} + m$

$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 - m$

άρα $y(t) = (1-m)e^{-t} + m$

$m = \int_0^2 y\,dt = \int_0^2 [(1-m)e^{-t} + m]\,dt$

$\vdots$

$m = 1 - e^{2}$

Τελικά, $\boxed{y(t) = e^{2-t} + 1 - e^{2}}$

Να λυθεί το ΠΑΤ : $\left(\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3t^2 + 4t + 2}{2(y-1)} \\ \\ y(0) = -1 \end{array} \right)$

Ακριβείς (ή πλήρεις) διαφορικές εξισώσεις

$y' = f(t,y)$

$\dfrac{dy}{dt} = f(t,y)$

$f(t,y) = \dfrac{M(t,y)}{N(t,y)} \neq 0$

ή ισοδύναμη γραφή:

$M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0 \quad (1)$

Παρατήρηση:

Αν $F(t,y)$: $\dfrac{\partial F}{\partial t}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$ συνεχείς

$\underset{\text{ολικό δ.}}{dF(t,y)} = \dfrac{\partial F}{\partial t}dt + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy$

Ορισμός:

Η διαφορική μορφή $M(t,y)dt+N(t,y)dy=0$ (1), M,N συν: $D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ (τόπος) ονομάζεται ακριβής, στο D, αν υπάρχει $F(t,y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους

$$\frac{dF(t,y)}{dt}=M(t,y) \quad (2)$$

$$\frac{dF(t,y)}{dy}=N(t,y) \quad (3)$$

δηλ. (1),(2),(3) $\frac{dF}{dt}dt+\frac{dF}{dy}dy=0$

$dF(t,y)=0 \Rightarrow F(t,y)=c$

Θεώρημα:

Έστω $M(t,y)$, $N(t,y)$ συνεχείς συναρτήσεις και με συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς t,y ($M,N: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$) στο D.

↳ απλά συνεκτικό σύνολο

Τότε, υπάρχει $F(t,y)$:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial t}=M\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}=N\end{array}\right\}\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$$

Απόδειξη:

$\Rightarrow$)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial t}=M\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}=N\end{array}\right\}\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial t}\right)=\dfrac{\partial M}{\partial y}, \text{ δηλ. } \dfrac{\partial F^2}{\partial y\partial t}=\dfrac{\partial M}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial N}{\partial t}\Rightarrow\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial t}, \text{ δηλ. } \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial t}.\end{array}$$

$\Leftarrow$) Ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$ (υπόθεση)

Θα δείξουμε ότι $\exists F(t,y)$: $\frac{\partial F}{\partial t}=M^{(1)}\Rightarrow F(t,y)=\int M\,dt+h(y)$ (3)

$$\frac{\partial F}{\partial y}=N^{(2)}$$

Παραγωγίζω την ως προς y.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M\,dt\right) + h'(y) = N$$

$$h'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M\,dt\right)$$

$$h(y) = \int \underbrace{\left(N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dt\right)}\,dy$$

Παρατήρηση:

Θα πρέπει να μην έχει t, δηλ. $\frac{\partial}{\partial t}\left(N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dt\right) = 0$

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad \text{(ισχύει από υπόθεση)}$$

Γενικά, $M\,dt + N\,dy = 0$ (1)

$F(t,y) = c$

Ακριβής $\underline{\underline{αν}}$ $\exists\, F(t,y)$: $\frac{\partial F}{\partial t} = M$

$\frac{\partial F}{\partial y} = N$

έχουμε: $dF(t,y) = 0$, δηλ. $F(t,y) = c$ $\longrightarrow$ Γενική λύση (3)

Να λυθεί η δ.ε.: $\underbrace{3x^2 - 2y^2}_{M(x,y)} + \underbrace{(1-4xy)}_{N(x,y)} \frac{dy}{dx} = 0$ (1)

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2y^2) = -4y$ (2)

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1-4xy) = -4$ (3)

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Άρα από θεώρημα, η (1) είναι ακριβής, άρα υπάρχει $F(x,y) = c$

ολοκληρώνω ως προς x

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2$ (4) $\quad F(x,y) = x^3 - 2xy^2 + h(y)$ (6)

$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - 4xy$ (5)

Παραγωγίζω την (5) ως προς y και συγκρίνω με την (5)

$-4xy + h'(y) = 1 - 4xy$

$h'(y) = 1$

$h(y) = y + c_1$ (7)

(6), (7): $F(x,y) = x^3 - 2xy^2 + y + c_1$ (8)

$x^3 - 2xy^2 + y + c_1 = c_2$

Τελικά, $x^3 - 2xy^2 + y = c$ (9) $\quad F(x,y) = c$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (9).

Να λυθεί: $ye^{xy}\,dx + (3 + xe^{xy})\,dy = 0$ (Απ: $e^{xy} + 3y = c$)

Περιπτώσεις:

$M\,dt + N\,dy = 0$ (1)

Αν η (1) δεν είναι ακριβής, τότε πολ/με με ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t,y) \neq 0$. (2)

(1), (2):

$$(\mu M)\, dt + (\mu N)\, dy = 0 \quad (3)$$

Για να είναι ακριβής η (3), θα έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial t} N - \mu \frac{\partial N}{\partial t}}$$ (4) Μερική διαφ. εξίσωση

1. Αν $\mu = \mu(t)$ (5)

(4), (5): $$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d\mu}{dt} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\frac{d\mu}{dt} N = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) \mu$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \underbrace{\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}}_{(6)}$$

Αν $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = f(t) \quad (7)$$

(6), (7) ολοκλ.

$$\ln|\mu(t)| = \int f(t)\, dt + c_1$$

$$|\mu(t)| = e^{c_1} \cdot e^{\int f(t) dt}$$

$$\mu(t) = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{c} \cdot e^{\int f(t) dt}$$

Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας θα είναι: $\boxed{\mu(t) = e^{\int f(t) dt}}$

Να λυθεί η: $$\overbrace{y^2 + 4ye^t}^{M} + \overbrace{2(y+e^t)}^{N} \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1)$$

αν δέχεται ολοκλ. παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$f(t) = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial t}{N} = \frac{2y + 4e^t - 2e^t}{2y + 2e^t} = \frac{2y + 2e^t}{2y + 2e^t} = 1 \quad (2)$$

$\mu(t) = e^{\int f(t)\,dt} = e^{t}$ (3)

(1), (3): $\underbrace{y^2 e^{t} + 4y e^{2t}}_{\tilde{M}} - \underbrace{(2ye^{t} + 2e^{2t})}_{\tilde{N}} \dfrac{dy}{dt} = 0$ (4)

(4): $\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial t}$ (6), δηλ η (4) ακριβής

Από θεώρημα υπάρχει $F(t,y) = c$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = y^2 e^{t} + 4ye^{2t}$ (7)

$\dfrac{\partial F}{\partial t} = 2ye^{t} + 2e^{2t}$ (8)

Ολοκληρώνω ως προς t:

$F(t,y) = y^2 e^{t} + 2ye^{2t} + h(y)$ (9)

(9) παραγωγίζω ως προς y και συγκρίνω με την (8)

$\cancel{2ye^{t}} + \cancel{2e^{2t}} + h'(y) = \cancel{2ye^{t}} + \cancel{2e^{2t}}$

$h'(y) = 0$

$h(y) = c_1$

δηλ. $y^2 e^{t} + 2ye^{2t} = c$ (10)

Η λύση είναι σε πεπλεγμένη μορφή στη (10)

Περίπτωση:

2. $\mu = \mu(y)$

$M dt + N dy = 0 \quad (1)$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$$

Δηλ. η (1) όχι ακριβής

Πολ/ζουμε την (1) με όλους $\mu = \mu(t, y)$

$(\mu M) dt + (\mu N) dy = 0 \quad (2)$, έτσι ώστε η (2) ακριβής

δηλ. $$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}} \quad (3)$$

(ii) $\mu = \mu(y)$ (4)

(4): $$\frac{d\mu}{dy} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\frac{d\mu}{dy} = \underbrace{\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}}_{g(y)} \cdot \mu$$

$$\mu(y) = e^{\int g(y)\,dy} \quad (5).$$

Να λυθεί η : $y^2 + (ty - 1)\frac{dy}{dt} = 0$, $y > 0$ (1), αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(y)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$$, η (1) όχι ακριβής.

$$\frac{N_t - M_y}{M} = \frac{y - 2y}{y^2} = -\frac{1}{y} = g(y) \quad (2)$$

$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{-\int 1/y \, dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$ (3)

(1), (3): $\underbrace{y}_{\tilde{M}} + \underbrace{\left(t - \frac{1}{y}\right)}_{\tilde{N}} \frac{dy}{dt} = 0$ (4)

$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}$, υπάρχει από θεώρημα $F(t,y)$:

$\frac{\partial F}{\partial t} = y$ (5) $\xrightarrow[\text{ως προς } t]{\text{ολοκληρώνω}}$ $F(t,y) = ty + h(y)$ (7)

$\frac{\partial F}{\partial y} = t - \frac{1}{y}$ (6)

Παραγωγίζω την (7) ως προς y και συγκρίνω με την (6).

$t + h'(y) = t - \frac{1}{y}$ (8)

$h'(y) = -\frac{1}{y}$

$h(y) = -\ln y + c_1$ (9)

Άρα, $F(t,y) = ty - \ln y + c_1$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στην αλγεβρική εξίσωση:

$F(t,y) = ty - \ln y + c_1 = c_2$

Γενική λύση της δ.ε.: $\boxed{ty - \ln y = c}$

Να λυθεί η δ.ε.: $(t+2)\sin y + (t\cos y)y' = 0$ (1) αν έχει ολ. παράγοντα $\mu(t) = te^{at}$ (2)

Πολ/ζω την (1) με (2):

$\underbrace{te^{at}(t+2)\sin y}_{M} + \underbrace{te^{at}(t\cos y)}_{N} y' = 0$ (3)

Πρέπει: $\frac{\partial(te^{at}(t+2)\sin y)}{\partial y} = \frac{\partial(te^{at}(t\cos y))}{\partial t}$

⋮

$t^2 + 2t = 2t + at^2$

$a = 1 \Rightarrow \mu(t) = te^t$ (4)

$$(t^2+2t)e^t \sin y + (t^2 e^t \cos y)\, y' = 0 \quad (5)$$

δηλ. $\exists\, F(t,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (t^2+2t)e^t \sin y \quad (6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = t^2 e^t \cos y \quad (7) \xrightarrow[\text{ως προς } y]{\text{ολ/ώνω}} F(t,y) = t^2 e^t \sin y + h(t). \ (8)$$

Παραγωγίζω την (8) ως προς t και συγκρίνω με την (6)

$$(2te^t + \cancel{t^2 e^t}) \sin y + h'(t) = (\cancel{t^2 e^t} + 2te^t)\sin y$$

$$h'(t) = 0$$

$$h(t) = c_1 \quad (9)$$

Από (8), (9): $F(t,y) = t^2 e^t \sin y + c_1$

Η λύση της δ.ε βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στην αλγ. εξίσωση

$F(t,y) = t^2 e^t \sin y + c_1 = c_2$

Γενική λύση της δ.ε.: $\boxed{t^2 e^t \sin y = c}$

$M\,dt + N\,dy = 0$ (1) όχι ακριβής

$(\mu M)\,dt + (\mu N)\,dy = 0$

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t} \quad (3)$$

περιπτώσεις:

(i) $\mu = \mu(\underbrace{t+y^2}_{s})$; $\overset{s(t,y)}{s} = t + y^2$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{ds}\frac{\partial s}{\partial y} = 2y \frac{d\mu}{ds} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{d\mu}{ds}\cdot\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{d\mu}{ds} \quad (5)$$

Από (3), (4), (5) έχουμε:

$$2yM\frac{d\mu}{ds} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{d\mu}{ds} + \mu\frac{\partial N}{\partial t}$$

$$(\underset{\neq 0}{2yM} - N)\frac{d\mu}{ds} = \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds} = \left.\frac{\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}{2yM - N}\right\} g(s)$$

$$\mu(s) = e^{\int g(s)ds}$$

Να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu(t+y^2)$ για τη δ.ε.:

$$\underbrace{(3t + 2y + t^2)}_{M}dt + \underbrace{(t + 4ty + 5y^2)}_{N}dy = 0 \quad (1)$$

Η (1) όχι ακριβής, δηλ. $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$

$$h(s) = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{2yM - N} = \frac{1 + 4y - 2 - 2y}{6yt + 4y^2 + 2y^3 - t - 4ty - 5y^2} = \frac{2y - 1}{2yt - y^2 + 2y^3 - t} = \frac{2y - 1}{(2y-1)t + y^2(2y-1)}$$

$$= \frac{\cancel{2y-1}}{(\cancel{2y-1})(t+y^2)} = \frac{1}{\underbrace{t+y^2}_{s}} = \frac{1}{s}$$

άρα,

$$\mu(s) = e^{\int h(s)ds} = e^{\int \frac{1}{s}ds} = e^{\ln s} = s = t + y^2.$$

⋮

Εφαρμογή:

Να βρεθεί ολ. παράγοντας της μορφής $\mu(t+y^2)$ για την παραπάνω δ.ε. και να λυθεί.

(ii) $\mu = \mu(ty)$

$s(t,y) = s = ty$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{ds}\frac{\partial s}{\partial y} = t\frac{d\mu}{ds} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{d\mu}{ds}\frac{\partial s}{\partial t} = y\frac{d\mu}{ds} \qquad (5)$$

Από (3), (4), (5) έχουμε:

$$tM\frac{d\mu}{ds} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = yN\frac{d\mu}{ds} + \mu\frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\underbrace{(tM - yN)}_{\neq 0}\frac{d\mu}{ds} = \overset{\neq 0}{\mu}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds} = \frac{N_t - M_y}{(tM - yN)} \; g(s)$$

$$\mu(s) = e^{\int g(s)\,ds}$$

Για τη δ.ε.: $(\overbrace{x^2y + y^2}^{M})\,dx \overbrace{- x^3}^{N}\,dy = 0$ (1) να βρεθεί ολ. παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(\underbrace{xy}_{s})$.

$1^{ος}$ τρόπος: Όχι ακριβής, δηλ. $\frac{\partial M}{\partial x} \neq \frac{\partial N}{\partial y}$.

Βρίσκω ολ. παράγοντα:

$$g(s) = \frac{N_x - M_y}{xM - yN} = \frac{-3x^2 - x^2 - 2y}{x^3y + xy^2 - yx^3} = \frac{-4x^2 - 2y}{2yx^3 + xy^2} = \frac{-2(2x^2+y)}{xy(2x^2+y)} = -\frac{2}{xy} = \frac{-2}{s}$$

Άρα, $\mu(s) = e^{\int g(s)\,ds} = e^{-2\int \frac{1}{s}ds} = e^{-2\ln s} = s^{-2} = \frac{1}{s^2} = \frac{1}{x^2y^2}$

Εφαρμογή:

Για την παραπάνω να βρεθεί ολ. παραγ. και να λυθεί.

$2^{ος}$ τρόπος: **Να λυθεί η δ.ε.:** $(x^2y + y^2)\,dx - x^3\,dy = 0$ (1), αν δέχεται ολ. παράγοντα παραλλαγή) της μορφής $\mu(x,y) = \mu = x^a y^\beta$ (2)

Η (1) όχι ακριβής γιατί $\frac{\partial M}{\partial x} \neq \frac{\partial N}{\partial y}$

Από (1), (2) με πολ/μό:

$$(x^{a+2} \cdot y^{\beta+1} + x^a y^{\beta+2})\,dx - (x^{a+3} y^{\beta})\,dy = 0 \quad (3)$$

Για να είναι η (3) ακριβής, πρέπει:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^{a+2} \cdot y^{\beta+1} + x^a y^{\beta+2}) = -\frac{\partial}{\partial x}(x^{a+3} y^{\beta}) \quad (4)$$

$$(\beta+1)\,\underbrace{x^{a+2} \cdot y^{\beta}} + (\beta+2)x^a y^{\beta+1} = -(a+3)\,\underbrace{x^{a+2} y^{\beta}} \quad (5)$$

Λύνω το σύστημα των συντελεστών:

$$\begin{cases} \beta+1 = -(a+3) \\ \beta+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

Επομένως, $\mu(x,y) = \mu = x^a y^{\beta} = x^{-2} y^{-2} = \frac{1}{x^2 y^2}$.

(iii) $\mu(t,y) = \mu = \mu(\underbrace{\tfrac{y}{t}}_{s}) = \mu(s)$

$s = \frac{y}{t}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d\mu}{ds}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{t}\frac{d\mu}{ds} \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{d\mu}{ds}\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{y}{t^2}\frac{d\mu}{ds} \quad (2)$$

Από (1), (2), (3) έχουμε:

$$\frac{1}{t} M \frac{d\mu}{ds} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{y}{t^2} N \frac{d\mu}{ds} + \mu \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$-\frac{t^2}{yN + tM}(M_y - N_t) = g(s) \quad \text{και} \quad \mu(s) = e^{\int g(s)ds}$$

Να λυθεί η δ.ε.: $(5x^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$ (1), αν δέχεται ολ. παράγοντα $\mu = \mu(x)$

$Mdt+Ndy=0$

$(\mu M)dt+(\mu N)dy=0$

$\frac{\theta\mu}{\theta y}M+\mu\frac{\theta M}{\theta y}=$
$=\frac{\theta\mu}{\theta t}N+\mu\frac{\theta N}{\theta t}$ (3)

Η (1) όχι ακριβής

$$\frac{\frac{\theta M}{\theta y}-\frac{\theta N}{\theta x}}{N}=\frac{-1-1}{x}=-\frac{2}{x}=f(x) \quad (2)$$

άρα,

$$\mu=e^{\int f(x)dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2} \quad (4)$$

Από (1), (4) με πολ/μό έχουμε:

$$(5-yx^{-2})\,dx+x^{-1}\,dy=0 \quad (5)$$

Υπάρχει από θεώρημα $F(x,y)$:

$$\frac{\theta F}{\theta x}=5-yx^{-2} \quad (6) \quad \rightarrow \quad F(x,y)=\ldots$$

$$\frac{\theta F}{\theta y}=x^{-1} \quad (7) \quad \rightarrow \quad \ldots$$

⋮

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμ. μορφή στην αλγ. εξ. ... και $F(x,y)=C_2$

Γενική λύση της δ.ε.: $5x+\frac{y}{x}=C$

(1.45)

Να βρεθεί η διαφορίσιμη συνάρτηση f με $f(0)=6$ για την οποία η δ.ε.:
$\overbrace{2+y^3\cos t}^{M}+\overbrace{f(t)\,y^2}^{N}y'=0 \ ^{(1)}$ είναι ακριβής.

Στη συνέχεια να λυθεί η δ.ε. για την προκύπτουσα f.

(η λύση στο επόμενο μάθημα)

Εφαρμογή στις ακριβείς εξισώσεις

Σύστημα Lotka-Volterra

Είναι ένα από τα βασικά μοντέλα στην οικολογία.

$x(t), y(t)$, πληθυσμοί θηραμάτων - θηρευτών αντίστοιχα σε χρόνο t.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\alpha - \beta y)x \\ \frac{dy}{dt} &= (\delta x - \gamma)y \end{aligned}\right\}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ σταθερές

το σύστημα συμπληρ. με αρχικές συνθήκες

$x(0) = x_0, \ y(0) = y_0 \quad , \ x_0 \geq 0, \ y_0 \geq 0$

Σχόλια:

Θεωρούμε ότι οι πληθυσμοί είναι μεγάλοι και συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε τις μεταβλητές $x(t)$ και $y(t)$ συνεχείς, χωρίς να κάνουμε μεγάλο σφάλμα, όταν τις προσεγγίζουμε με τον εγγύτερο ακέραιο

$y = 0 \quad \frac{dx}{dt} = \alpha x$ εκθ. αύξηση

έλλειψη κυνηγών

$x = 0 \quad \frac{dy}{dt} = -\gamma y$ εκθ. μείωση

Σκοπός μας από σύστημα να πάμε σε εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{(\delta x - \gamma)y}{(\alpha - \beta y)x} \quad \text{(κανόνας αλυσίδας)}$$

$$\Leftrightarrow \ -(\delta x - \gamma)y\,dx + (\alpha - \beta y)x\,dy = 0 \quad (1)$$

Παρατηρούμε:

$$\frac{\partial}{\partial y}[(\delta x - \gamma)y] + \frac{\partial}{\partial x}[(\alpha - \beta y)x]$$

Η (1) όχι ακριβής.

Θέτουμε $M(x,y) = (\delta x - \gamma)y$

$N(x,y) = (\alpha - \beta y)x$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N y - M x} = \frac{\overset{-(\alpha - \beta y - \gamma + \delta)}{-\delta x + \gamma - \alpha + \beta y}}{(\alpha - \beta y)xy + (\delta x - \gamma)xy} = -\frac{1}{xy}$$

$$g(s) = -\frac{1}{s}$$

$$s = xy \ , \ \mu(s) = e^{-\int \frac{1}{s} ds} = e^{-\ln s} = \frac{1}{s} = \frac{1}{xy}$$

Η (1) γίνεται $\left(\frac{1}{xy}\right)$

$$-\left(\delta - \frac{\gamma}{x}\right) dx + \left(\frac{\alpha}{y} - \beta\right) dy = 0 \quad (2)$$

$$-\left(\delta - \frac{\gamma}{x}\right) dx + \left(-\beta + \frac{\alpha}{y}\right) dy = 0$$

(2) ακριβής

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -(\delta - \gamma/x) \quad (3) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\beta + \alpha/y \quad (4) \end{aligned}\right\}$$

(3) $F(x,y) = -\delta x + \gamma \ln x + h(y)$ (5)

(4), (5) $h'(y) = -\beta + \alpha/y$

$$h(y) = -\beta y + \alpha \ln y + c_1^{=0}$$

$$F(x,y) = -\delta x + \gamma \ln x - \beta y + \alpha \ln y$$

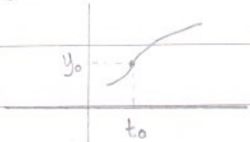
$$F(x,y) = c$$

Προσεγγίσεις Picard

$$\begin{pmatrix} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{pmatrix} \text{ π.α.Τ. } \Leftrightarrow y(t) = \underbrace{y(t_0)}_{y_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$ (ολοκληρωτική εξίσωση)

f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ συνεχείς

$y(t) \rightarrow (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$



<u>Ερωτήματα:</u>

- Ύπαρξη
- Μονοσήμαντο
- Συν από τα αρχικά δεδομένα

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\, ds$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$

$\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$$y_n(t_0) = y_0$$

$$y_0(t) = y_0$$

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))\, ds$$

$\vdots$

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\, ds$$

Άσκηση:

Να υπολογιστεί η ακολουθία Picard $\begin{pmatrix} y' = y \\ y(0) = 1 \end{pmatrix}$ π.α.τ

$$y_n(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y_{n-1}(s)\, ds \quad , n = 1, 2, \dots$$

$n=0$: $y_0(t) = 1$ (αρχική συνάρτηση)

$n=1$: $y_1(t) = 1 + \int_0^t f(s, \underbrace{y_0(s)}_{y_0(s)})\, ds = 1 + \int_0^t 1\, ds = 1 + t$

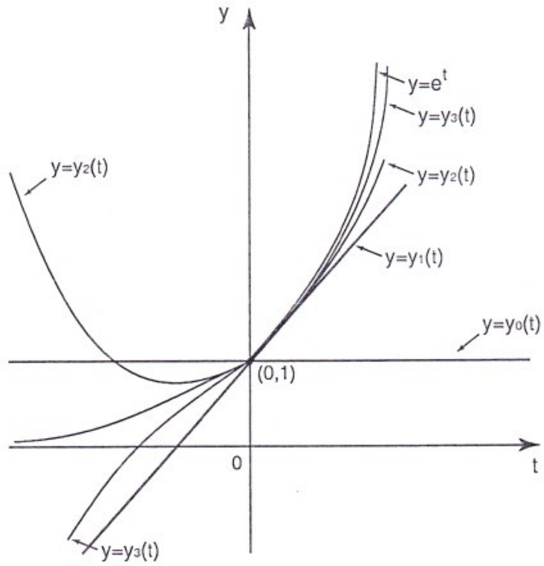
$n=2$: $y_2(t) = 1 + \int_0^t f(s, \underbrace{y_1(s)}_{y_1(s)})\, ds = 1 + \int_0^t (1+s)\, ds = 1 + s + \frac{s^2}{2!}$

$\vdots$

$$y_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

Η σύγκλιση της σειράς ισχύει για $t \in \mathbb{R}$, και είναι ομοιόμορφη για t σε κάθε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ (βλ. Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Οι πρώτες τέσσερεις προσεγγίσεις.

Άσκηση:

Να υπολογιστεί η ακολουθία Picard $\begin{pmatrix} y' = \overbrace{2ty}^{f(t,y)} \\ y(0) = 1 \end{pmatrix}$.

$y_n(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y_{n-1}(s))\, ds$, $n = 1, 2, \ldots$

$y_0(t) = 1$ (αρχική συνάρτηση)

$$y_0(t) = 1$$

$$n=1: \quad y_1(t) = 1 + \int_0^t \underbrace{f(s, y_0(s))}_{2s y_0(s)} ds = 1 + \int_0^t 2s \cdot 1 \, ds = 1 + t^2$$

$$n=2: \quad y_2(t) = 1 + \int_0^t \underbrace{f(s, y_1(s))}_{2s y_1(s)} ds = 1 + \int_0^t 2s(1+s^2)\, ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = 1 + \int_0^t f(s, y_{n-1}(s))\, ds = 1 + \frac{t^{2\cdot 1}}{1!} + \frac{t^{2\cdot 2}}{2!} + \dots + \frac{t^{2\cdot n}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2)^k}{k!} = e^{t^2}$$