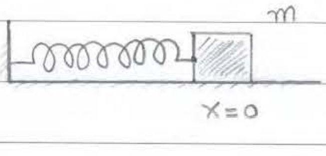
Γραμμικές δ.ε. $2^{ης}$ τάξης

Παράδειγμα: (αρμονικός ταλαντωτής)



Μας ενδιαφέρει το $x(t)$ (η θέση του σώματος τη στιγ

$F = m \cdot x''$ (Νόμος του Νεύτωνα)

$\underset{(k>0)}{F = -k \cdot x}$ (Νόμος του Hook)

Άρα, η συνάρτηση $x(t)$ είναι λύση της δ.ε. $mx'' + kx = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{x'' + \frac{k}{m} x = 0}$$

γρ. διαφ. εξίσωση $2^{ης}$ τάξης

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $x_1(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$ και $x_2(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$ είναι λύσεις της δ.ε.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων είναι λύση, δηλ. αν $x_1(t), x_2(t)$ είναι λύσεις και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε η $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2$ είναι λύση.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} x'' + \frac{k}{m} x &= (c_1 x_1 + c_2 x_2)'' + \frac{k}{m}(c_1 x_1 + c_2 x_2) \\ &= c_1\left(x_1'' + \frac{k}{m} x_1\right) + c_2\left(x_2'' + \frac{k}{m} x_2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άρα, η $x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$ είναι λύση $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Ερώτημα: Υπάρχουν άλλες; (όχι, αλλά θα το δούμε αργότερα)

Γενική μορφή:

(1) $y'' + p(t) y' + q(t) y = f(t)$, όπου $t \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα

$p(t), q(t)$ συνεχείς συναρτήσεις σ

$^*C^2(I) = \{ y : I \to \mathbb{R} : y$ δυο φορές παραγ. και y'' συνεχής στο $I \}$

Θέτουμε $L[y](t)$

$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y$

τότε η (1) γράφεται

$L[y] = f(t) \quad , \quad t \in I$

Αν έχουμε και αρχικές συνθήκες

$$(2) \begin{cases} y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \qquad t_0 \in I \end{cases}$$

τότε λέμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (πατ).

Θεώρημα: (ύπαρξης - μοναδικότητας)

Έστω ότι οι συναρτήσεις $p(t), q(t), f(t)$ είναι συνεχείς στο I.

Τότε, το πατ (1) και (2) έχει μοναδική λύση $y = y(t) \in C^2(I)^*$.

Παρατήρηση:

Θα αποδείξουμε το θεώρημα αργότερα στην ειδική περίπτωση, όπου $p(t) =$ σταθ. και $q(t) =$ σταθ.

Ορισμός:

Η δ.ε. (1) λέγεται ομογενής αν $f(t) = 0 \quad \forall\, t \in I$

Διαφορετικά, λέγεται μη-ομογενής.

Δηλ. ομογενής δ.ε.: $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \; , \; t \in I \quad$ (ΟΜ)

Θεώρημα:

Το σύνολο λύσεων $\mathcal{L}$ της (ΟΜ) είναι διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη:

Βασική Παρατήρηση:

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$	$L[c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2] = c_1 L[\varphi_1] + c_2 L[\varphi_2]$
$\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(I)$	Άρα, αν $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$, τότε $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \in \mathcal{L}$.

Ορισμός:

Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in C(I)$

Οι $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητες στο I, αν η σχέση

$$c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) = 0 \quad , \quad \forall\, t \in I$$

ισχύει μόνο αν $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Αλλιώς, ονομάζονται γρ. εξαρτημένες στο I.

Παρατήρηση:

Κάποιες συναρτήσεις μπορεί να είναι γρ. ανεξ. σε ένα διάστημα και γρ. εξαρτ. σε ένα άλλο.

π.χ.

Έστω $\varphi_1(t) = |t|$, $\varphi_2(t) = 2t$

Οι φ_1, φ_2 είναι γρ. εξαρτ. στο $I_1 = (0, +\infty)$

Πράγματι, $\varphi_2(t) = 2\varphi_1(t)$, $\forall\, t > 0$

Όμως, είναι γρ. ανεξ στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Για $t = 1$, αυτό δίνει:

$$\boxed{c_1 + 2c_2 = 0}$$

Για $t = -1$, δίνει:

$$\boxed{c_1 - 2c_2 = 0}$$

Άρα, $c_1 = c_2 = 0$ και οι φ_1, φ_2 γρ. ανεξ στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα:

Ισχύει $\dim \mathcal{L} = 2$.

Απόδειξη:

Θεωρούμε $t_0 \in I$ και τις συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(I)$ για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{cases} L[\varphi_1] = 0 \\ \varphi_1(t_0) = 1 \\ \varphi_1'(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L[\varphi_2] = 0 \\ \varphi_2(t_0) = 0 \\ \varphi_2'(t_0) = 1 \end{cases}$$

(φ_1, φ_2 λύσεις πατ)

Θδο οι φ_1, φ_2 συνιστούν μια βάση του $\mathcal{L}$.

(i) φ_1, φ_2 γρ. ανεξ στο I.

Έστω ότι $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0 \quad \forall\, t \in I$

Παραγωγίζοντας,

$$c_1\varphi_1'(t) + c_2\varphi_2'(t) = 0 \quad \forall\, t \in I$$

Για $t = t_0$, οι παραπάνω δίνουν:

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) = 0 \\ c_1\varphi_1'(t_0) + c_2\varphi_2'(t_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα, φ_1, φ_2 γρ. ανεξ. στο I.

(ii) οι φ_1, φ_2 παράγουν τον $\mathcal{L}$.

Έστω, λοιπόν $\psi \in \mathcal{L}$

Θέτουμε $\psi(t_0) = a$, $\psi'(t_0) = \beta$

Ορίζουμε $\phi(t) = a\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$, $t \in I$

Τότε, $\varphi \in \mathcal{L}$ (αφού είναι γρ. συνδυασμός λύσεων)

Επίσης, $\varphi'(t) = a\varphi_1'(t) + \beta\varphi_2'(t)$

Άρα, $\varphi(t_0) = a \cdot 1 + \beta \cdot 0 = a$

$\varphi'(t_0) = a \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta$

Παρατηρούμε ότι οι ψ, ϕ είναι και οι δυο λύσεις του παт

$$\begin{cases} L[y] = 0 \\ y(t_0) = a \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

Άρα, $\psi = \phi$ από το θεώρημα ύπαρξης - μοναδικότητας

Άρα, $\psi = a\varphi_1 + \beta\varphi_2$, άρα οι φ_1, φ_2 παράγουν τον χώρο.

Ορισμός:

Ονομάζουμε ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(I)$ την συνάρτηση:

$$W[\varphi_1, \varphi_2](t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} \quad , t \in I$$

Θεώρημα:

Έστω φ_1, φ_2 λύσεις της (ΟΜ) στο I.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Οι φ_1, φ_2 είναι γρ. ανεξ. στο I

(ii) $W[\varphi_1, \varphi_2](t) \neq 0 \quad , \forall \, t \in I$

(iii) $W[\varphi_1, \varphi_2](t_0) \neq 0$, για κάποιο $t_0 \in I$

Απόδειξη:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Έστω, αντίθετα ότι $\exists \, t_1 \in I$ τ.ω. $W(t_1) = 0$

Τότε, $\exists \, (c_1^*, c_2^*) \neq (0,0)$ τ.ω.

$$\begin{cases} c_1^* \varphi_1(t_1) + c_2^* \varphi_2(t_1) = 0 \\ c_1^* \varphi_1'(t_1) + c_2^* \varphi_2'(t_1) = 0 \end{cases}$$

Έστω

$$\psi(t) = c_1^* \varphi_1(t) + c_2^* \varphi_2(t) \quad , t \in I$$

Τότε,

$$L[\psi] = 0$$

και $\begin{cases} \psi(t_1) = c_1^* \varphi_1(t_1) + c_2^* \varphi_2(t_1) = 0 \\ \psi'(t_1) = c_1^* \varphi_1'(t_1) + c_2^* \varphi_2'(t_1) = 0 \end{cases}$

Άρα, η $\psi(t)$ λύνει ένα ΠΑΤ του οποίου προφανής λύση είναι η μηδενική συνάρτηση.

Άρα, $\psi = 0$ (θεώρημα ύπαρξης - μοναδ.)

Άρα, $c_1^* \varphi_1(t) + c_2^* \varphi_2(t) = 0$, $\forall t \in I$

Άτοπο, αφού $(c_1^*, c_2^*) \neq (0,0)$ και φ_1, φ_2 γρ. ανεξ στο I

(ii) $\Rightarrow$ (iii) προφανές

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω $c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) = 0$, $\forall t \in I$

$\Rightarrow c_1 \varphi_1'(t) + c_2 \varphi_2'(t) = 0$

Για $t = t_0$, παίρνουμε:

$$\begin{cases} c_1 \varphi_1(t_0) + c_2 \varphi_2(t_0) = 0 \\ c_1 \varphi_1'(t_0) + c_2 \varphi_2'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Η ορίζουσα του 2×2 συστήματος είναι η $W[\varphi_1, \varphi_2](t_0)$, άρα είναι $\neq 0$.

Άρα, $c_1 = c_2 = 0$

Άρα φ_1, φ_2 γρ. ανεξάρτητα

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad , t \in I \quad \text{(OM)}$$

Η γενική λύση της (OM) είναι: $y(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$, $t \in I$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές

και φ_1, φ_2 δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Για να λύσουμε ένα ΠΑΤ

$$\begin{cases} L[y] = 0 \\ y(t_0) = \alpha \qquad (t_0 \in I) \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

παίρνουμε τη γενική λύση και προσδιορίζουμε τα c_1, c_2:

$$\begin{cases} c_1 \varphi_1(t_0) + c_2 \varphi_2(t_0) = \alpha \\ c_1 \varphi_1'(t_0) + c_2 \varphi_2'(t_0) = \beta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} \text{μοναδική λύση, αφού} \\ W[\varphi_1, \varphi_2] \neq 0 \end{array} \right)$$

Έστω $\varphi_1(t)$ λύση της (ΟΜ)

Θα αναζητήσουμε μια δεύτερη λύση, γραμ. ανεξ της φ_1, της μορφής $\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \cdot u(t)$ (ουσιαστικά θέλουμε μη-σταθερές $u(t)$ για να είναι γρ. ανεξ)

Υποθέτουμε ότι $\varphi_1(t) \neq 0$, $\forall\, t \in I$

Έχουμε:

$$\varphi_2' = \varphi_1' \cdot u + \varphi_1 \cdot u'$$

$$\varphi_2'' = \varphi_1'' \cdot u + \varphi_1' \cdot u' + \varphi_1' \cdot u' + \varphi_1 \cdot u''$$

$$\varphi_2'' = \varphi_1'' \cdot u + 2\varphi_1' \cdot u' + \varphi_1 u''$$

Άρα:

$$\begin{aligned} L[\varphi_2] &= \varphi_1'' \cdot u + 2\varphi_1' u' + \varphi_1 u'' \\ &\quad + p(\varphi_1' u + \varphi_1 u') + q\varphi_1 \cdot u \\ &= \cancel{u\,[\varphi_1'' + p\varphi_1' + q\varphi_1]} + u'\,[2\varphi_1' + p\varphi_1] + \varphi_1 u'' \end{aligned}$$

(γιατί φ_1 λύση της δ.ε)

Θέτουμε $u' = v$, οπότε η φ_2 είναι λύση της (ΟΜ), ανν

$$\varphi_1 v' + [2\varphi_1' + p\varphi_1] \cdot v = 0$$

Άρα, αποδείξαμε.

Πρόταση: (υποβιβασμός τάξης της δ.ε.)

Αν $\varphi_1(t)$ είναι μια λύση της (ΟΜ) και $u' = v$, όπου v λύση της $v' + \left[2\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + p\right] v = 0$, τότε η $\varphi_2(t) = u(t)\,\varphi_1(t)$ είναι λύση της (ΟΜ).

(για v μη-μηδενικά η u όχι σταθερή άρα παίρνουμε φ_2 γρ. ανεξ της φ_1).

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε.: $y'' - \frac{2t}{t^2+1} y' + \frac{2}{t^2+1} y = 0$, $t > 0$ αφού βρεθεί μια λύση φ_1 "με το μάτι".

Παρατηρούμε ότι η $\varphi_1(t) = t$ είναι λύση, οπότε αναζητούμε δεύτερη λύση στη μορφή $\varphi_2(t) = t \cdot u(t)$.

Έχουμε:

$$\varphi_2'(t) = u(t) + t \cdot u'(t)$$

$$\varphi_2''(t) = 2u'(t) + t \cdot u''(t).$$

Άρα,

$$L[\varphi_2] = 2u'(t) + t \cdot u''(t) - \frac{2t}{t^2+1}\left(\cancel{u(t)} + t \cdot u'(t)\right) + \frac{2}{t^2+1}\cancel{t \cdot u(t)}$$

$$= t \cdot u''(t) + \left[2 - \frac{2t^2}{t^2+1}\right]u'(t).$$

Θέτουμε $u' = v$ και άρα θέλουμε:

$$v' + \left[\frac{2}{t} - \frac{2t}{t^2+1}\right]v = 0$$

Παίρνουμε:

$$v(t) = c \cdot e^{-\int\left(\frac{2}{t} - \frac{2t}{t^2+1}\right)dt}$$

$$= c \cdot e^{-(2\ln t - \ln(t^2+1))}$$

$$= c \cdot \frac{t^2+1}{t^2}$$

Παίρνουμε $c = 1$: (δεν παίρνουμε $c=0$ γιατί θέλουμε μη-σταθ λύσεις)

$$u = \int v\,dt = \int\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt = t - \frac{1}{t} + c \quad \left(\begin{matrix}\text{επιλέγουμε}\\ c=0\end{matrix}\right)$$

και άρα:

$$\varphi_2(t) = t \cdot u(t) = t^2 - 1$$

Άρα, η γενική λύση είναι:

$$y(t) = c_1(t) + c_2(t^2-1).$$ (εδώ, υπάρχει δυνατότητα επαλήθευσης)

Θεώρημα: (τύπος του Liouville)

Έστω $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $t \in I$, δύο λύσεις της (ΟΜ) και $W = W[\varphi_1, \varphi_2]$.

Τότε, $\forall\ t_0, t \in I$ ισχύει ότι:

$$\boxed{W(t) = W(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}}$$