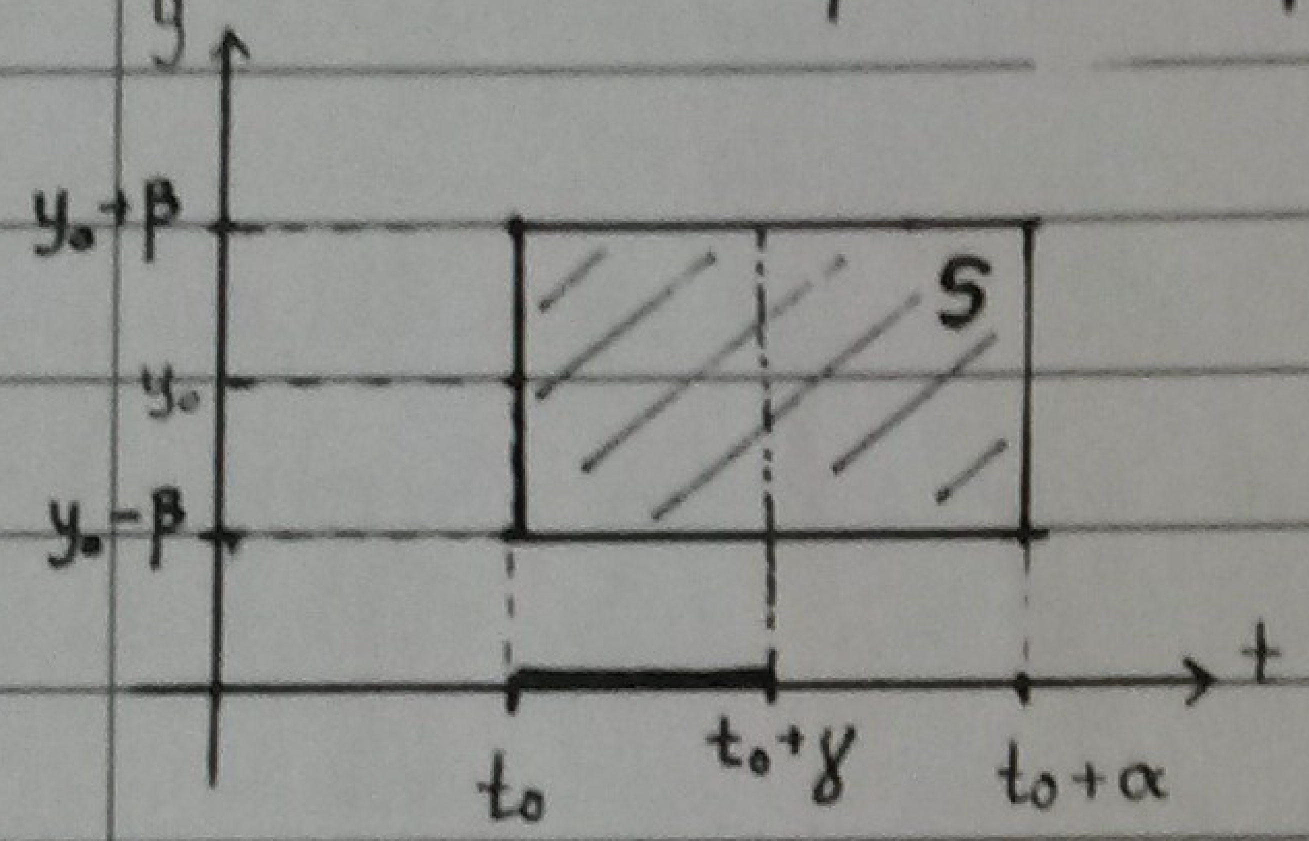
ΘΕΩΡΗΜΑ (Picard-Lindelöf)

Θεωρούμε το Π.Α.Τ. $\left(y' = f(t,y),\ y(t_0) = y_0\right)$ (1)

Αν f και $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο ορθογώνιο

$$S = \{(t,y) : t_0 \le t \le t_0 + \alpha,\ |y - y_0| \le \beta\}$$

τότε το Π.Α.Τ. (1) έχει <u>μοναδική λύση</u> στο διάστημα $[t_0, t_0+\gamma]$, όπου $\gamma = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}$ με $M = \max|f(t,y)|$.



*Το πρόβλημα θα ορίζεται μέσα στο $[t_0, t_0+\alpha]$, ΟΜΩΣ μπορεί να φτάνει και σε κάτι "λιγότερο".

Απόδειξη

Θεωρούμε τις προσεγγίσεις Picard του Π.Α.Τ (1)

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} (f(s), y_{n-1}(s))\,ds \qquad (2)$$

και αποδεικνύουμε επαγωγικά τις εκτιμήσεις:

$$|y_n(t) - y_0| \le M(t - t_0) \qquad (3)$$

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le M\frac{L^{n-1}}{n!}(t - t_0)^n, \qquad (4)$$

όπου $L = \max\limits_{S}\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right|$

• Απόδειξη της (3) (Επαγωγικά)

i) Για $n=1$, είναι

$|y_1(t) - y_0| \leq M(t - t_0)$ που ισχύει. Πράγματι από (2) έχουμε:

Για $n=1$: $|y_1(t) - y_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_0)| ds \leq M(t - t_0)$

ii) Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$, δηλ.
$|y_k(t) - y_0| \leq M(t - t_0)$

iii) Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n=k+1$, δηλ.
$|y_{k+1}(t) - y_0| \leq M(t - t_0)$

Πράγματι,

$$|y_{k+1} - y_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_k(s))| ds$$

$$\leq M(t - t_0) \quad \text{(λόγω της ii))}$$

• Απόδειξη της (4) (Επαγωγικά)

i) Για $n=1$, είναι

$$|y_1(t)-y_0| \leq M(t-t_0)$$, που ισχύει από την (3) για $n=1$.

ii) Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$, δηλ.

$$|y_k(t)-y_{k-1}(t)| \leq M \cdot \frac{L^{k-1}}{k!}(t-t_0)^k$$

iii) Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$, δηλ.

$$|y_{k+1}(t)-y_k(t)| \leq M \frac{L^k}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1}$$

Πράγματι, από (2): $y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds$, έχουμε

$$|y_{k+1}(t)-y_k(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, y_k(s) - f(s, y_{k-1}(s)] ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))| ds$$

$$\stackrel{*}{=} \int_{t_0}^{t} \left| \int_{y_{k-1}(s)}^{y_k(s)} \frac{\partial f(s,y)}{\partial y} dy \right| ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \left| \int_{y_{k-1}(s)}^{y_k(s)} \left| \frac{\partial f(s,y)}{\partial y} \right| dy \right| ds$$

* $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = f(\beta) - f(\alpha)$

$$\leq L\int_{t_0}^{t}\left|\int_{y_{k-1}(s)}^{y_k(s)} dy\right| ds$$

$$= L\int_{t_0}^{t}\left|y_k(s)-y_{k-1}(s)\right| dy$$

$\boxed{\text{Από (ii)}}$ $$\leq M\frac{L^k}{k!}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^k ds$$

$$= M\frac{L^k}{k!}\cdot\frac{(t-t_0)^{k+1}}{k+1}$$

$$= M\frac{L^k}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1}$$

■

- Σύγκλιση της ακολουθίας $y_n(t)$.

Η ακολουθία $(y_n(t))$ γράφεται:

$$y_n(t) = y_0 + [y_1(t)-y_0]+[y_2(t)-y_1(t)]+\dots+[y_n(t)-y_{n-1}(t)]$$

$$y_n(t) = y_0 + \boxed{\sum_{k=1}^{n}[y_k(t)-y_{k-1}(t)]} \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[y_n(t)-y_{n-1}(t)]$$

* Κριτήριο Weierstrass

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

$|f_n(x)|\leq a_n$

$\sum_{n=1}^{a} a_n<+\infty$

Το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n}[y_k(t)-y_{k-1}(t)]$ είναι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}[y_n(t)-y_{n-1}(t)]$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα. $\Longrightarrow$

! Weierstrass

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ |f_n(x)|<a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ συγκλ. ομοιόμορφα.}$$

$$|y_n(t)-y_{n-1}(t)| \leq M \frac{L^{n-1}}{n!}(t-t_0)^n$$

$$\leq \frac{M}{L} \frac{\gamma^n L^n}{n!}$$

<u>και</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^n L^n}{n!} = e^{\gamma L}-1$ $\left(\to * \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x\right)$

Επομένως η ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα (από θ. Weierstraß) στη συνάρτηση $\lim_{n\to+\infty} y_n(t) = y(t)$

(A) Να αποδείξετε ότι το "όριο της ακολουθίας των εξισώσεων Picard" είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ) (1): $(y'=f(t,y), y(t_0)=y_0)$

Ν.δ.ό. Η $y(t)=\lim_{n\to\infty} y_n(t)$ είναι λύση του Π.Α.Τ (1).

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds$$

$$y_n(t)=y_0-\int_{t_0}^{t} f(s,y_{n-1}(s))ds$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left[y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y_{n-1}(s))ds\right]$$

άρα $y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds$

και τελικά: Η $y(t)$: λύση του Π.Α.Τ. $(y'=f(t,y), y(t_0)=y_0)$

(B) Να αποδείξετε ότι: η $y(t)$ είναι ΜΟΝΑΔΙΚΗ λύση του Π.Α.Τ (1): $(y' = f(t,y),\ y(t_0) = y_0)$

Υποθέτουμε ότι έχει λύση $z(t)$, δηλ.

$$z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds \qquad (6)$$

Αποδεικνύουμε ότι: $\left|y_n(t) - z(t)\right| \leq M \cdot \frac{L^n}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}$. $\leq M \cdot \frac{\gamma^{n+1} \cdot L^n}{(n+1)!}$

$n = 0, 1, 2, \dots$, $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$

(Επαγωγικά (όπως έκανα και με την (4) προηγουμένως))

i) Για $n=0$ είναι:

$|y_0 - z| \leq M(t - t_0)$, που ισχύει, αφού λόγω της (6) έχω:

$$|y_0 - z| \leq \int_{t_0}^{t} \left|f(s, z(s))\right| ds \leq M(t - t_0)$$

ii) Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$:

$$\left|y_k(t) - z(t)\right| \leq M \cdot \frac{L^k}{(k+1)!}(t - t_0)^{k+1}$$

iii) Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$, δηλ.

$$\left|y_{k+1}(t) - z(t)\right| \leq M \cdot \frac{L^{k+1}}{(k+2)!}(t - t_0)^{k+2}$$

$$\left|y_{k+1}(t) - z(t)\right| \leq \int_{t_0}^{t} \left|f(s, y_k(s)) - f(s, z(s))\right| \quad \Rightarrow$$

$$\frac{L}{n!} \to 0$$

$$\left| y_{k+1}(t) - z(t) \right| = \int_{t_0}^{t} \left| \int_{z(s)}^{y_k(s)} \frac{\partial f(s,y)}{\partial y} \, dy \right| ds$$

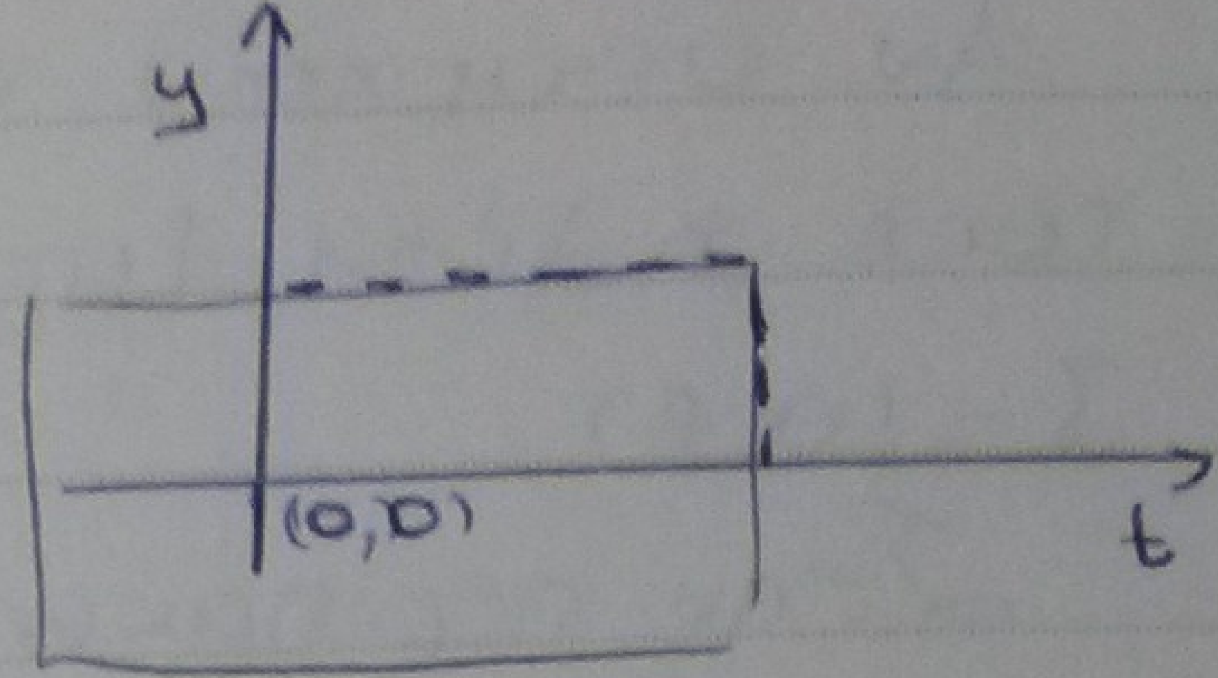
$$\leq L \cdot \int_{t_0}^{t} \left| y_k(s) - z(s) \right|$$

$$\leq L \cdot M \frac{L^{k}}{(k+1)!} \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{k+1} \, ds$$

$$= M \cdot \frac{L^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{(t-t_0)^{k+2}}{k+2}$$

Άσκηση:

$f(t,y) = y^{2/3}$ (όχι Lipschitz)



$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \overset{?}{\le} L|y_1 - y_2|$

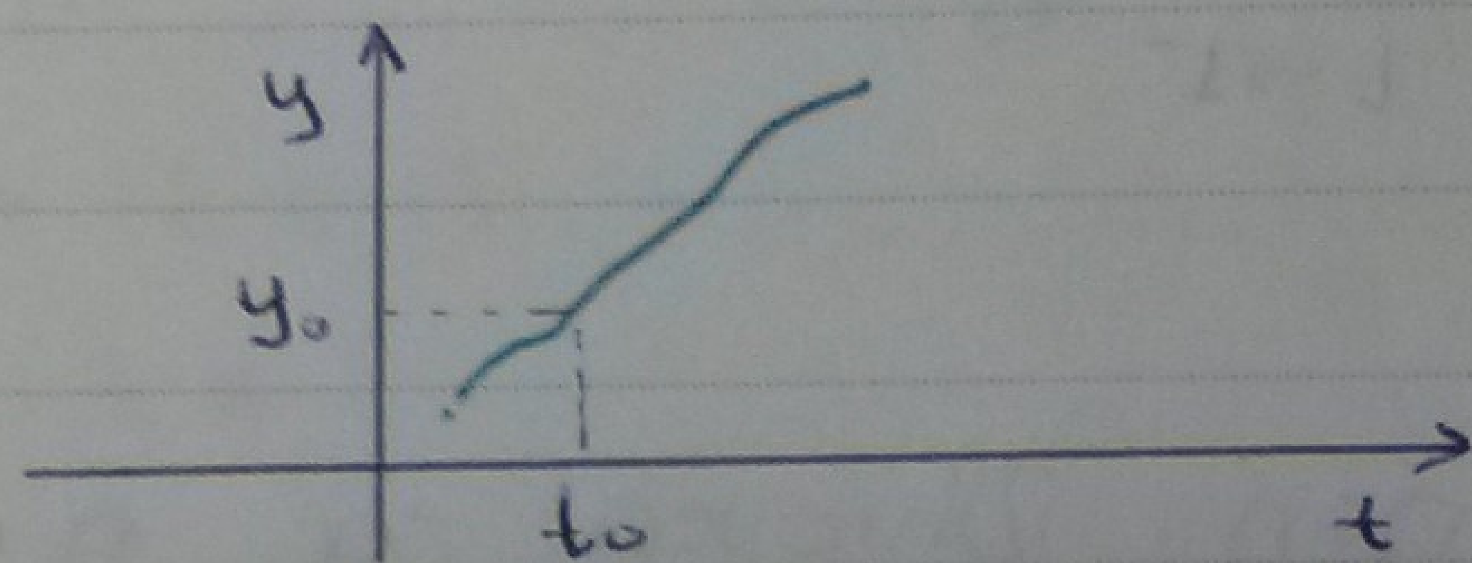
D γειτ. περ. $(0,0)$

$|-y^{2/3}| \overset{?}{\le} L|y|$

$\left|\frac{y^{2/3}}{y}\right| = \frac{1}{|y^{1/3}|} \to \infty$ δηλ. η $f(t,y) = y^{2/3}$ όχι Lipschitz

Παρατήρηση:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1) \text{ π.α.τ.}$$



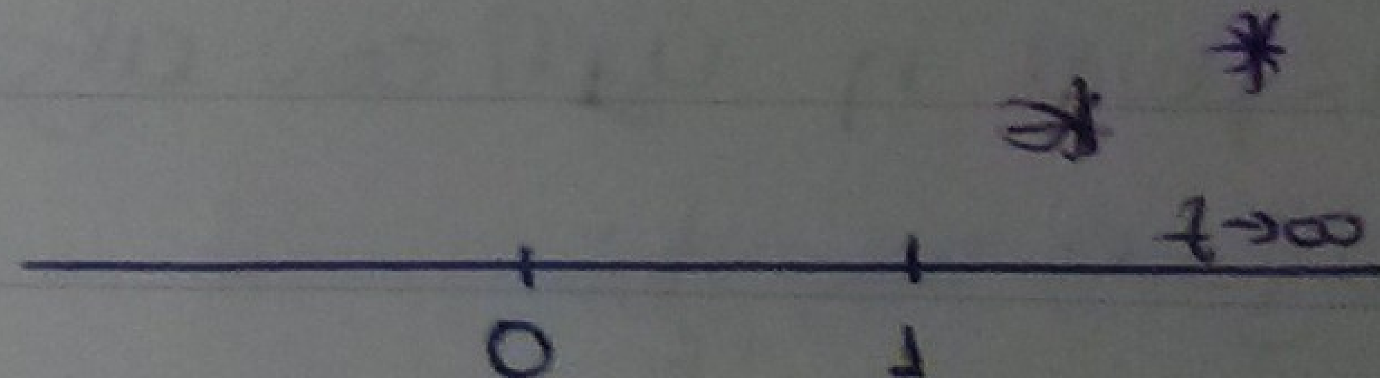
Το πεδίο ορισμού της λύσης του π.α.τ (1) ορίζεται σαν το μέγιστο ανοικτό διάστημα $I = (a,b)$ του t, μέσα στο οποίο ορίζεται η λύση και που περιέχει το t_0.

Π.χ.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow y(t) = -\frac{1}{t+c}$$

$$y(\underbrace{0}_{t_0}) = \underbrace{1}_{y_0} \Rightarrow c = -1$$

Άρα $y(t) = -\frac{1}{t-1}$



$I = (-\infty, 1)$

$I=(\alpha,\beta)$

Παρατήρηση:

Αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια (δηλ. $t\to\alpha^+$ ή $t\to\beta^-$), τότε η λύση μπορεί να επεκταθεί εκτός του διαστήματος $I=(\alpha,\beta)$.

Στην περίπτωση που $\lim_{\substack{t\to\alpha^+ \\ \text{ή } t\to\beta^-}} |y(t)| = +\infty$, τότε λέμε ότι η λύση εκρήγνυται.

$y(t) = -\dfrac{1}{t-1}$, $(-\infty, 1)$

$\lim_{t\to 1^-} y(t) = +\infty$ (η λύση του π.α.τ. εκρήγνυται)

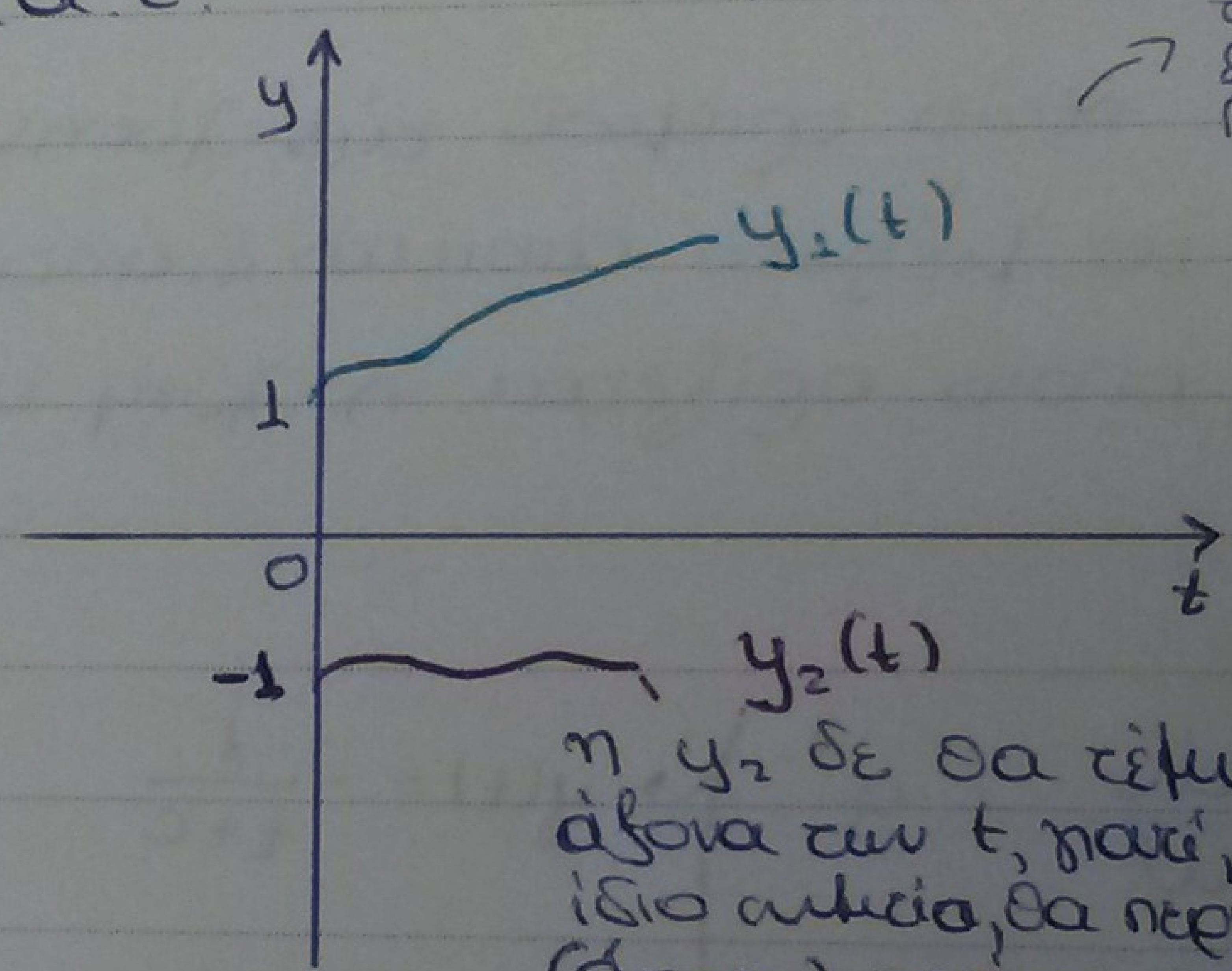
Άσκηση: Δίνονται τα π.α.τ.

$\begin{cases} y' = y \\ y(0)=1 \end{cases}$ ① $\rightsquigarrow y_1(t)$ → συνεχής

$y_1(t) = e^t$

$\begin{cases} y' = y \\ y(0)=-1 \end{cases}$ ② $\rightsquigarrow y_2(t)$

$y_2(t) = -e^t$



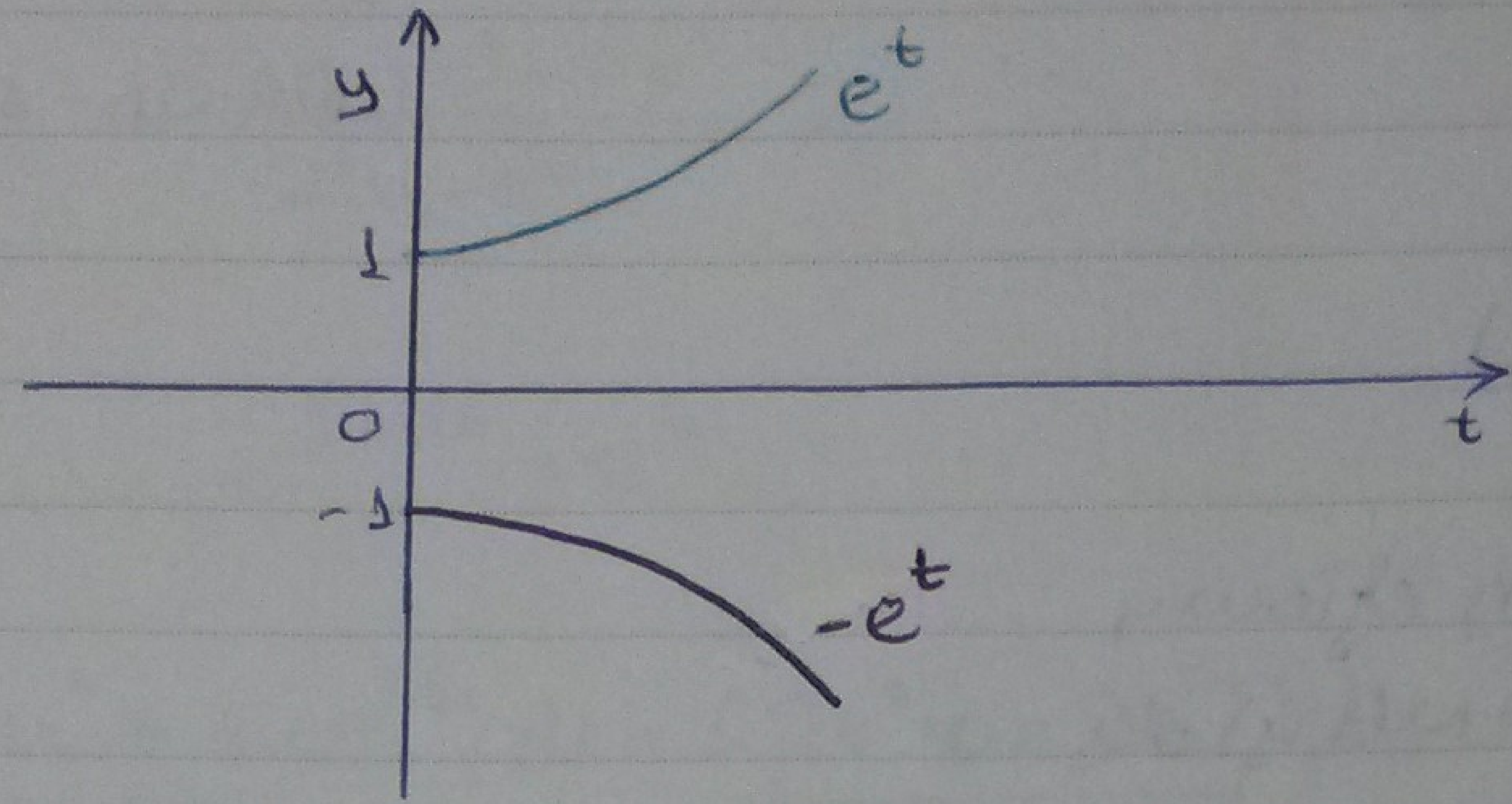
* Επίσης η y_2 δεν τέμνει από την y_1. ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΓΕΝΙΚΑ ΤΟΜΕΣ

η y_2 δε θα τέμνει τον άξονα των t, γιατί, από το ίδιο σημείο, θα περνάνε 2 λύσεις (άτοπο), γιατί το π.α.τ. ② έχει μοναδική λύση την $y_2(t)$

Ερωτήματα:

- Τέμνει η $y_1(t)$ τον άξονα των t; ή η $y_2(t)$ τέμνει τον άξονα των t;
- Είναι η $y_1(t) > y_2(t)$;

* Εδώ οι λύσεις ήταν σχετικά απλές, δε λύνονται, όμως, όλες οι διαφορικές - κάποιες φορές πρέπει να μελετάμε τη συμπεριφορά τους.



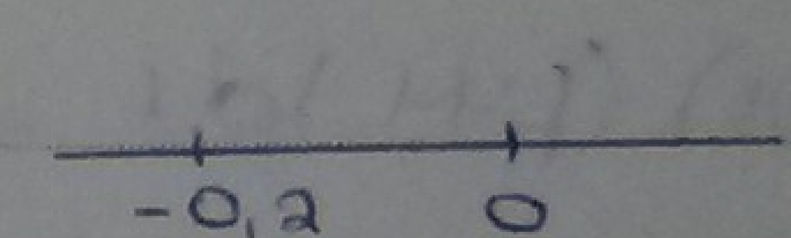
<u>Άσκηση:</u> Θεωρούμε

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(1+t)^2}{(1+y)^2} \\ y(0) = -0,2 \end{cases} \quad ① \text{ π.α.τ.} \quad (y_1)$$

* Εδώ δεν μπορώ να βρω λύση - θα κοιτάξω τη συμπεριφορά της μέσω μονοσημάντα

Έστω $y_1(t)$, λύση του ①, $\forall\ t \in I$.

Να δειχθεί ότι $y_1(t) < t$, $\forall\ t \in I$



<u>Λύση:</u>

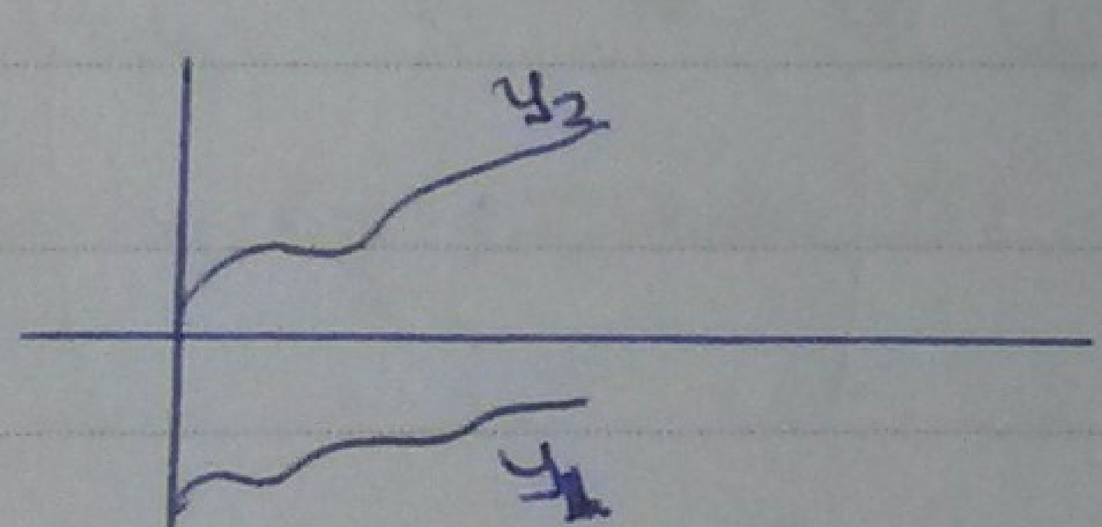
Θεωρούμε το π.α.τ. ②

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(1+t)^2}{(1+y)^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow y_2(t) = t$$

$y_2(t) = t$

$$-0,2 < 0$$
$$\downarrow$$
$$y_1(0) < y_2(0)$$

(* Δηλ., στη θέση 0 ισχύει 5)



Λόγω του θεωρήματος μοναδικότητας:

$$y_1(t) < t \quad , \forall\ t \in I$$

$$\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

Ποιοτική μελέτη (χώρος φάσης - διάγραμμα φάσης ...)

Αυτόνομη διαφορική εξίσωση $y'=\underbrace{y^2-3y+2}_{f(y)}$

* Μελετάμε αυτόνομες διαφορικές, δηλ. να μην έχουν καθόλου t μέσα

$y'=f(y)$: $y=y(t)$

π.χ. $y'=y$: $f(y)=y$

$$y'=\underbrace{y(y-1)(y-2)}_{f(y)} \quad ①$$

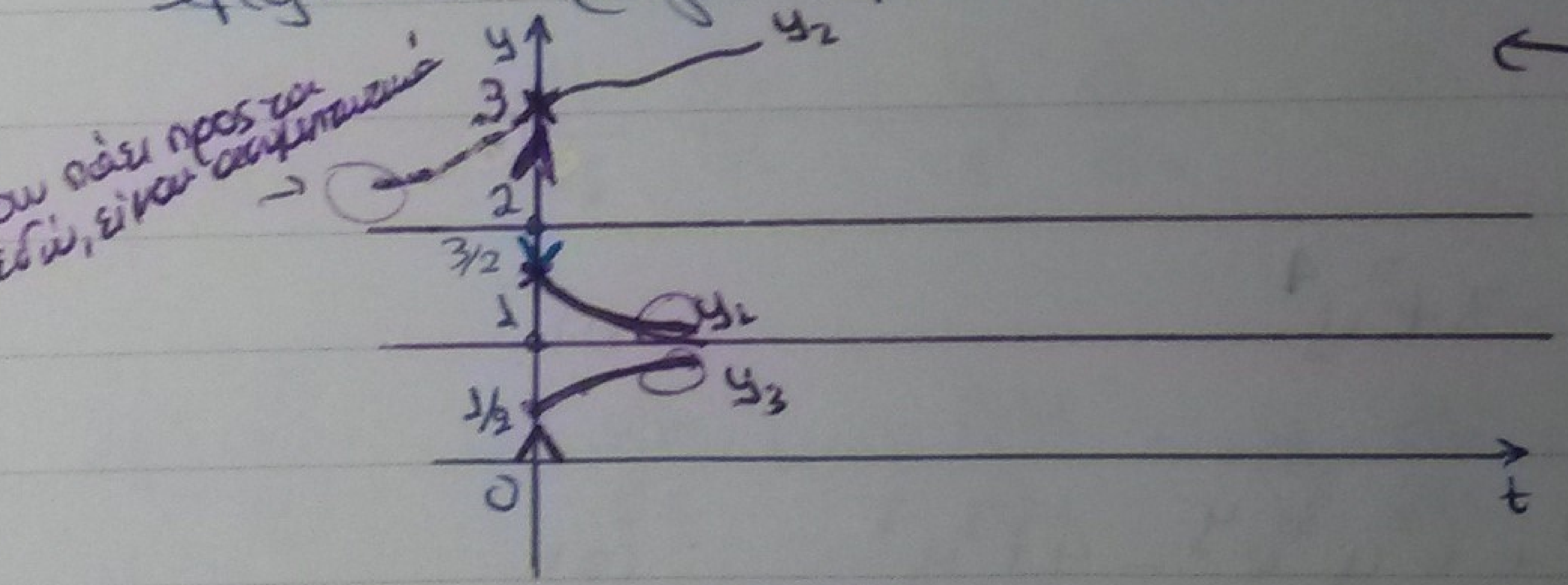
Λύση: $y'=\underbrace{y^2-3y+2}_{f(y)}$

Βάσει εμπειρίας την γράφω:

$$y'=(y-1)(y-2) \quad ①$$

$f(y)=0$: ρίζες της f ①,② (λύσεις της δ.εξ.)

← έστω ότι πάει προς τα επάνω



* Παίρνω μια τυχαία ενδιάμεση τιμή (π.χ. 3/2) και προσπαθώ να φτιάξω πως με αυτήν την τιμή

i) $\begin{cases} y'=(y-1)(y-2) \\ y(0)=3/2 \end{cases} \rightsquigarrow y_1(t)$

* Η f συνεχής και οι μ. ερικές της παράγωγοι επίσης.

ii)

i) $\begin{pmatrix} y' = (y-1)(y-2) \\ y(0) = 3/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow y_1(t)$

ii) $\begin{pmatrix} y' = (y-1)(y-2) \\ y(0) = 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow y_2(t)$

iii) $\begin{pmatrix} y' = (y-1)(y-2) \\ y(0) = 1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow y_3(t)$

Σχόλια για τα i, ii, iii:

i) $f(y) < 0$, $y' < 0$ συνάρτηση (φθίνουσα)
$= (y-1)(y-2) < 0$

ii) $f(y) > 0$, $y' > 0$ συνάρτηση (αύξουσα)

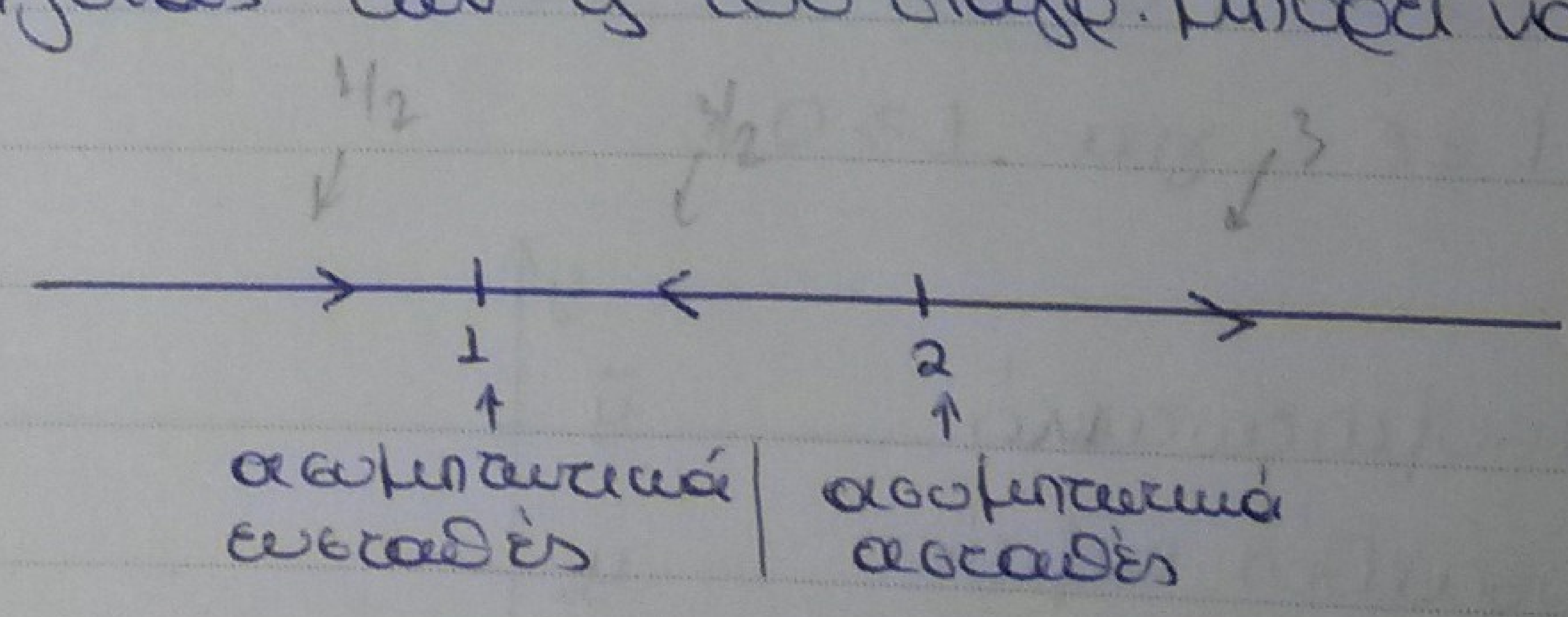
iii) $f(y) > 0$, $y' > 0$ συνάρτηση (αύξουσα)

- Οι ρίζες της συνάρτησης f, λέγονται σημεία ισορροπίας.

- Ο άξονας των y, λέγεται χώρος φάσης.

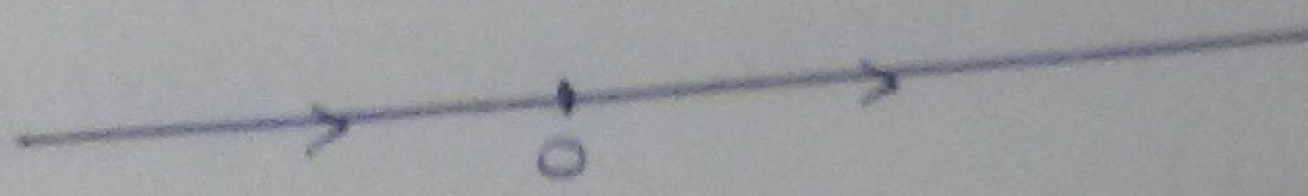
- Διάγραμμα φάσης: Το διάγραμμα φάσης της ~~(Σ.Δ.Ε.)~~ αυτόνομης Σ.Δ.Ε ($y' = f(y)$) είναι ο άξονας των y, μαζί με τα σημεία ισορροπίας και τα βέλη που δείχνουν το πρόσημο της συνάρτησης f.

Ο άξονας των y του διαγρ. μπορεί να γίνει και οριζόντια.

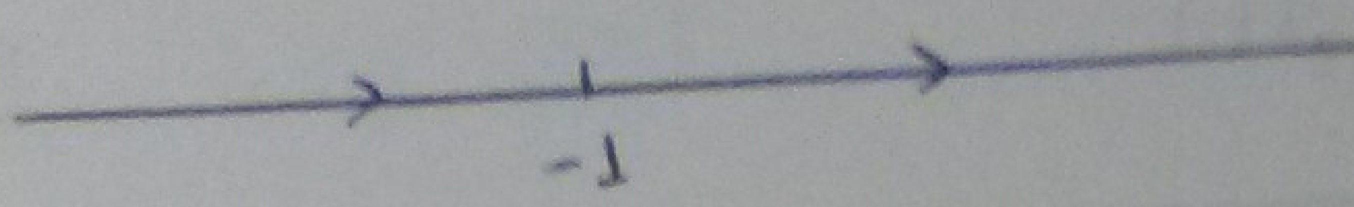


1. $y' = \underbrace{y^2}_{f(y)}$ $\qquad f(y)=0 \; : \; \bar{y}=0$ → σημείο ισορροπίας

* ένα σημείο ισορροπίας χωρίς ευστάθεια



2. $y' = \underbrace{(1+y)^2}_{f(y)}$ $\qquad \bar{y}=-1$ (σημείο ισορροπίας)



3. $y' = 1+y^2$ δεν έχει σημεία ισορροπίας

* Αυτά ↑ είναι διαγράμματα φάσης.

* Αν δεν μπορώ να βρω λύση, μπορώ να μελετήσω τη συμπεριφορά της συνάρτησης.

$$\left.\begin{pmatrix} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{pmatrix}\right. (1)$$

μορφή λύσης

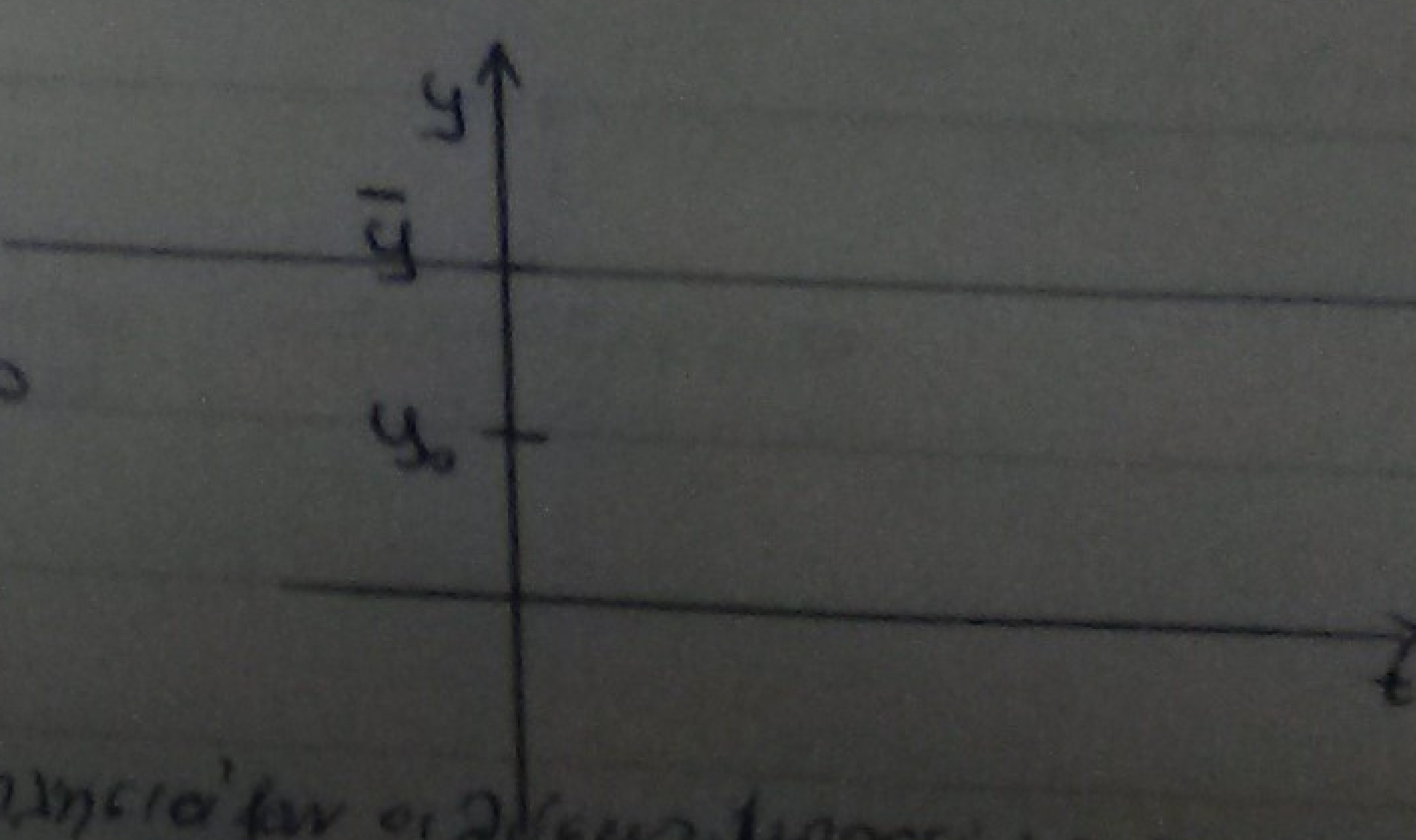
Λύση: $\varphi(0,y_0) = y_0$

λύση του (1) $\varphi(t,y_0)$, προφανώς είναι $\varphi(0,y_0) = y_0$

$f(\bar{y}) = 0$
↓
σημείο ισορροπίας

Ορισμός: Το σημείο $\bar{y}$ ισορροπίας ($f(\bar{y})=0$) λέγεται ευσταθές αν $\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0 : |y_0-\bar{y}|<\delta$, τότε $|\varphi(t,y_0)-\varphi(t,\bar{y})|<\varepsilon$, για $t \geq 0$

Το $\bar{y}$ λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας και επιπλέον



* όσο πλησιάζουν οι λύσεις, μπορεί να ταυτιστούν όταν $\bar{y}, y_0$ πολύ κοντά ⇒ λύσεις κοντά ⇒

για: $|y_0-\bar{y}|<\delta$ να ισχύει: $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t,y_0)=\bar{y}$.

Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται ασταθές, αν δεν είναι ευσταθές

Ιδιότητα:

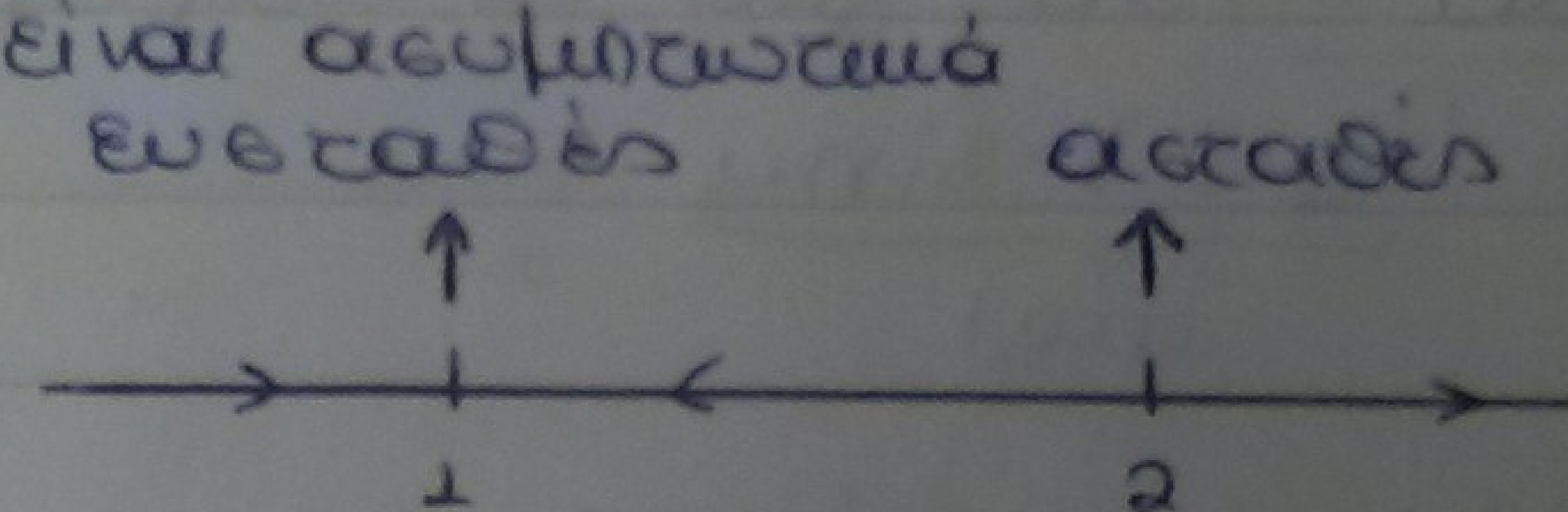
Στην περίπτωση $f'(\bar{y})\neq 0$.

- Τότε το $\bar{y}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν $f'(\bar{y})<0$
- και ασταθές αν $f'(\bar{y})>0$

$$y' = \underbrace{y^2-3y+2}_{f(y)}$$

$f'(y)=2y-3$

$f'(1)=-1<0$

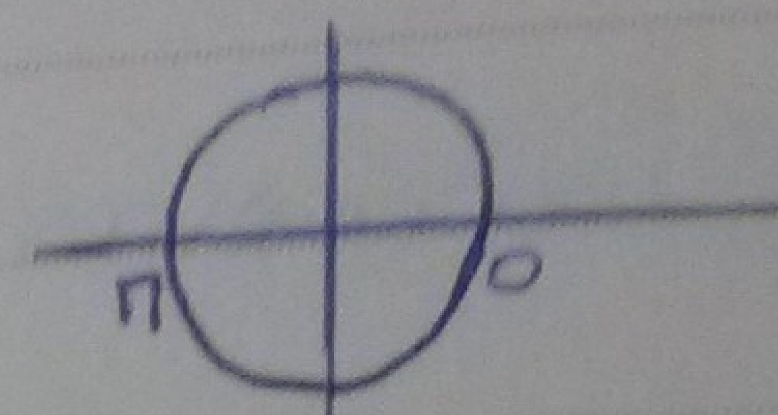


$f'(2)=1>0$

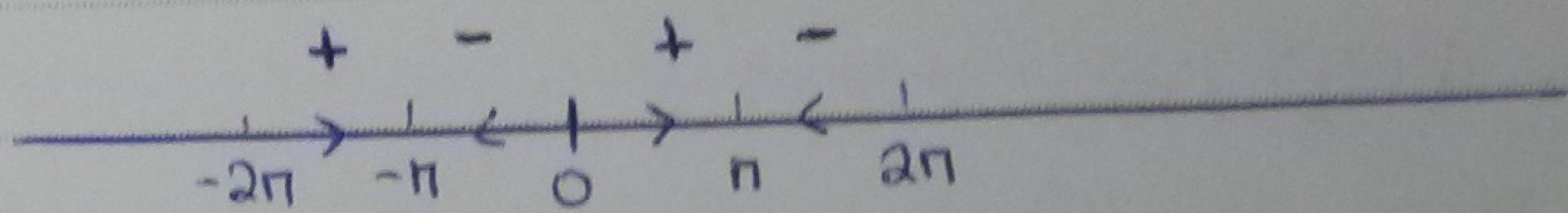
ασταθές το σημείο ισορροπίας "2"

Παράδειγμα: Να γίνει το διάγραμμα φάσης για την

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{\sin y}_{f(y)}$$



$\bar{y} = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$, $k \in Z$



* Στα περιττά ευστάθεια, στα άρτια αστάθεια

Για $n = 2k$ (αστάθεια)

Για $n = 2k+1$ (ευστάθεια)

Παράδειγμα: Να γίνει το διάγραμμα φάσης για την

$$y' = \underbrace{(y-2)\cdot \sin y}_{f(y)}$$

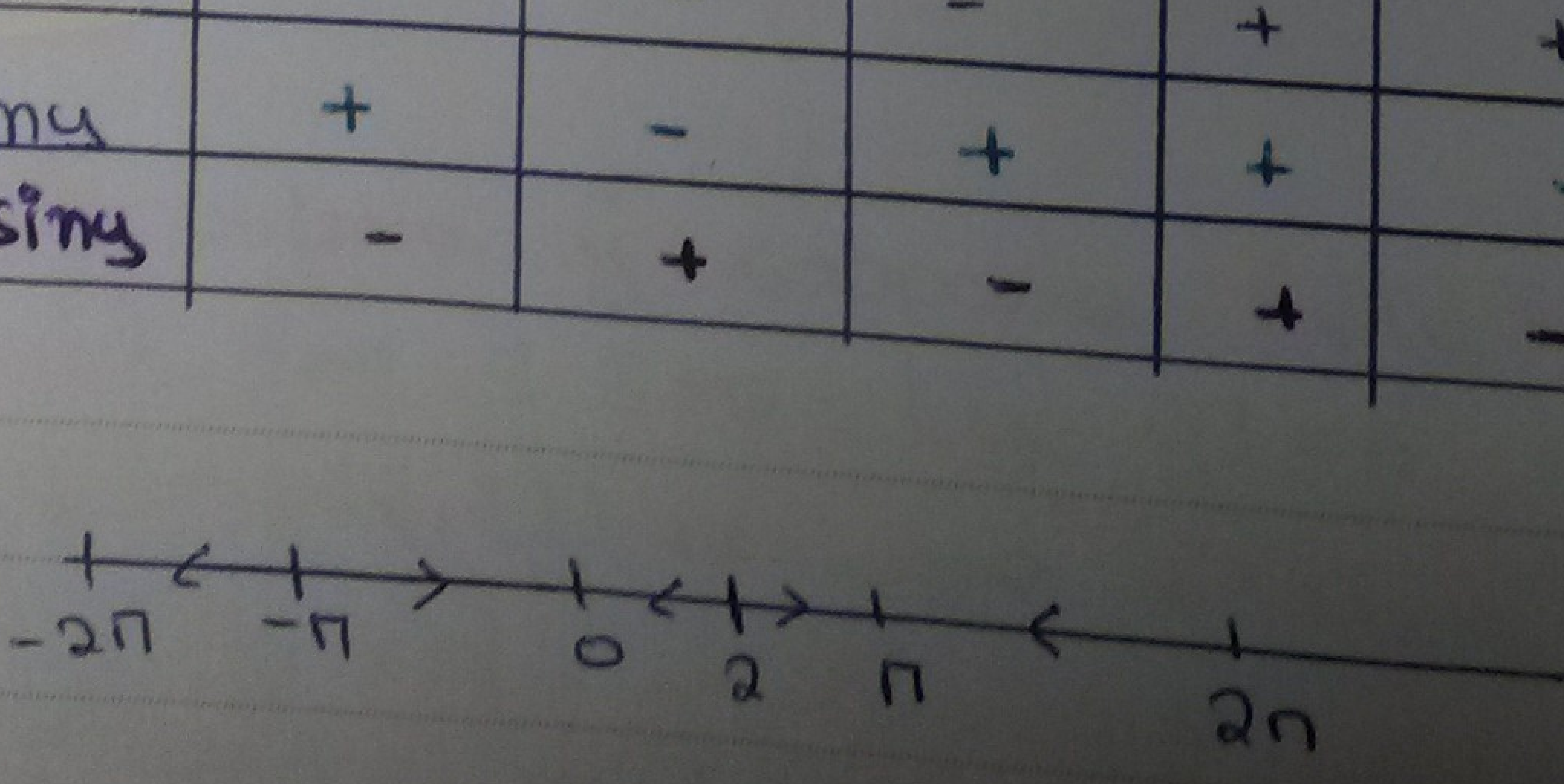
Σημεία ισορροπίας:

$\bar{y} = 2$, $\bar{y} = k\pi$, $k \in Z$ $(k = 0, \pm 1, \dots)$

* βολεύει να κάνουμε πινακάκι, όπως στο σχολείο

$-\pi \quad 0 \quad 2 \quad \pi$

$(y-2)$	−	−	−	+	+
$\sin y$	+	−	+	+	−
$(y-2)\sin y$	−	+	−	+	−



Σπίτι

Άσκηση : Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της δ.ε:

$$y' = \underbrace{y^2 - 6y - 16}_{f(y)}$$

και να βρεθούν τα όρια των λύσεων ($\lim_{t\to+\infty} y(t)$) που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες

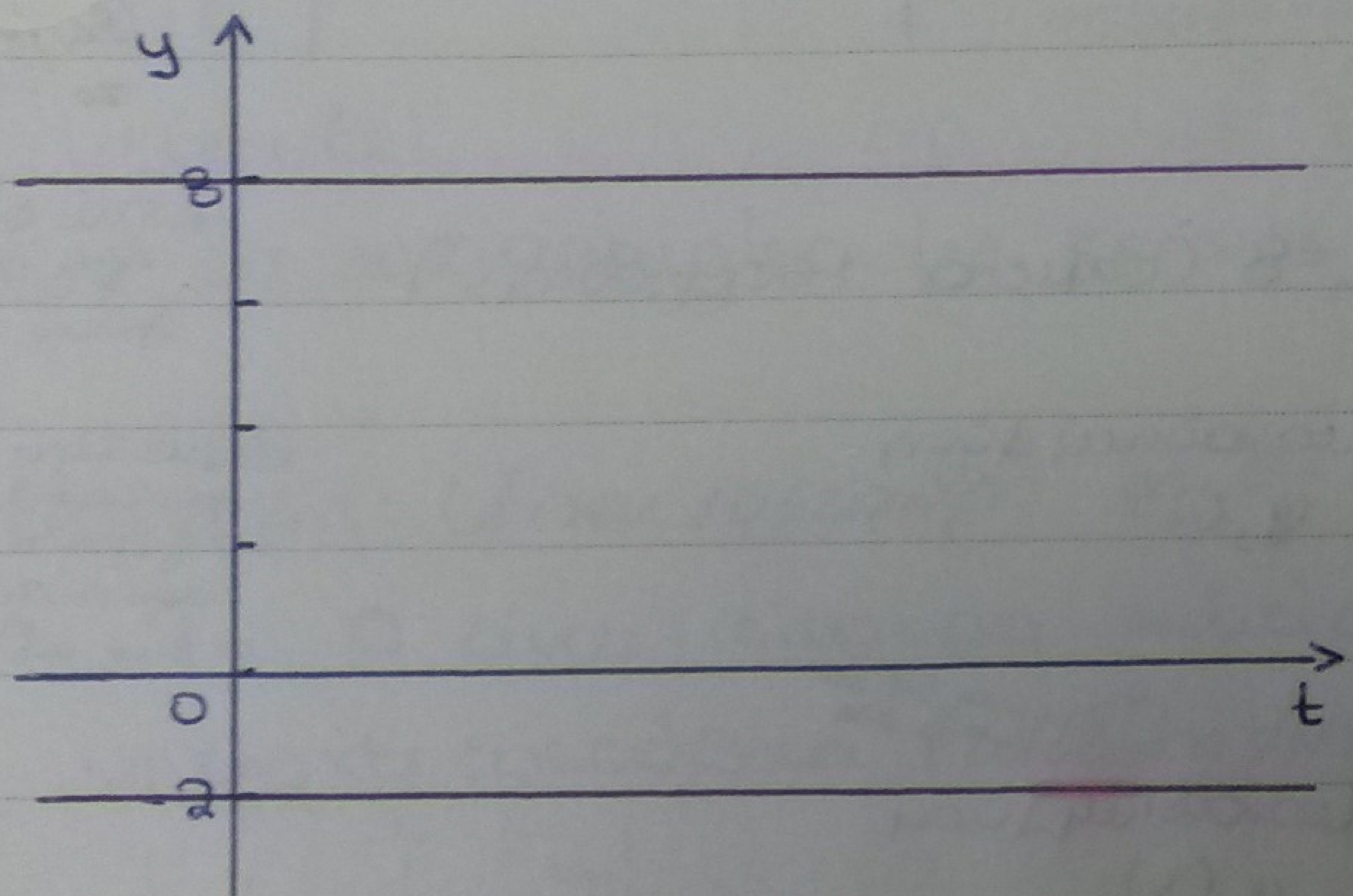
$y(0)=0$, $y(0)=-3$, $y(0)=8$

* Πρέπει να βρούμε τα $\bar{y}$; * Όταν έχω αρχ. συνθ. παίρνω άξονα.

$\Delta = 36+4\cdot 16 = \cancel{36}\,4(9+16) = 4\cdot 25 = 1$

$y_{1,2} = \frac{6\pm 10}{2} \nearrow 8, \searrow -2$

$\bar{y} = 8$, $\bar{y} = -2$



* Φτιάχνουμε τρία ΠΑΤ:

* μεταξύ εύρων έτοιμα

* Θα φανεί ότι ε και μία δίκ, κασική η 8.

i) $\begin{pmatrix} y' = f(y) \\ y(0) = 0 \end{pmatrix}$

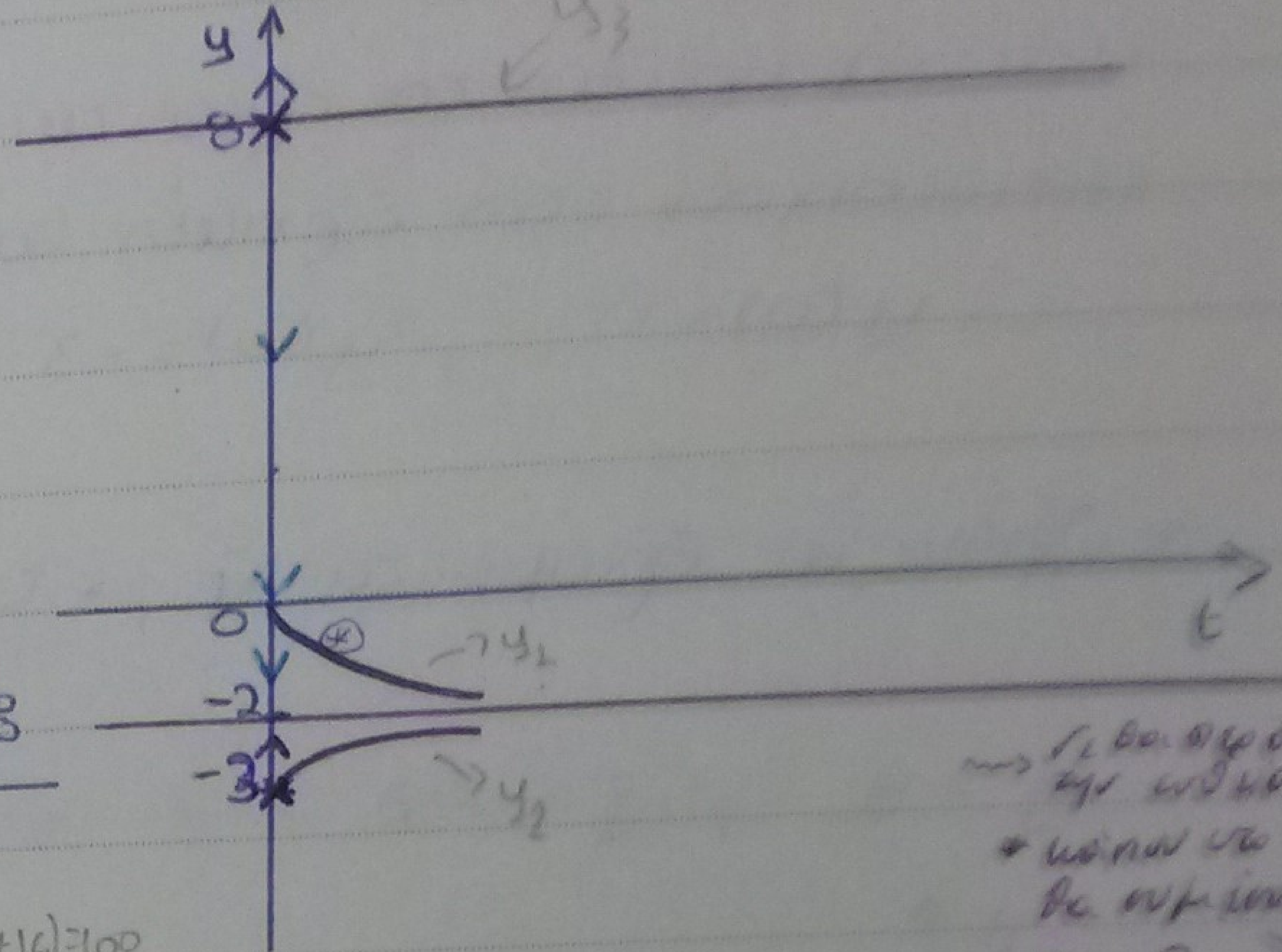
ii) $\begin{pmatrix} y' = f(y) \\ y(0) = -3 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} y' = f(y) \\ y(0) = 8 \end{pmatrix}$

Λύση:

$$y' = \underbrace{y^2 - 6y - 16}_{f(y)}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) \\ y(0) = 0,\ y(0) = -3,\ y(0) = 8 \end{cases}$$



→ δε θα φτάσει την ευθεία

* κάπου στο άπειρο θα συγκλίνουν με το -2

$f(y) = y^2 - 6y - 16$ $\quad \Delta = 36 + 4 \cdot 16 = 4(9+16) = 100$

$y_{1,2} = \frac{6 \pm 10}{2} \lessgtr \begin{matrix} 8 \\ -2 \end{matrix}$

* Έχω αρχικό, άρα έχω να λύσω 3 προβλήματα

• $f(y) = 0$, $\bar{y}_1 = -2$, $\bar{y}_2 = 8$ (σημεία ισορροπίας)

i) $\begin{pmatrix} y' = y^2 - 6y - 16 \\ y(0) = 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ μοναδική λύση $y_1(t)$

⊛ για την αρχική μεταξύ των ε.ι. ξέρω ότι είναι φθίνουσα και ποτέ δεν τέμνει την [illegible]

+ σχήμα με τα διαγράμματα

ii) $\begin{pmatrix} y' = y^2 - 6y - 16 \\ y(0) = -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ μοναδική λύση $y_2(t)$

	$-\infty$	-3	-2	0	8	
$f(y)$	+	+		−	−	+

Έχουμε:

$$\lim_{t \to +\infty} y_1(t) = -2$$

$$\lim_{t \to +\infty} y_2(t) = -2$$

* Εδώ προσοχή! Στο iii πρόβλημα

iii) $\begin{pmatrix} y' = y^2 - 6y - 16 \\ y(0) = 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ μοναδική λύση $y_3(t) = 8$

* δεν μπορεί να περάσει από το ίδιο σημείο 2 λύσεις (λόγω μοναδικότητας), άρα μόνο η y=8 είναι λύση

$$\lim_{t \to +\infty} y_3(t) = 8$$