Επίλυση της γρ. ομ. δ. εξ. $L(y)=0$ με μη σταθερούς συντελεστές

Γενικά χρειάζεται μία λύση της.

Έστω φ_1, $t\in I$ μία λύση της $L(y)=0$.

Αναζητούμε μία άλλη λύση, έστω φ_2:

(φ_1, φ_2 γρ. ανεξ. (δηλ. βάση του χώρου των λύσεων).

1ος τρόπος: (Με την ορίζουσα Wronski)

Αν μία $\varphi_1 \neq 0$ λύση της, έστω φ_2 μία άλλη

$$\frac{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2} \quad \left(\text{Υποβ. τάξης δ. εξ. με αγν. } \varphi_2 \right)$$

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' = \frac{W}{\varphi_1^2}$$

Μία λύση:

$$\varphi_2 = \varphi_1 \int \frac{W}{\varphi_1^2}\,dt$$

ή

$$\boxed{\varphi_2 = \varphi_1 \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2}\,dt}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι

φ_1, φ_2 γρ. αν. λύσεις της $L(y)=0$

1ος τρόπος

$$L(y)=0 \;\Big\|\; \varphi_1(t),\quad \varphi_2(t)=\varphi_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2(t)}\,dt$$

$$W(\varphi_1,\varphi_2)(t)=\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}=\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2$$

$$=\varphi_1\left(\varphi_1'\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2}\,dt+\varphi_1\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2}\right)-\varphi_1'\varphi_1\int\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2}\,dt$$

$$=\varphi_1^2\,\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2}=e^{-\int p(t)dt}\neq 0.$$

⇒ Γραμμική ανεξαρτησία των φ_1, φ_2

Για φ_1, φ_2 λύσεις της $L(y)=0$
Για $\varphi_1\neq 0$, μία άλλη λύση

$$\varphi_2(t)=\varphi_1\int\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2}$$

Άσκηση: Να λυθεί η διαφ. εξ.

$$y'' - \frac{t+1}{t} y' + \frac{1}{t} y = 0, \quad t>0,$$

αν μία λύση της είναι η $\varphi_1(t) = e^t, \ t>0$.

Λύση:

Μια άλλη λύση της είναι

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2(t)} dt$$

$$= e^t \int \frac{e^{\int \frac{t+1}{t} dt}}{e^{2t}} dt$$

$$\left\{ \int \frac{t+1}{t} dt = t + \ln t \right.$$

$$= e^t \int \frac{e^t e^{\ln t}}{e^{2t}} dt$$

$$= e^t \int t e^{-t} dt$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -\int t (e^{-t})' dt \\ & = -te^{-t} + \int e^{-t} dt \\ & = -te^{-t} - e^{-t} \\ & = e^{-t}(-t-1) \end{aligned} \right.$$

$$= e^t \left[e^{-t}(-t-1) \right]$$

$$= -t-1$$

Γενική λύση: $y_{ομ.}(t) = c_1 e^t + c_2 (-t-1)$

ή $y_{ομ}(t) = \kappa_1 e^t + \kappa_2 (t+1)$ (μπορεί να έχει και αυτή τη μορφή)

άσκηση 1ος τε.

Εφαρμογή: Δοθέντος της φ_1 (μιας λύσης της $L(y)=0$)

<u>Παράδειγμα</u>: να βρεθεί μια άλλη λύση.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y''-6y'+9y=0$, αν μια λύση της είναι $\varphi_1(t)=e^{3t}$.

<u>Λύση</u>

Μια λύση της είναι

$$\varphi_2(t)=\varphi_1(t)\int\frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{\varphi_1^2(t)}\,dt$$

$$=e^{3t}\int\frac{e^{\int 6\,dt}}{(e^{3t})^2}\,dt$$

$$=e^{3t}\int\frac{e^{6t}}{e^{6t}}\,dt$$

$$=te^{3t}$$

μη σταθεροί

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0$$

$\varphi_1(t)$ δίνεται

$$\boxed{\varphi_2(t)=\varphi_1(t)\int\frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{\varphi_1^2(t)}\,dt}$$

$L(y)=0$

Ειδική περίπτωση: γραμμ. ομογ. δ.εξ. $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές $L(y)=0$ ή $y''+ay'+by=0$

$y''+ay'+by=0$ ①

Δέχεται λύσεις της μορφής $y(t)=e^{rt}$ ②

①② : $y'(t)=r\cdot e^{rt}$, $y''(t)=r^2e^{rt}$ ③

$(r^2+ar+b)e^{rt}=0$

Συμ., από εδώ προκύπτει:

$r^2+ar+b=0$ (χαρακτηριστική εξίσωση της δ.ε.) *της ομογενούς

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

i) $r^2+ar+b=0$ χαρ.εξ. της ①

$\Delta>0$: $r_1\neq r_2$, με $r_1, r_2\in\mathbb{R}$

$y_1(t)=e^{r_1t}$, $y_2(t)=e^{r_2t}$

γρ. ανεξ. των y_1, y_2,

$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t}\end{vmatrix}$$

$$=r_2e^{(r_1+r_2)t}-r_1e^{(r_1+r_2)t}=(r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)t}\neq 0$$

$$\boxed{y_{ομ}(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}}$$ *γεν. λύση για $\Delta>0$

=>

---

* γραμμ. ανεξ. => ελέγχουμε με Wronski
* θέλουμε λύσεις (πραγματικές) $\in\mathbb{R}$ <u>όχι</u> $\in\mathbb{C}$ => κάπως θα πρέπει να το περιορίσουμε
* Σε αυτές με μη-σταθερούς πρέπει να μου δίνουν λύση.
* Πρέπει μπαίνουν με μη-σταθερούς, μαζί με διδάσκοντα

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \text{ή} \quad L(y) = 0 \qquad * \; e^{-\int p(t)dt} = e^{-at}$$

ii) $\Delta = 0$, $r_1 = r_2 = r = -\frac{a}{2}$

$$y_1(t) = e^{-at/2} \qquad y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)} dt$$

ή

$$y_2(t) = e^{-at/2} \int \frac{e^{-at}}{(e^{-at/2})^2}$$

$$= e^{-at/2} \int \cancel{\frac{e^{-at}}{e^{-at}}}$$

$$= t \cdot e^{-at/2}$$

$$y_{ομ}(t) = c_1 e^{-at/2} + c_2 t e^{-at/2}$$

* Στο τέλος μπορεί να πάρω κατευθεί-αν τους τύπους

$$\boxed{y_{ομ}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-at/2}}$$

iii) $\Delta < 0$, $r_{1,2} = (\gamma \pm i\delta)$

$$y_1(t) = e^{(\gamma + i\delta)t} \qquad y_2(t) = e^{(\gamma - i\delta)t}$$

* ΠΡΟΣΟΧΗ πώς θα διώξουμε το μιγαδικό!!!

Τύπος Euler: $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta}$

* Διαφ. τύπου από βιβλίο

Οπότε, μέσω τύπου Euler, οι λύσεις γίνονται:

$$y_1(t) = e^{\gamma t} (\cos\delta t + i \sin\delta t)$$

$$y_2(t) = e^{\gamma t} (\cos\delta t - i \sin\delta t)$$

$$y_1(t) + y_2(t) = \cancel{2} e^{\gamma t} \cos\delta t$$

$$y_1(t) - y_2(t) = \cancel{2i} e^{\gamma t} \sin\delta t$$

* και ο γρ. συνδ. των λύσεων είναι λύση!!!

* θα έχει λύση και τις c_1, c_2!! διότι έχουμε σταθ. συντ. ⇒ ⇒ $L(y) = 0$

Άρα

$$\boxed{y_{ομ}(t) = e^{\gamma t} (c_1 \cos\delta t + c_2 \sin\delta t)}$$

y_1, y_2 λύσεις, και ο γρ. συνδ. είναι λύση!!!

2/11/17

ii) ρε. ανεξ: $y_1(t) = e^{rt}$, $y_2(t) = t \cdot e^{rt}$

iii) ρε. ανεξ. $y_1(t) = e^{\gamma t} \cos\delta t$, $y_2(t) = e^{\gamma t} \cdot \sin\delta t$

($\Delta < 0$)

Ασκησεις:

i) Να λυθεί η δ.ε. $y''-3y'+2y=0$ (1) $\qquad (\Delta>0)$

$r^2-3r+2=0$ χαρακτ. της (1)

$r_1=1$, $r_2=2$ ρίζες της χαρακτ.

Λύσεις της (1)

$y_1(t)=e^t$, $y_2(t)=e^{2t}$

Γεν. λύση της ομογενούς (1)

$$\boxed{y_{o\mu}(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}}$$

ii) $y''+y'+y=0$ $\qquad (\Delta<0)$

$r^2+r+1=0$

$$r_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \quad \begin{cases} \overset{\gamma t}{-\frac{1}{2}}+\overset{\delta}{\frac{i\sqrt{3}}{2}} \\ -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$^*\, y=\gamma\pm i\delta$

Λύσεις της (1)

Ενσωματώσαμε την σταθερά

$y_1(t)=e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $y_2(t)=e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

Γεν. λύση της ομογενούς (1)

$$\boxed{y_{o\mu}(t)=e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)}$$

$e^{\gamma t}(c_1\cos\delta t+c_2\sin\delta t)$

iii) $y''+4y'+4y=0$ $\qquad (\Delta=0)$

$r^2+4r+4=0 \Leftrightarrow (r+2)^2=0 \Leftrightarrow$

$r=-2$, διπλή

Λύσεις της (1)

$y_1(t)=e^{-2t}$, $y_2(t)=te^{-2t}$

Γεν. λύση της ομογενούς (1)

$$\boxed{y_{o\mu}(t)=(c_1+c_2t)e^{-2t}}$$

Γραμμική δ.ε. $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές.

$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$, α, β : πραγμ. σταθερές (1)

$y' + \alpha y = 0$, $y = e^{-\alpha t}$

[Υπενθύμιση]

$y' + p(t) \cdot y = 0$ | $y = e^{-\int p(t)dt}$

$y' + \alpha y = 0$ $y = e^{-\alpha t}$

Άρα $\boxed{y(t) = e^{\lambda t}}$ (2)

$e^{\lambda t}(\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) = 0$

$\boxed{\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0}$ (3) , (3): χαρακτ. εξισ. της (1)

$\boxed{p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta}$ (4) , (4): χαρακτ. εξισ. της (1)

$\boxed{\Delta = \alpha^2 - 4\beta}$

Χρησιμοποιώ τη Διακρίνουσα για τη δευτεροβάθμια εξίσωση (3)

1) Αν $\Delta > 0$, τότε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (+ Ορίζουσα Wronsk

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

Συνεπώς η Γεν. Λύση είναι: $\left[y_{o\mu}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \right]$

<u>Π.χ.</u>: $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(t) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{3t}$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \,\|\, \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3$

2) Αν $\Delta = 0$, τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

$y_1(t) = e^{\lambda t}$, $y_2(t) = t \cdot e^{\lambda t}$: γραμ. ανεξ.

$$\left[y_{o\mu}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot t e^{\lambda t} \right]$$

3) Αν $\Delta < 0$, τότε $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\delta$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\varphi_1(t) = e^{(\gamma + i\delta)t}, \quad \varphi_2(t) = e^{(\gamma - i\delta)t}$$

$$\varphi_1(t) = e^{\gamma t} \cdot e^{i\delta t} = e^{\gamma t} \cdot (\cos\delta t + i \sin\delta t)$$

! Μετασχηματισμός

$$e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$$

Και έχουμε: (με βάση τον τύπο του Euler)

$$\varphi_1(t) = e^{\gamma t}\cdot\cos\delta t + i e^{\gamma t}\cdot\sin\delta t$$

$$\varphi_2(t) = e^{\gamma t}\cdot\cos\delta t - i e^{\gamma t}\cdot\sin\delta t$$

• Προσθέτω κατά μέλη:

$$\varphi_1(k) + \varphi_2(k) = 2\cdot\left(e^{\gamma t}\cos\delta t\right)$$

δηλ. $y_1(t) = e^{\gamma t}\cdot\cos\delta t$ (είναι η 1η λύση)

• Αφαιρώ κατά μέλη:

y_1, y_2: Γραμμικά Ανεξ. λύσεις

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = 2 i e^{\gamma t}\cdot\sin\delta t$$

δηλ. $y_2(t) = e^{\gamma t}\cdot\sin\delta t$ (είναι η 2η λύση)

$$\longrightarrow \quad y_{o\mu}(t) = e^{\gamma t}\left(c_1\cdot\cos\delta t + c_2\cdot\sin\delta t\right)$$

* Παραδείγματα *

1. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Χαρακτηριστική Εξίσωση: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$$y(t) = c_1\cdot e^{3t} + c_2\cdot t e^{3t}, \quad t\in\mathbb{R}$$

$y'' - 4y' + 5y = 0$ | $\Delta = 16 - 20 = -4$ / $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i$

Χαρ. Εξισ. $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ | $\lambda_{1,2} = +2 \pm i$

$$y(t) = e^{2t}\left(c_1\cdot\cos t + c_2\cdot\sin t\right) \blacksquare$$

$y'' + y = 0$

Χαρ. Εξισ. $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

$$y(t) = c_1\cdot\cos t + c_2\cdot\sin t \quad \blacksquare$$

* Άσκηση *

Να μετασχηματιστεί σε δ.ε. $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές. $(t = e^s) \rightsquigarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} \sim s = \ln t$

$$t^2\cdot y'' + \alpha\, t\cdot y' + \beta y = 0 \quad , t > 0$$

Λύση

$$y(t) = y(e^s) = u(s)$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = e^{-s}\,\frac{du}{ds}$$

$$y''(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-s}\frac{du}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(e^{-s}\frac{du}{ds}\right)\frac{ds}{dt} = \left(-e^{-s}\frac{du}{ds} + e^{-s}\frac{d^2u}{ds^2}\right)e^{-s}$$

$$= e^{-2s}\left(-\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2}\right)$$

$$e^{2s} \cdot e^{-2s} \left(-\frac{du}{ds} + \frac{d^2 u}{ds^2} \right) + \alpha \cdot e^{s} \cdot e^{-s} \frac{du}{ds} + \beta u = 0$$

$$\frac{du^2}{ds^2} + (\alpha - 1) \frac{du}{ds} + \beta u = 0 \quad \blacksquare$$

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ γραμμικές δ.ε. $2^{ης}$ τάξη

$$L[y] := y'' + p(t)y' + q(t)y = r(t) \qquad (1)$$

$p, q, r \in C(I)$

Ιδιότητα #1 (Διαφορά δύο λύσεων της (1))
Αν y_1, y_2 λύσεις της (1) (μη ομογενείς)
τότε: $\boxed{\varphi(t) = y_1(t) - y_2(t)}$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Αποδ.

$$L[\varphi] = L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = r(t) - r(t) = 0. \blacksquare$$

Ιδιότητα #2 (Γενική λύση της (1))
Αν $y_{ομ}$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. ($L[y] = 0$) και y_p : μία λύση της (1) ($L[y] = r$), τότε
η γενική λύση της (1) ($L[y] = r$), τότε
όλες οι λύσεις δίνονται από τον τύπο: $\boxed{y(t) = y_{ομ}(t) + y_p(t)}$

Αποδ

Αν $y(t)$ είναι τυχούσα λύση της (1) και $y_p(t)$ είναι μία λύση της (1) τότε:

$$y(t) - y_p(t) = y_{ομ}(t). \blacksquare$$

Εύρεση μιας λύσης της ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ

$$y(t) = y_{ομ}(t) - y_p(t)$$

1. Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων (Μέθοδος Lagrance)

2. Μέθοδος απροσδιορίστων συντελεστών. (i) σταθερούς συντελεστές, ii) όταν το $r(t)$ είναι ειδικής μορφής).

1. Έστω: $y_{ομ}(t) = c_1 \cdot \varphi_1(t) + c_2 \cdot \varphi_2(t)$, c_1, c_2: σταθ.
η γενική λύση της ομογενούς. φ_1, φ_2: λύσεις της αντιστ. ομογενούς.

Αναζητούμε μια λύση της ΜΗ Ομογενούς της μορφής:

$$y_p(t) = c_1(t)\,\varphi_1(t) + c_2(t)\cdot\varphi_2(t)$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε:

$$c_1\underbrace{\left(\varphi_1'' + p(t)\varphi_1' + q(t)\varphi_1\right)}_{0} + c_2\underbrace{\left(\varphi_2'' + p(t)\varphi_2' + q(t)\varphi_2\right)}_{0} +$$

$$(c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2) + (c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2') + p(t)\left(c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2\right) = r(t)$$

Αν $c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0$

$c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = r(t)$

$$c_1' = \frac{-\varphi_2(t)r(t)}{W(t)}$$

* Wronski *

$$c_2' = \frac{\varphi_1(t)r(t)}{W(t)}$$

Δηλαδή: $$c_1'(t) = -\frac{\varphi_2(t)}{W(t)} r(t)$$

$$c_2'(t) = \frac{\varphi_1(t)}{W(t)} r(t).$$

$c_1(t) = -\int \frac{\varphi_2(t)}{W(t)} r(t)\,dt$	$c_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_2(t) r(s)}{W(s)} ds$
$c_2(t) = \int \frac{\varphi_1(t)}{W(t)} r(t)\,dt$	$c_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_1(t) r(s)}{W(s)} ds.$

Επομένως:

$$y_p(t) = -\varphi_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_2(s)}{W(s)} r(s)\,ds + \varphi_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_1(s)}{W(s)} r(s)\,ds$$

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\frac{-\varphi_1(t)\varphi_2(s) + \varphi_2(t)\varphi_1(s)}{W(s)}}_{G(s,t)} r(s)\,ds$$

$G(s,t) \Rightarrow$ Συνάρτηση Green.

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} G(s,t) r(s)\,ds$$

■

Εφαρμογή

Να λυθεί η: $y'' - 3y' + 2y = -\dfrac{e^{2t}}{e^t+1} = r(t)$

Η γεν. λύση της δ.ε. δίνεται από τον τύπο: $y(t) = y_{ομ}(t) + y_p(t)$.

όπου:

$y_{ομ}$: η γενική λύση της αντιστ. ομογενούς

y_p: μία λύση της μη ομογ.

i) Γενική Λύση : $y'' - 3y' + 2y = 0$

χαρ. εξ.: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \;\|\; \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 \;\|\; \varphi_1(t) = e^t,\ \varphi_2(t) = e^{2t}$

$\boxed{y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t}}$

ii) Μια λύση της μη ομογενούς :

$$y_p(t) = c_1(t)\cdot\varphi_1(t) + c_2(t)\cdot\varphi_2(t).$$

με : $c_1(t) = +\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{e^{3t}} \cdot \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,dt = \ln(1+e^t)$

$* \ W(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix} = e^{3t}$

και: $c_2(t) = -\displaystyle\int \frac{e^t}{e^{3t}} \cdot \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,dt = \ln(1+e^{-t})$

Δηλ. $\boxed{y_p(t) = e^t \cdot \ln(1+e^t) + e^{2t} \cdot \ln(1+e^{-t})}$

Τελικά $y(t) = y_{ομ}(t) - y_p(t) = \dots$ (Να κάνω τις πράξεις)

Μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών

(Εφαρμόζεται μόνο σε περιπτώσεις με σταθ. συντελεστές)

$$L[y] := y'' + ay' + by = r(t) \quad (1) \quad , a, b \text{ σταθ.}$$

Το $r(t)$ μπορεί να είναι [γραμμ. συνδυασμός της ομογ. λύσης
λύση γραμμ. δ.ε. με σταθ. συντελεστές. *

Π.χ. 1) $y'' - 4y = e^{3t}$ $\Rightarrow 9ae^{3t} - 4ae^{3t} = e^{3t}$, $a = \frac{1}{5}$ / $y_p(t) = \frac{1}{5}e^{3t}$

$y_p(t) = a \cdot e^{3t}$ ← (Αναζητούμε μια λύση της μορφής)

$y(t) = y_{ομ}(t) + y_p(t)$

Γεν. Λύση: $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t}$

2) $y'' - 4y = e^{2t}$ * Αν πάλι αναζητήσω λύση της μορφής ae^{rt} προκύπτει αδύνατο. $2ae^{2t} - 4ae^{2t} = e^{2t}$

$y_p(t) = a \cdot e^{2t}$ $\Rightarrow 4ae^{2t} - 4ae^{2t} = e^{2t}$ (δεν μπορούμε να βρούμε το a!)

Τώρα αναζητούμε λύση:

$y_p(t) = ate^{2t} \Rightarrow y_p'(t) = ae^{2t} + 2ate^{2t}$

$y_p''(t) = 2ae^{2t} + 2ae^{2t} + 4ate^{2t}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 4ae^{2t} + 4ate^{2t} - 4ate^{2t} = e^{2t} \Longrightarrow a = \frac{1}{4}$

δηλ. μια λύση είναι: $y_p(t) = \frac{1}{4}te^{2t}$

$$y(t) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{2t}$$

3) $y'' + 4y = \cos t$ Αναζητώ λύση: $y_p(t) = aσυνt + βημt$

$y_p(t) = a\cos t + b\sin t$

$y_p'(t) = a\sin t + b\cos t \Rightarrow y_p''(t) = -a\cos t - b\sin t \Rightarrow$

$\Rightarrow -a\cos t - b\sin t$

Με αντικατάσταση και πράξεις: $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$ / δηλ.: $y_p(t) = \frac{1}{3}συνt$

$\lambda^2 + 4 = 0$

$\Delta = -16$

$\lambda_{1,2} = \frac{\pm i4}{2} = \pm 2i \Longrightarrow y(t) = \frac{1}{3}συνt + c_1 συν2t + c_2 \cdot ημ2t$

4) $y'' + 4y = \sigma\upsilon\nu 2t$ • Αν αναζητήσουμε λύση της μορφής $y_p(t) = \alpha\sigma\upsilon\nu 2t + b\eta\mu 2t$ καταλήγω σε αδύνατο διότι η $\sigma\upsilon\nu 2t$ είναι λύση της ομογένειας.

• Τώρα αναζητώ λύση: $y_p(t) = t(\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2t + b\eta\mu 2t)$ // βρίσκω $\alpha = \frac{1}{4}$

$\Longrightarrow y_p(t) = \frac{1}{4} t \cdot \sigma\upsilon\nu 2t$

Άρα η γεν. λύση: $y(t) = c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu 2t + c_2\,\eta\mu 2t + \frac{1}{4} t\,\sigma\upsilon\nu 2t$.

Περιγραφή της μεθόδου:

Αν $r(t) = e^{\gamma t}\left[P_m(t)\sigma\upsilon\nu\delta t + Q_m(t)\eta\mu\delta t\right]$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

και $P_m(t)$, $Q_m(t)$ πολυώνυμα του t m- βαθμού.

Αν $\gamma + i\delta$ είναι ρίζα της χαρ εξ της δ.ε. (1), πολλαπλότητας ρ.

τότε η δ.ε. (1) έχει μία λύση της μορφής

$$y_p(t) = t^{\rho} e^{\gamma t}\left[P^*_m(t) \cdot \sigma\upsilon\nu\delta t + Q^*_m(t)\eta\mu\delta t\right]$$

5) $y'' - 2y' + y = 3e^{t} \longrightarrow$ (ρίζα της ομογ. οπότε ψάχνω $t\alpha e^t$)

Όμως έχει πολ/τα 2 οπότε $t^2\alpha e^t$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, που έχει διπλή ρίζα το 1.