

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΕΡΓΑΣΙΑ 2

1. Να λυθούν τα κάτωθι προβλήματα αρχικών τιμών με χρήση μετασχηματισμού Laplace:

$$i) \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{3t} \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \quad ii) \begin{cases} y'' + 2y = \sin 3t \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Να βρεθεί με χρήση μετασχηματισμού Laplace η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y'' + 4y = 0 \quad .$$

(Υπόδειξη: Θέτουμε αρχικές συνθήκες $y(0) = A$ και $y'(0) = B$.)

3. Να λυθούν τα κάτωθι προβλήματα αρχικών τιμών με χρήση μετασχηματισμού Laplace:

$$i) \begin{cases} y' + 2y = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad ii) \begin{cases} y' + y = xe^{-x} \\ y(0) = -2 \end{cases}, \quad iii) \begin{cases} y' + 20y = 6\sin 2x \\ y(0) = 6 \end{cases},$$

$$iv) \begin{cases} y'' + 2y' - 3y = \sin 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}, \quad v) \begin{cases} y''' - y = 5 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases},$$

$$vi) \begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 2. \end{cases}, \quad vii) \begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 3e^{-2x} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}.$$

(Απαντήσεις: $i) y = \frac{2}{3}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$, $ii) y = -2e^{-x} + \frac{x^2}{2}e^{-x}$,

$iii) y = \frac{1}{101} (609e^{-20x} + 30\sin 2x - 3\cos 2x)$,

$iv) y = \frac{1}{10}e^x - \frac{1}{26}e^{-3x} - \frac{4}{65}\cos 2x - \frac{7}{65}\sin 2x$,

$v) y = -5 + \frac{5}{3}e^x + \frac{10}{3}e^{-x/2}\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $vi) y = \frac{5}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$,

$vii) y = \frac{3}{5}e^{-2x} + \frac{2}{5}e^{-x}\cos 2x + \frac{13}{10}e^{-x}\sin 2x$.)