Κανόνες (Guillaume) de l'Hospital — Κανόνες του (Johann Bernoulli).

Θεώρημα: 1) Αν $\lim_{x\to u} f(x) = \lim_{x\to u} g(x) = 0$ και υπάρχει το $\lim_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε $\lim_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\boxed{\text{Μορφή } \left(\frac{0}{0}\right)}$

Σχόλιο: Το u μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός ή $x \to u^+$ ή $x \to u^-$ ή $x \to -\infty$ ή $x \to +\infty$.

Παραδείγματα: 1) $\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$. Έχουμε $\lim_{x\to 0}(x+\sin 2x) = 0+\sin 0 = 0$ και $\lim_{x\to 0}(x-\sin 2x) = 0-\sin 0 = 0$.

Αλλά $\lim_{x\to 0} \frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x} = \frac{1+2\cos 0}{1-2\cos 0} =$

$= \frac{1+2}{1-2} = -3$. Άρα $\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x} = -3$.

2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x-1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2x} =$

$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} e^x = \frac{1}{2}(+\infty)\cdot 1 = +\infty$.

Θεώρημα: 2) Αν $\lim_{x\to u} f(x) = \pm\infty$ και $\lim_{x\to u} g(x) = \pm\infty$ και υπάρχει το $\lim_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε $\lim_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(Όπως προηγουμένως, αν $u \in \mathbb{R}$ μπορεί να έχουμε $x \to u^+$, $x \to u^-$, ή μπορεί $u = \pm\infty$) $\boxed{\text{Μορφή } \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}$

Παραδείγματα: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (2)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x)$. Αλλά $x\to 0^+$ και $\ln x \to -\infty$.

Κάνουμε τον μετασχηματισμό: $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0^+} (x) = 0$.

Γενικά παραδείγματα:

1). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x - x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x+e^{-x}-x^2-2)'}{(\sin^2 x - x^2)'} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{2\sin x\cos x - 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(2\sin x\cos x-2x)'} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\cos^2 x - \sin^2 x - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(\cos^2 x - \sin^2 x - 1)'} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{-2\cos x\sin x - 2\sin x\cos x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= -\dfrac{1}{8}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-e^{-x})'}{(\cos x\sin x)'} = -\dfrac{1}{8}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}}{-\sin^2 x + \cos^2 x} =$

$= -\dfrac{1}{8}\dfrac{e^0+e^0}{-0^2+1^2} = -\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{2}{1} = -\dfrac{1}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x-\pi}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{(\sin x)'}{(\sqrt{x-\pi})'} = \lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x-\pi}}} =$

$= \lim\limits_{x\to\pi^+} \left(2\cos x\cdot\sqrt{x-\pi}\right) = 2\cdot(-1)\cdot 0 = 0$.

3) $\lim_{x\to 0^+} (x^x)$ Απροσδιοριστία της μορφής (0^0)

$$\lim_{x\to 0^+}(x^x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)}$$

Αλλά το $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$ το έχουμε υπολογίσει (σελ. 2 – παρ. 3) και $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0$. Άρα $\lim_{x\to 0^+}(x^x) = e^0 = 1$.

4) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$. Έχουμε $\tan x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}^-]{} +\infty$ και $\cos x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}^-]{} 0^+$. Απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty)^0$.

Κάνουμε τα ίδια:

$$(\tan x)^{\cos x} = e^{\cos x \ln(\tan x)}$$

και $\cos x \ln(\tan x) = \cos x \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \cos x \ln(\sin x) - \cos x \ln(\cos x)$

Τώρα $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x \ln(\sin x)) = \cos\frac{\pi}{2}\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = 0\cdot \ln 1 = 0$.

Και στη δεύτερη περίπτωση παρατηρούμε ότι $\cos x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}^-]{} 0^+$, άρα θέτουμε $u = \cos x \to 0^+$ και υπολογίζουμε το $\lim_{u\to 0^+}(u\ln u) = 0$. (Το έχουμε υπολογίσει).

Άρα $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x \ln(\tan x)) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x} = e^0 = 1.$$

5) $\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+} e^{\sin x \ln x}$. (Μορφή εκθέτη $0\cdot(-\infty)$)

Έχουμε $\lim_{x\to 0^+}(\sin x \ln x) = \cancel{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot x \ln x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\,\underbrace{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)}_{=0}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sin x)'}{(x)'}\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}(\cos x)\cdot\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=$$

$=1\cdot 0=0$. Άρα $\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\sin x}\right)=e^0=1$

Οι κανόνες de l'Hospital δεν είναι πανάκεια.

<u>π.χ.</u> $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0}}\sqrt{\frac{2+x^2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{x^2}+1}=$

$=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}+1}=\sqrt{0+1}=1$, χωρίς de l'Hospital.

<u>Πλάγιες ασύμπτωτες</u>: 1) Μια συνάρτηση f που ορίζεται σ' ένα διάστημα της μορφής $(a,+\infty)$ έχει πλάγια ασύμπτωτη για $x\to+\infty$ την ~~αν υπάρχει~~ ευθεία $y=\lambda x+\beta$ τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x-\beta)=0$.

2) Αν η f ορίζεται σ' ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$ έχει πλάγια ασύμπτωτη για $x\to-\infty$ την ευθεία (αν υπάρχει) $y=\lambda x+\beta$, τέτοια ώστε $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x-\beta)=0$.

Ειδικά, αν $\lambda=0$ μιλάμε για <u>οριζόντια ασύμπτωτη</u>.

Πώς βρίσκουμε τις πλάγιες ασύμπτωτες!

1) Αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη $y=\lambda x+\beta$, για $x\to+\infty$ (ή $x\to-\infty$), τότε η κλίση λ ισούται με $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $\left(\text{αντίστοιχα } \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\right)$

2) Αφού υπολογίσουμε το λ, το β ισούται με $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)$).

Παραδείγματα: 1) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{(x+1)^2+1}$, άρα πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

Τώρα
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}\underset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=-\sqrt{1+0+0}=$$
$$=-1.$$

Τώρα,
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x))=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right)=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x+2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x}=$$
$$\underset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=$$
$$=-\frac{2(1+0)}{\sqrt{1+0+0}+1}=-\frac{2}{2}=-1$$

Άρα η $y=-x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f για $x\to-\infty$.

Ομοίως
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\underset{x>0}{=}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{\cancel{x}}=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right) \underset{\substack{(+\infty)-(+\infty)\\ \text{απροσδιορ.}}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x+2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} =$$

$$\underset{x>0}{=} 2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} = 2\cdot\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Άρα η $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f για $x\to+\infty$.

Υπενθύμιση: Αν η f ορίζεται σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και δεν ορίζεται στο x_0 και επιπλέον $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$ ή $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$ ή $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$ ή $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$, τότε η κατακόρυφη ευθεία $x=x_0$ λέγεται κάθετη (ή κατακόρυφη) ασύμπτωτη της f.

Παράδειγμα: $f(x)=\frac{1}{x-1}$. Πεδίο ορισμού $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}=$
$=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Επίσης $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$ και $\lim_{x\to1^+}f(x)=$
$=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$. Άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

~~Πλάγιες~~ Οριζόντιες ασύμπτωτες: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x(x-1)}=0.$

~~Σχόλιο~~ Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη για $x\to-\infty$

~~[illegible]~~

Ακόμη, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$, και άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$

<u>Σχόλιο:</u> Στην περίπτωση που $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}$, τότε η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=a$.

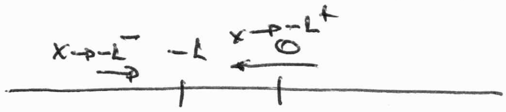
<u>Παράδειγμα:</u> Έστω $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$, $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2$, άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη για $x\to+\infty$ την $y=2$.

Ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2$, άρα και για $x\to-\infty$ έχει την ίδια οριζόντια ασύμπτωτη.

Ακόμα, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}(2x-1)\cdot\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=$

$=(-3)(-\infty)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(2x-1)\cdot\lim\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=$

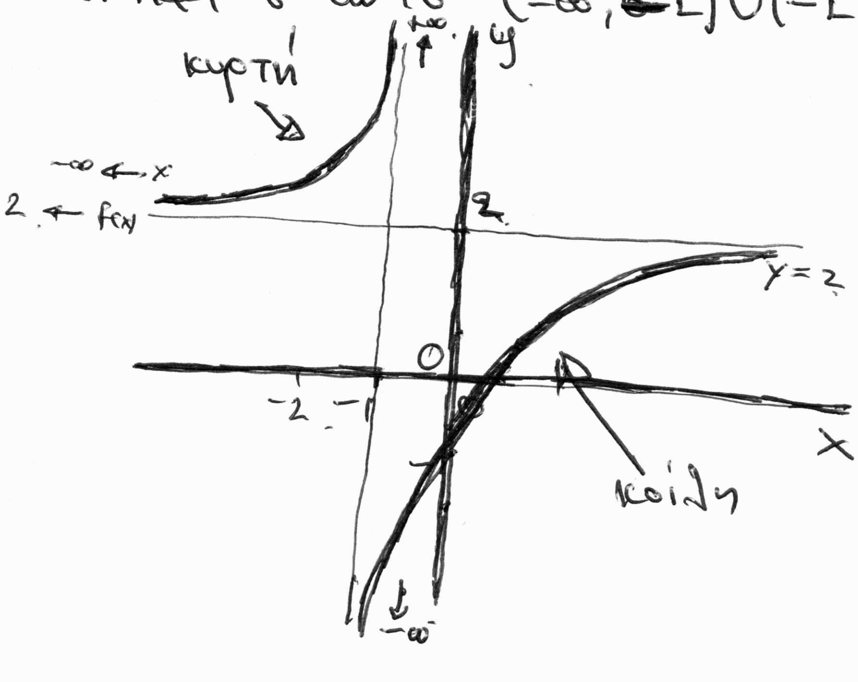


$=(-3)(+\infty)=-\infty$. Άρα η κατακόρυφη ευθεία $x=-1$ είναι ασύμπτωτη της f.

<u>Μονοτονία:</u> $f'(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)'=\dfrac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$, για κάθε $x\neq0$.

Είναι λάθος να λέμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της, γιατί το $x_0=-1$ δεν ανήκει σ' αυτό $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$



Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι κυρτή στο $(-\infty,-1)$ και κοίλη στο $(-1,+\infty)$

<u>Άσκηση:</u> Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\frac{x^2-x+4}{x-1}, \text{ για κάθε } x\neq 1.$$

<u>Λύση:</u> 1) <u>Μονοτονία:</u> $f'(x)=\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}\right)'=$

$$=\left(\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}+\frac{4}{x-1}\right)'=\left(x+\frac{4}{x-1}\right)'=1-\frac{4}{(x-1)^2}$$

Άρα $f'(x)>0 \iff 1>\frac{4}{(x-1)^2} \iff (x-1)^2>4 \iff$

$$\iff |x-1|>2 \iff \begin{cases} x-1<-2 \\ \text{ή} \\ x-1>2 \end{cases} \iff \begin{cases} x<-1 \\ \text{ή} \\ x>3 \end{cases}$$

$f'(x)<0 \iff 1<\frac{4}{(x-1)^2} \iff |x-1|<2 \iff -2<x-1<2$
$\iff -1<x<3$ <u>Αλλά στο $x=1$ δεν ορίζεται.</u>

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
f	↗		↘	‖	↘		↗
		Τ.μ.				Τ.Ε.	

2). <u>Κυρτότητα – σημεία καμπής:</u> $f''(x)=\left(1-\frac{4}{(x-1)^2}\right)'=$

$=\frac{8}{(x-1)^3}$. Άρα $f''(x)>0 \iff (x-1)^3>0 \iff x-1>0$

$\iff x>1$ και $f''(x)<0 \iff \dots\ x<1$.

Στο $x=1$ δεν έχουμε σημείο καμπής γιατί το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Άρα f ~~κυρτή~~ κοίλη στο $(-\infty,1)$ και ~~κοίλη~~ κυρτή στο $(1,+\infty)$.

~~3) Ασύμπτωτες~~

3) <u>Ασύμπτωτες:</u> Έχουμε $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x+\frac{4}{x-1}\right)=$
$=1+(-\infty)=-\infty$. και $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x+\frac{4}{x-1}\right)=$
$=1+(+\infty)=+\infty$.

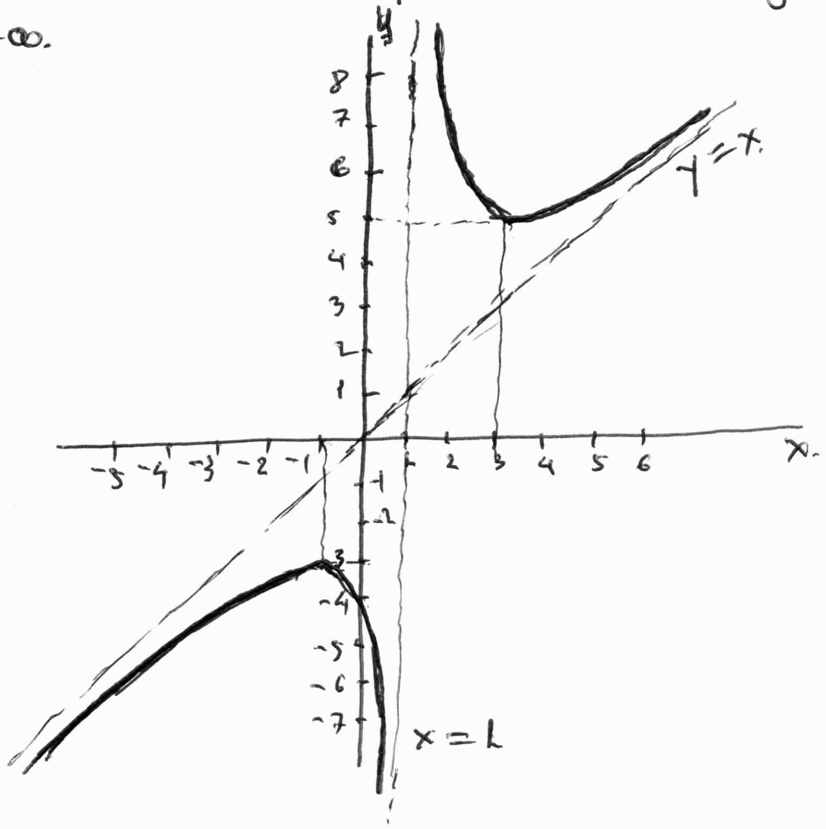
Άρα η κατακόρυφη ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Τώρα, $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+4}{x^2-x}=1$ και $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x}+4-\cancel{x^2}+\cancel{x}}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-1}=$

$=0$. Άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη για $x\to-\infty$. Ομοίως $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$.

Άρα η ίδια ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη για $x\to+\infty$.



<u>Άσκηση:</u> Δίνεται η συνάρτηση $\operatorname{arccot}: \mathbb{R}\to(0,\pi)$. Να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση.

<u>Λύση:</u> $(\operatorname{arccot}x)'=-\frac{1}{1+x^2}<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

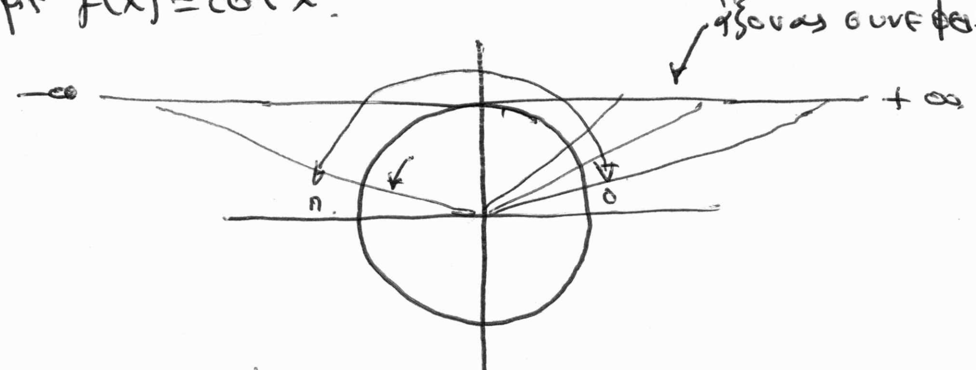
Άρα η arccot είναι γνησίως φθίνουσα.

<u>Κυρτότητα:</u> $(\operatorname{arccot}x)''=-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

Άρα η arccot είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$. Σημείο καμπής το $(0,\frac{\pi}{2})$.

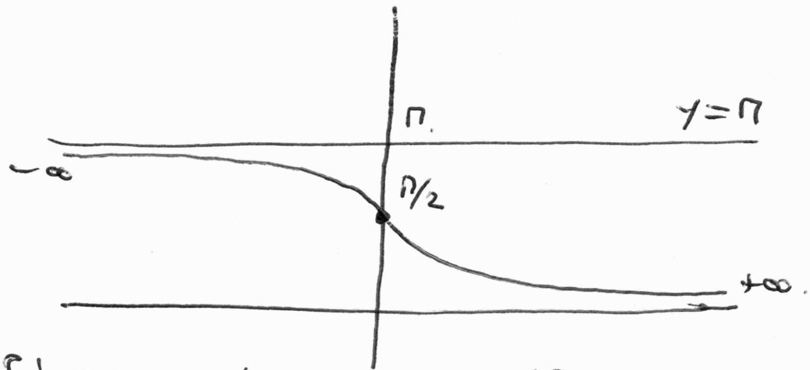
Για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x$ και το $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x$ σκεφτόμαστε ως εξής.

Η arccot ορίστηκε σαν η αντίστροφη της $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\cot x$.



Αν $x\to0^+$ παρατηρούμε από τον τριγωνομετρικό κύκλο ότι ~~cotx→+∞~~ $y=\cot x\to+\infty$. Αντιστρέφοντας, αν $y=\cot x\to+\infty$, ~~τότε x→0+, ή αλλάζοντας~~
τότε $x=\operatorname{arccot} y\to0^+$, ή αλλάζοντας τα x και y,
αν $x=\cot y\to+\infty$, τότε $y=\operatorname{arccot} x\to0^+$

Ομοίως, αν $x\to\pi^-$, τότε $\cot x=y\to-\infty$. ή αντιστρέφοντας, αν $y=\cot x\to-\infty$, τότε $x=\operatorname{arccot} y\to\pi^-$
Εναλλάσσοντας τα x, y έχουμε ότι αν
$x=\cot y\to-\infty$, τότε $y=\operatorname{arccot} x\to\pi^-$



Οριζόντιες ασύμπτωτες ο άξονας των x και η ευθεία $y=\pi$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-2, 2)$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ii) $f(x)=\text{εφ}x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

iii) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ iv) $f(x)=\begin{cases} x & , \ x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \ x>0 \end{cases}$.

2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ ii) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$ ii) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ iii) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}x}{\ln(x+1)}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\text{συν}x^2}{x^4}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\text{ημ}x}{1-\text{συν}x}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ και οι ευθείες ε_1: $y=-x-1$ και ε_2: $y=x+1$. Να αποδείξετε ότι

i) Η ε_1 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, ενώ η ε_2 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+2x+2>(x+1)^2\ge 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $+\infty$.

2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x^2}{2^x}$ ii) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

3. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \eta\mu x+\alpha & , \quad x\le 0 \\ e^{\beta x} & , \quad x>0 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x} & , \quad 0<x\neq 1 \\ -1 & , \quad x=1 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής ii) $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1} & , \quad \text{αν} \quad x\neq 1 \\ 0 & , \quad \text{αν} \quad x=1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad \text{αν} \quad x\le 1 \\ 1+\dfrac{\ln x}{x} & , \quad \text{αν} \quad x>1 \end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, ενώ

ii) Η g είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x=0 \\ (1-e^{-x})\ln x & , \quad x\in(0,1] \end{cases}.$$

i) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} x\ln x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $O(0,0)$.

Αρχική συνάρτηση – αόριστο ολοκλήρωμα

Έστω $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής, Δ διάστημα του $\mathbb{R}$.

Μια συνάρτηση $F: \Delta \to \mathbb{R}$ λέγεται αρχική συνάρτηση της f ή αόριστο ολοκλήρωμα της f αν

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Μια συνεχής συνάρτηση $f: \Delta \to \mathbb{R}$ έχει άπειρες αρχικές συναρτήσεις.

Αν $F, G: \Delta \to \mathbb{R}$ είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της f τότε η διαφορά τους $F-G$ $\left((F-G)(x) = F(x) - G(x)\ \forall x \in \Delta\right)$ είναι σταθερά.

Πράγματι, $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Αν λοιπόν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και θέτουμε $H(x) = F(x) - G(x)$ $\forall x \in \Delta$, τότε από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφ. λογισμού προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με $H'(\xi) = \dfrac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

Αλλά $H'(\xi) = F'(\xi) - G'(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0$.

Άρα $H(x_2) \underset{(1)}{=} H(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) - G(x_2) = F(x_1) - G(x_1)$,

δηλαδή η διαφορά $H(x) = F(x) - G(x)$ είναι σταθερή, έστω $c \in \mathbb{R}$. Τότε $F(x) = G(x) + c$ $\forall x \in \Delta$.

Αντίστροφα, αν $F(x) = G(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ τότε $F'(x) = (G(x) + c)' = G'(x) + \underbrace{(c)'}_{0} = G'(x) = f(x)$

Γράφουμε λοιπόν

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$$

και το $\int f(x)\,dx$ ονομάζεται ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Βασικά ολοκληρώματα

1). $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$

2) Η παραπάνω σχέση ισχύει και για $n = 0$.
$\int 1 dx = \int x^0 dx = x + c$

Σημείωση! Συνήθως γράφουμε $\int dx$, αντί $\int 1 dx$.

3). Αν $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ πάλι ισχύει.
$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$

$\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{n-1} x^{-(n-1)} =$

$= -\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$.

Γράφουμε $\int \frac{dx}{x^n}$, αντί $\int \frac{1}{x^n} dx$.

4) Γενικά, αν $x \in (0, +\infty)$ και $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ έχουμε
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$.

5) Αν $a = -1$, δηλαδή $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.

6). $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$.

7) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$.

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$,

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$.

10) $\int e^x dx = e^x + c$.

11) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, όπου $a > 0$.
Πράγματι, $(a^x)' = \left(e^{\ln(a^x)}\right)' = e^{\ln(a^x)} \left(\ln(a^x)\right)' =$

$= a^x (x\ln a)' = a^x \ln a$.

Άρα $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$

Κανόνες ολοκλήρωσης:

1) Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τότε
$\int (\kappa f(x) + \lambda g(x))\,dx = \kappa \int f(x)\,dx + \lambda \int g(x)\,dx$.
Ειδικά για $\kappa = \lambda = 1$ παίρνουμε $\int (f(x) + g(x))\,dx =$
$= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ και αν $\kappa = 1$ και $\lambda = -1$
παίρνουμε $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$.

2) Για $\lambda = 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$$\int \kappa f(x)\,dx = \kappa \int f(x)\,dx.$$

Παραδείγματα: 1) $\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) dx =$
$= \int x\,dx + \int dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + c$.

2) $\int \left(e^x - \frac{3}{x} + \cos 2x\right) dx = \int e^x\,dx - 3\int \frac{dx}{x} + \int \cos 2x\,dx =$
$= e^x - 3\ln|x| + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,(2x)'\,dx =$
$= e^x - 3\ln|x| + \frac{1}{2}\int (\sin 2x)'\,dx = e^x - 3\ln|x| + \frac{1}{2}\sin 2x + c$

3) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$
$= \tan x - (-\cot x) + c = \tan x + \cot x + c$

4) $\int \frac{x+3}{x+2}\,dx = \int \frac{x+2+1}{x+2}\,dx = \int dx + \int \frac{dx}{x+2} =$
$= x + \ln|x+2| + c$ γιατί $(\ln|x+2|)' = \frac{1}{x+2}(x+2)' =$
$= \frac{1}{x+2}$.

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Α) Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Ισχύει: $\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$

Παραδείγματα: 1) $\int x^2e^x dx = \int x^2(e^x)'dx =$

$= x^2e^x - \int (x^2)'e^x dx = x^2e^x - 2\int x e^x dx =$

$= x^2e^x - 2\int x(e^x)'dx = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int (x)'e^x dx\right) =$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$

2) $\int x\sin 2x dx = -\frac{1}{2}\int x(\sin 2x)(2x)'dx =$

$= -\frac{1}{2}\int x(\cos 2x)'dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int (x)'\cos 2x dx =$

$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2x (2x)'dx =$

$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int (\sin 2x)'dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

3) $\int \ln x dx = \int 1\cdot \ln x dx = \int (x)'\ln x dx =$

$= x\ln x - \int x(\ln x)'dx = x\ln x - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx =$

$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$

4) $\int x\ln x dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x^2(\ln x)'dx =$

$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x dx =$

$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} \cancel{+c} = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$

5) $\int \cos^2 x dx$. Θέτουμε $I = \int \cos^2 x dx$. Τότε έχουμε:

$I = \int \cos^2 x dx = \int \cos x\cos x dx = \int \cos x(\sin x)'dx =$

$= \cos x\sin x - \int (\cos x)'\sin x dx = \cos x\sin x + \int \sin x\sin x dx =$

$= \cos x\sin x + \int \sin^2 x dx = \cos x\sin x + \int (1-\cos^2 x)dx =$

$= \cos x\sin x + \int dx - \int \cos^2 x dx = \cos x\sin x + x - I.$

Άρα $I = \cos x\sin x + x - I \Leftrightarrow 2I = x + \cos x\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int \cos^2 x dx = I = \frac{x + \cos x\sin x}{2} + c$

6) Ομοίως βγαίνει το $\int \sin^2 x dx$.
Αλλιώς, αφού ξέρουμε ότι $\int \cos^2 x dx = \frac{x + \cos x \sin x}{2}$
έχουμε: $\int \sin^2 x dx = \int (1-\cos^2 x) dx = \int dx - \int \cos^2 dx =$
$= x - \frac{x + \cos x \sin x}{2} = \frac{\cancel{2}x - \cancel{x} - \cos x \sin x}{2} = \frac{x - \cos x \sin x}{2}$.

7) $\int \cos x \cdot e^x dx$: α) $\int e^x \cos x dx = \int e^x (\sin x)' dx =$
$= e^x \sin x - \int (e^x)' \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx =$
$= e^x \sin x + \int e^x (-\sin x) dx = e^x \sin x + \int e^x (\cos x)' dx =$
$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int (e^x)' \cos x \, dx =$
$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x d x$.
Άρα $2 \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2}$.

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$, γιατί $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

και $\int \left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arccos x + c$, γιατί $(\arccos x + c)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Δείξτε ότι $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in [-1, 1]$
Έχουμε $(\arcsin x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.
Άρα $\arcsin x + \arccos x = c$ σταθερά στο $\mathbb{R}$.
$c = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ και $\int \left(-\frac{dx}{1+x^2}\right) = \operatorname{arccot} x + c$.

B) Ολοκλήρωση με αντικατάσταση:
Ισχύει ο τύπος: $\boxed{\int f(g(x)) g'(x) dx \underset{u=g(x)}{=\!=} \int f(u) du}$,
όπου $u = g(x)$.

Παραδείγματα: 1) $\int 2x^2 \sin 2x dx = \int x^2 \sin 2x \cdot 2 \, dx =$

$= \int x^2 \sin 2x\,(2x)'dx = -\int x^2(-\sin 2x)(2x)'dx =$

$= -\int x^2 (\cos 2x)'dx = -x^2\cos 2x + \int (x^2)'\cos 2x\,dx =$

$= -x^2\cos 2x + \int 2x\cos 2x\,dx = -x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\,(2x)'dx =$

$= -x^2\cos 2x + \int x(\sin 2x)'dx = -x^2\cos 2x + x\sin 2x -$

$- \int (x)'\sin 2x\,dx = -x^2\cos 2x + x\sin 2x - \int \sin 2x\,dx =$

$= -x^2\cos 2x + x\sin 2x + \frac{1}{2}\int (\cos 2x)'dx =$

$= -x^2\cos 2x + x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

2) $\int x\sqrt{x+1}$. Θέτουμε $u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$. Άρα $\frac{du}{dx} = u' = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow du = dx$. Άρα $\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)\sqrt{u}\,du =$

$= \int u\sqrt{u}\,du - \int \sqrt{u}\,du = \int u^{3/2}du - \int u^{1/2}du = \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} =$

$= \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{2}{5}\sqrt{u^5} - \frac{2}{3}\sqrt{u^3} = \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}$

3). $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2+x^3}} = \frac{1}{3}\int \frac{(x^3+2)'}{\sqrt{2+x^3}}dx \underset{u=x^3+2}{=} \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{2\sqrt{u}} =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{u} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+2}$

Πολλές φορές γράφουμε $g'(x)dx = dg(x)$, που δέχεται διαφορικό της της $g(x)$. Δηλαδή θεωρούμε ολόκληρη την $g(x)$ ως μεταβλητή.

4) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^4}dx = \int \frac{1}{2}\,\frac{2x+6}{(x^2+6x)^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+6x)'dx}{(x^2+6x)^4} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+6x)}{(x^2+6x)^4} =$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{3(x^2+6x)^3} = -\frac{1}{6(x^2+6x)^3}$$

5). $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = -\int \sin\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\int \sin\frac{1}{x}\, d\left(\frac{1}{x}\right) =$

$= \cos\frac{1}{x} + C.$

6). $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\,\frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}(\ln x)'\,dx =$

$= \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\,d(\ln x) = 2\int \frac{d(\ln x)}{2\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x}.$

7). $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx = \int e^{\sin x}(\sin x)'\,dx = \int e^{\sin x}\,d(\sin x) =$

$= e^{\sin x} + C.$

8) $\int \frac{e^x\,dx}{(e^x+1)\ln(e^x+1)} \underset{(e^x+1)'=e^x}{=} \int \frac{d(e^x+1)}{(e^x+1)\ln(e^x+1)} \underset{u=e^x+1}{=\!=} \int \frac{du}{u\ln u} =$

$= \int \frac{1}{\ln u}(\ln u)'\,du \underset{w=\ln u}{=\!=} \int \frac{dw}{w} = \ln|w| + C =$

$= \ln|\ln u| + C = \ln|\ln(e^x+1)| + C.$

9) $\int \tan x\cdot\ln(\cos x)\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ln(\cos x)\,dx =$

$= \int \ln(\cos x)\,\frac{1}{\cos x}(-\cos x)'\,dx =$

$= -\int \ln(\cos x)\,\frac{1}{\cos x}\,d(\cos x) \underset{u=\cos x}{=\!=} -\int \ln u\cdot\frac{du}{u} =$

$= -\int \ln u\,(\ln u)'\,du = -\int \ln u\,d(\ln u) = -\frac{(\ln u)^2}{2} + C =$

$= -\frac{(\ln(\cos x))^2}{2} + C.$

10) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} \underset{\sin 2x = 2\sin x\cos x}{=\!=} 2\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{1+\cos^2 x} =$

$= 2\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}(-\cos x)'\,dx = -2\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\,d(\cos x) \underset{u=\cos x}{=\!=}$

$$= -2\int \frac{u}{1+u^2}\,du = -\int \frac{2u}{1+u^2}\,du = -\int \frac{(1+u^2)'}{1+u^2}\,du =$$

$$= -\int \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = -\ln(1+u^2)+c = -\ln(1+\cos^2 x)+c.$$

11) $\int x^2 \ln(x^2)\,dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln(x^2)\,dx =$

$$= \frac{x^3\ln(x^2)}{3} - \frac{1}{3}\int x^3 (\ln(x^2))'\,dx =$$

$$= \frac{x^3\ln(x^2)}{3} - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{x^2}\cdot 2x\,dx =$$

$$= \frac{x^3\ln(x^2)}{3} - \frac{2}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3\ln(x^2)}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{x^3}{3} + c =$$

$$= \frac{x^3\ln(x^2)}{3} - \frac{2x^3}{9} + c.$$

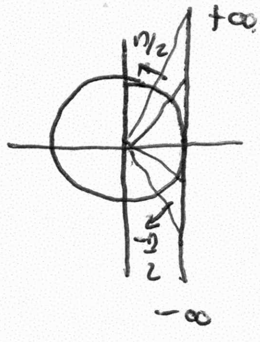
12) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'dx}{\cos x} =$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c \quad \text{και}$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'dx}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$

$$= \ln|\sin x| + c.$$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Επειδή η εφαπτομένη $\tan x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές, θέτουμε $x = \tan u$, $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Άρα $dx = d(\tan u) =$

$$= (\tan u)'\,du = \frac{du}{\cos^2 u}$$

Επίσης $x^2+1 = \tan^2 u + 1 = \frac{1}{\cos^2 u}$ και $\cos u > 0$, για κάθε $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\cos u}$.

Επομένως $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 u}}{\frac{1}{\cos u}}\, du = \int \frac{\cos u}{\cos^2 u}\, du =$

$$= \int \frac{(\sin u)'\, du}{1-\sin^2 u} \underset{w=\sin u}{=\!=\!=\!=} \int \frac{dw}{1-w^2}$$

Εδώ εφαρμόζουμε την τεχνική διάσπασης σε απλά κλάσματα:

Γράφουμε $\displaystyle\frac{1}{1-w^2} = \frac{A}{1-w} + \frac{B}{1+w}$, αφού $1-w^2=(1-w)(1+w)$

Πολλαπλασιάζουμε με $1-w^2=(1-w)(1+w)$ και τα δύο μέλη και παίρνουμε:

$$1 = A(1+w) + B(1-w) = (A-B)w + A + B.$$

Εξισώνουμε τις ίδιες δυνάμεις του w δεξιά και αριστερά και παίρνουμε $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \iff A=B=\frac{1}{2}.$

Άρα $\displaystyle\frac{1}{1-w^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-w} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+w}.$

Επομένως $\displaystyle\int \frac{dw}{1-w^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{1-w} + \frac{1}{2}\int \frac{dw}{1+w} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-w)}{1-w} +$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{d(1+w)}{1+w} = -\frac{1}{2}\ln|1-w| + \frac{1}{2}\ln|1+w| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+w}{1-w}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(1+w)^2}{1-w^2}\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin u)^2}{1-\sin^2 u} = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin u)^2}{\cos^2 u} =$$

$$= \ln\left(\frac{1+\sin u}{\cos u}\right) = \ln\left(\frac{1}{\cos u} + \tan u\right).$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} = 1+\tan^2 u \underset{\cos u>0}{\Longrightarrow} \frac{1}{\cos u} = \sqrt{1+\tan^2 u}.$$

~~Άρα~~ $\cancel{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u}} + \tan u\right) \underset{x=\tan u}{=} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + x\right)}$

~~Άρα~~ $\cancel{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + x\right)}$

Άρα $\ln\left(\frac{1}{\cos u} + \tan u\right) = \ln\left(\sqrt{1+\tan^2 u} + \tan u\right) =$

$$\underset{x=\tan u}{=} \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$$

Άρα $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) + c$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα εφαρμόσαμε την τεχνική "διάσπασης σε απλά κλάσματα".

Αυτή εφαρμόζεται όταν έχουμε ολοκληρώματα της μορφής $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, όπου $P(x)$ και $Q(x)$ πολυώνυμα. Θα πρέπει όμως ο βαθμός του αριθμητή $P(x)$ να είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή.

Ας δούμε δύο παραδείγματα.

14). $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$. Εδώ $\deg(2x+1) = 1 < 2 = \deg(x^2-5x+6)$.

Επίσης $x^2-5x+6 = x^2-2x-3x+6 = x(x-2)-3(x-2) =$
$= (x-2)(x-3)$.

Άρα $\displaystyle\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}$

Θέτουμε $\displaystyle\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$, όπου A και B προσδιοριστέες σταθερές.

Έχουμε: $2x+1 = A(x-3) + B(x-2) = (A+B)x - 3A - 2B$.

Άρα $\begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2-B \\ -3(2-B)-2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 - B \\ B - 6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -5 \\ B = 7 \end{cases}$$

Άρα $\dfrac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{-5}{x-2} + \dfrac{7}{x-3} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}\,dx = -5\int \frac{dx}{x-2} + 7\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= -5\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + c.$$

15) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{x^3-2x}{(x+1)(x+2)}\,dx.$

Εδώ $\deg(x^3-2x) = 3 > 2 = \deg(x^2+3x+2)$

Διαιρούμε το x^3-2x με το x^2+3x+2

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} - 2x & x^2+3x+2 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^3} - 3x^2 - 2x & x-3 \\ \hline -\cancel{3x^2} - 4x & \\ +\cancel{3x^2} + 9x + 6 & \\ \hline 5x+6 & \end{array}$$

Άρα $\dfrac{x^3-2x}{x^2+3x+2} = x - 3 + \dfrac{5x+6}{x^2+3x+2} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}\,dx = \int (x-3)\,dx + \int \frac{5x+6}{(x+1)(x+2)}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{5x+6}{(x+1)(x+2)}\,dx.$$

Θέτουμε: $\dfrac{5x+6}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow 5x+6 = A(x+2) + B(x+1) = (A+B)x + 2A + B.$$

Έχουμε το σύστημα: $\begin{cases} A+B = 5 \\ 2A+B = 6. \end{cases}$ με ορίζουσα

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2=-1$ και $D_A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 5-6=-1$,

$D_B = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6-10=-4.$

Άρα $A = \frac{-1}{-1} = 1$ και $B = \frac{-4}{-1} = 4.$

Άρα $\frac{5x+6}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{5x+6}{(x+1)(x+2)}dx = \int \frac{dx}{x+1} + 4\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \ln|x+1| + 4\ln|x+2|.$$

Επομένως $\int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x+1| + 4\ln|x+2|.$

16) $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)(-\cos x)'dx =$

$= -\int (1-\cos^2 x)\,d(\cos x) = \int (\cos^2 x - 1)\,d(\cos x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x.$

Ομοίως $\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\,d(\sin x) =$

$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}.$

17) $\int \sin x \cos 2x\,dx$. Θυμόμαστε από τη Β΄ Λυκείου ότι $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$
Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$

Άρα $\int \sin x \cos 2x\,dx = \int \sin x(2\cos^2 x - 1)\,dx =$

$= -\int (2\cos^2 x - 1)\,d(\cos x) \overset{u=\cos x}{=\!=\!=} -\int (2u^2-1)\,du =$

$= -\frac{2u^3}{3} + u = -\frac{2\cos^3 x}{3} + \cos x.$

18). $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx =$

$\displaystyle = 2\int \frac{(-\cos x)'\cos x}{1+\cos^2 x}dx = -2\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}d(\cos x) \underset{t=\cos x}{=}$

$\displaystyle = -2\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = -\int \frac{(t^2+1)'}{1+t^2}dt = -\ln(t^2+1) =$

$\displaystyle = -\ln(\cos^2 x+1) = \ln\left(\frac{1}{\cos^2 x+1}\right)$

19) $\displaystyle\int \tan x \ln(\cos x)\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ln(\cos x)\,dx =$

$\displaystyle = -\int \frac{1}{\cos x}\ln(\cos x).(\cos x)'\,dx =$

$\displaystyle = -\int \frac{1}{\cos x}\ln(\cos x)\,d(\cos x) \underset{u=\cos x}{=}$

$\displaystyle = -\int \frac{1}{u}\ln u\,du = -\int (\ln u)'\ln u\,du \underset{w=\ln u}{=}$

$\displaystyle = -\int w\,dw = -\frac{w^2}{2} = -\frac{(\ln u)^2}{2} = -\frac{(\ln(\cos x))^2}{2}.$

20) Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ του παραδείγματος 13 λυνόταν και ως εξής:

Θέτουμε $x = \dfrac{t^2-1}{2t}$, $t \in (0,+\infty)$. (περίεργος μετασχηματισμός)

Αν $f(t) = \dfrac{t^2-1}{2t}$, τότε $f'(t) = \dfrac{2t\cdot 2t - 2(t^2-1)}{4t^2} =$

$\displaystyle = \frac{4t^2-2t^2+2}{4t^2} = \frac{2t^2+2}{4t^2} = \frac{t^2+1}{2t^2} > 0 \quad \forall t \in (0,+\infty)$

Άρα $f \uparrow (0,+\infty)$

Επίσης $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^2-1}{2t} = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t}{2}\right) -$

$\displaystyle - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\right) = 0 - \frac{1}{2}(+\infty) = -\infty.$

και $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2-1}{2t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{2t} =$

$= \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{2}\right)\cdot \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty.$

Άρα η $f(t)$ παίρνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή μία μόνον φορά.

Έχουμε $dx = d\left(\frac{t^2-1}{2t}\right) = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$ και

$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2+1} = \sqrt{\frac{t^4-2t^2+1}{4t^2}+1} =$

$= \sqrt{\frac{t^4-2t^2+1+4t^2}{4t^2}} = \sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{4t^2}} = \sqrt{\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2} \underset{t>0}{=}$

$= \frac{t^2+1}{2t}.$

Άρα $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\frac{\cancel{t^2+1}}{\cancel{2}t^2}}{\frac{\cancel{t^2+1}}{\cancel{2}t}}dt = \int \frac{t}{t^2}dt = \int \frac{dt}{t} =$

$= \ln|t| \underset{t>0}{=} \ln t.$

Τώρα $x = \frac{t^2-1}{2t} \Leftrightarrow t^2-1 = 2tx \Leftrightarrow t^2-2tx-1=0.$

Άρα $t = \frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2} = \frac{2x\pm2\sqrt{x^2+1}}{2} = x\pm\sqrt{x^2+1}.$

Αλλά $t>0$, και $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x \Rightarrow$

$\Rightarrow x-\sqrt{x^2+1} < 0$ και

$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1} > 0.$

Άρα $t = x+\sqrt{x^2+1}$ και τελικώς

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln t = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, όπως το είχαμε ξαναβρεί.

21) $\int \arcsin x\, dx = \int (x)' \arcsin x\, dx = x \cdot \arcsin x -$
$- \int x (\arcsin x)' dx = x \arcsin x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{(1-x^2)' dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Για το $\frac{1}{2} \int \frac{(1-x^2)' dx}{\sqrt{1-x^2}}$ θέτουμε $u = 1-x^2$

Άρα αυτό μετασχηματίζεται στο $\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} =$

$= \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} = \sqrt{1-x^2}$.

Άρα $\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

Ομοίως για το $\int \arccos x\, dx$.

22) $\int \arctan x\, dx = \int (x)' \arctan x\, dx =$
$= x \arctan x - \int x (\arctan x)' dx =$
$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$
$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx =$
$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

Ορισμένο ολοκλήρωμα και εφαρμογές:

1). Αν για συνάρτηση F ορίζεται σε δύο σημεία $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ γράφουμε: $[F(x)]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$.

2) Αν $F, G: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι δύο αρχικές συναρτήσεις μιας συνεχούς συνάρτησης $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ τότε

$$[F(x)]_\alpha^\beta = [G(x)]_\alpha^\beta.$$

Πράγματι, δύο αρχικές συναρτήσεις της ίδιας συνάρτησης f διαφέρουν κατά μια σταθερά c.
Άρα $F(x) = G(x) + c$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
Επομένως $[F(x)]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha) = (G(\beta) + c) - (G(\alpha) + c) = G(\beta) - G(\alpha) = [G(x)]_\alpha^\beta$.

Άρα η τιμή $[F(x)]_\alpha^\beta$ είναι ανεξάρτητη της αρχικής συνάρτησης F που χρησιμοποιούμε.
Η τιμή αυτή συμβολίζεται με

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}$$

και ονομάζεται <u>ορισμένο ολοκλήρωμα</u> της f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Επίσης θέτουμε: α) $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$ και
β) $\int_\beta^\alpha f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, αν $\alpha < \beta$.

<u>Ισχύουν τα εξής:</u>

1). $\int_\alpha^\beta (\kappa f(x) + \lambda g(x))\,dx = \kappa \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \lambda \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$
για κάθε α, β (μπορεί $\alpha > \beta$).

2) Αν $\alpha < \beta$ και η $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$.

Επίσης αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Αντίστοιχα, αν $\alpha < \beta$ και $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f(x) \leq 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq 0$.
Αν $f(x) \leq 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

<u>Πόρισμα:</u> Αν $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\int_\alpha^\beta (f(x))^2 dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

<u>Η "ιδέα" του ορισμένου ολοκληρώματος</u>

<u>Εμβαδόν παραβολικού χωρίου:</u>

Θα χρειαστούμε τον τύπο $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, που βγαίνει με επαγωγή.

(Χωρίς επαγωγή, υπολογίζουμε πρώτα το $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Έχουμε

$$\begin{cases} S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ S_1 = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη:

$$2S_1 = \underbrace{(n+1) + (n-1+2) + (n-2+3) + \dots + (1+n)}_{n \text{ το πλήθος}} =$$

$$= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ το πλήθος}} =$$

$= n(n+1)$. Άρα $1 + 2 + 3 + \dots + n = S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Για το $S_2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα.

$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1.$$

Στο x θέτουμε τις τιμές $1, 2, 3, \dots, n$ και παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\begin{cases} \cancel{2^3} = 1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1 \\ \cancel{3^3} = \cancel{2^3}+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1 \\ \cancel{4^3} = \cancel{3^3}+3\cdot 3^2+3\cdot 3+1 \\ \vdots \\ \cancel{n^3} = \cancel{(n-1)^3}+3\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1 \\ (n+1)^3 = \cancel{n^3}+3n^2+3n+1 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και διαγράφουμε τους ίδιους όρους αριστερά και δεξιά.

Παίρνουμε: $(n+1)^3 = 1+3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)+$

$$+3\cdot(1+2+3+\dots+n)+\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n \text{ φορές}} =$$

$$=3S_2+3S_1+n+1 = 3S_2+3\frac{n(n+1)}{2}+n+1$$

Άρα $2(n+1)^3 = 6S_2+3n(n+1)+2(n+1) \iff$

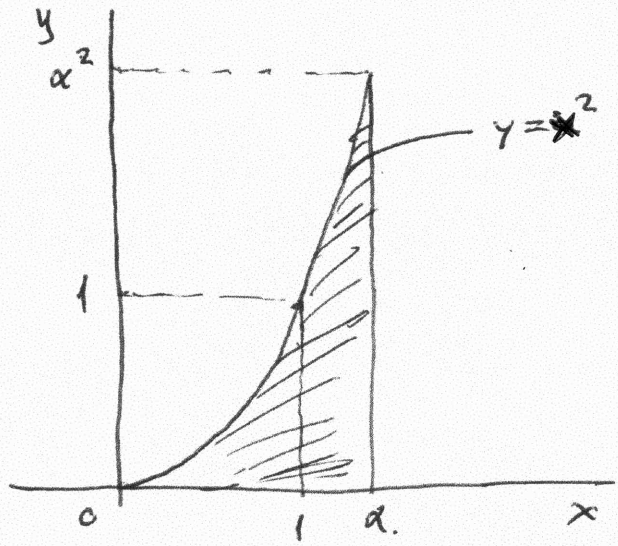
$$\iff 6S_2 = 2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1) =$$

$$=(n+1)\left(2(n+1)^2-3n-2\right) =$$

$$=(n+1)(2n^2+4n+\cancel{2}-3n-\cancel{2}) =$$

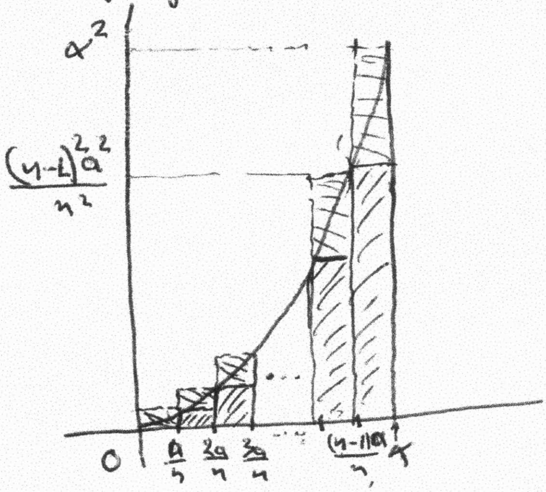
$$=(n+1)(2n^2+n) = n(n+1)(2n+1).$$

Άρα $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.



Ερώτηση: (Αρχιμήδης) Με τί ισούται το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την παραβολή $y=x^2$, πάνω από τον άξονα $x'x$ και ανάμεσα στο $x=0$ και το $x=a$;

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,a]$ σε n μικρά υποδιαστήματα (n μεγάλο)



Αν το n είναι μεγάλο, το άθροισμα των ορθογωνίων πάνω και το άθροισμα των ορθογωνίων κάτω πλησιάζει το ζητούμενο εμβαδόν.

Άθροισμα κάτω ορθογωνίων: $L_n = \overset{\text{πλάτος}}{\frac{a}{n}} \cdot \underset{f(\frac{a}{n})}{\frac{a^2}{n^2}} + \frac{a}{n}\cdot\frac{(2a)^2}{n^2} +$

$$+\dots+\frac{a}{n}\,\frac{((n-1)a)^2}{n^2} = \frac{a^3}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2\right) =$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\,\frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3} =$$

$$= \frac{a^3}{6}\,\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \frac{a^3}{6} \overset{\text{επί}}{\cdot} \frac{2n^2-3n+1}{n^2}$$

Άθροισμα ορθογωνίων πάνω: $U_n = \frac{a}{n}\cdot\frac{a^2}{n^2} + \frac{a}{n}\cdot\frac{(2a)^2}{n^2} +$

$$+ \frac{a}{n}\,\frac{((n-1)a)^2}{n^2} + \frac{a}{n}\cdot\frac{n^2a^2}{n^2} =$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\right) = \frac{a^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{a^3}{6}\,\frac{2n^2+2n+1}{n^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a^3}{6}\,\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right) =$

$$= \frac{2a^3}{6} = \frac{a^3}{3} \text{ και } \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^3}{6}\,\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right) =$$

$= \frac{2a^3}{6} = \frac{a^3}{3}$. Επίσης $L_n < E < U_n$, όπου E το ζητούμενο εμβαδόν.

Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{a^3}{3}$, έπεται ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \frac{a^3}{3} = \int_0^a x^2\,dx$.

(Τυχαίο;).

1) Ισχύει το εξής: Αν $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

όπου $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε η F είναι αρχική συνάρτηση της f (αόριστο ολοκλήρωμα)

~~Απόδειξη: Δείξαμε ότι αν F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της f, τότε $[F(t)]_a^b = [G(t)]_a^b$. Το ίδιο ισχύει αν αντικαταστήσουμε το b με τυχαίο σημείο $x\in[a,b]$. Τότε $[F(t)]_a^x = [G(t)]_a^x \iff F(x)-F(a) =$~~

Απόδειξη: Αν $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια αρχική συνάρτηση της $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, θέσαμε $\int_a^b f(t)dt = G(b)-G(a)$. (3.1

Αν αντί του b πάρουμε οποιοδήποτε άλλο στοιχείο $x\in[a,b]$ τότε $\int_a^x f(t)dt = G(x)-G(a)$.

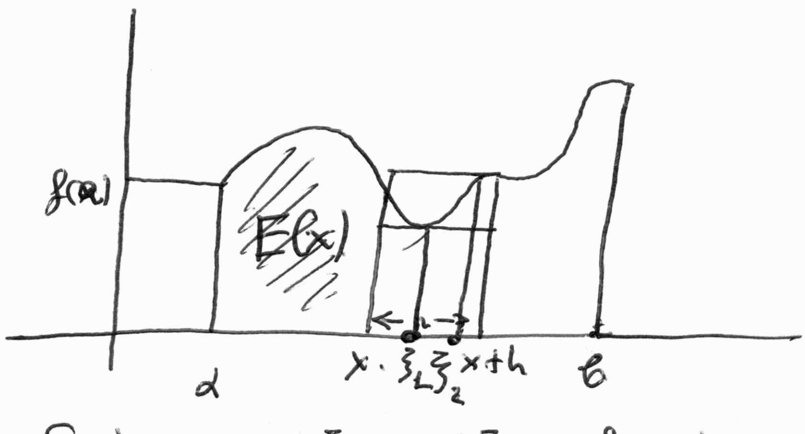
Έχουμε $G'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in[a,b]$.

Άρα $(G(x)-G(a))'=G'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in[a,b]$.

Άρα $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$, για κάθε $x\in[a,b]$.

2). Αν $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[a,b]$ και $E(x)=$ εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης $y=f(x)$, του άξονα των x και των κατακόρυφων ευθειών στα σημεία a και x, τότε $E'(x)=f(x)$

Περιγραφική απόδειξη:



Στο διάστημα $[x, x+h]$ η f παίρνει ελάχιστη τιμή σ' ένα σημείο ξ_1 και μέγιστη σ' ένα σημείο ξ_2

Η Διαφορά $E(x+h)-E(x)$ ισούται με το εμβαδόν που περικλείεται από τον άξονα των x, τη γραφική παράσταση της f και τις κατακόρυφες στα σημεία x και $x+h$.

Άρα $E(x+h)-E(x)\geq h\cdot f(\xi_1) \Leftrightarrow \dfrac{E(x+h)-E(x)}{h}\geq f(\xi_1)$ και $E(x+h)-E(x)\leq h\cdot f(\xi_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{E(x+h)-E(x)}{h}\leq f(\xi_2)$$

Άρα $f(\xi_1) \le \dfrac{E(x+h)-E(x)}{h} \le f(\xi_2)$.

Καθώς $h \to 0^+$, $\xi_1, \xi_2 \to x$ και άρα $f(\xi_1) \to f(x)$ και $f(\xi_2) \to f(x)$

~~Άρα~~

Άρα και το $\dfrac{E(x+h)-E(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} f(x)$.

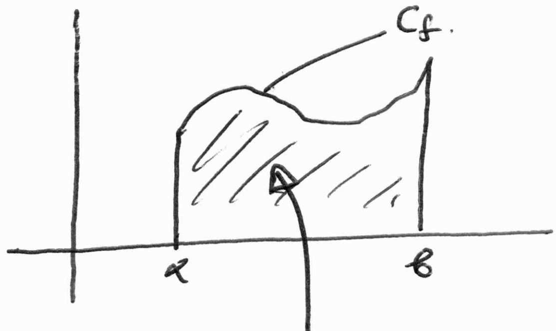
Τα ίδια συμβαίνουν όταν $h<0$, δηλαδή $h \to 0^-$.

Άρα $E'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{E(x+h)-E(x)}{h} = f(x)$

---

1). Γενικά, αν $f(x) \ge 0 \ \forall x \in [\alpha, \beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στη γραφ. παράσταση C_f της f, τον άξονα των x και τις κατακόρυφες $x=\alpha$ και $x=\beta$ ισούται με

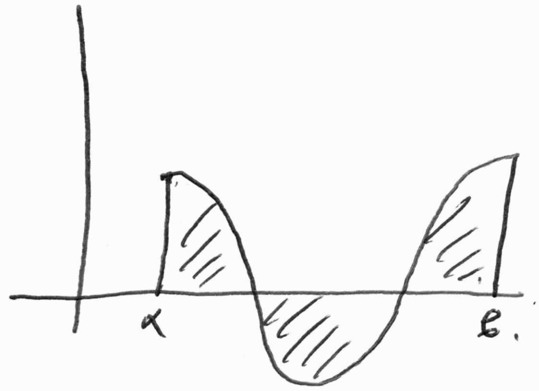
$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}$$



$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

2). Αν η f παίρνει και αρνητικές τιμές στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν αυτό ισούται με:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx.}$$



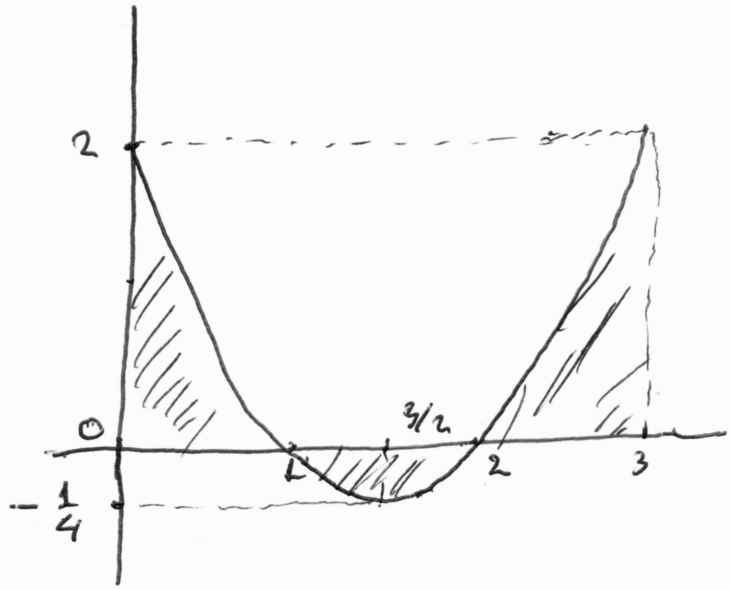
$$E = \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx.$$

3). Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις κατακόρυφες $x=\alpha$ και $x=\beta$ ισούται με

$$\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,dx.$$

Εφαρμογές: 1). Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στον άξονα των x, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x+2$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=3$.

Λύση:



Η f μηδενίζεται στα σημεία $x=1$ και $x=2$.
Στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε $f(x)\geq 0$, στο $[1,2]$ έχουμε $f(x)\leq 0$ και στο διάστημα $[2,3]$ έχουμε $f(x)\geq 0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^3 |x^2-3x+2|\,dx = \int_0^1 (x^2-3x+2)dx - \int_1^2 (x^2-3x+2)dx +$$

$$+\int_2^3 (x^2-3x+2)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2 +$$

$$+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_2^3 = \frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-\left(\frac{8-1}{3}-\frac{3}{2}(4-1)+2\right)+$$

$$+\left(\frac{27-8}{3}-\frac{3}{2}(9-4)+2\right) = \frac{1}{3}-\frac{3}{2}+\cancel{2}-\frac{7}{3}+\frac{9}{2}-\cancel{2}+$$

$$+\frac{19}{3}-\frac{15}{2}+2 = \frac{13}{3}-\frac{9}{2}+2 = \frac{26-27+4}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(Αν είναι σωστές οι πράξεις!!!)

Γενικά ισχύει για κάθε συνεχή συνάρτηση f:

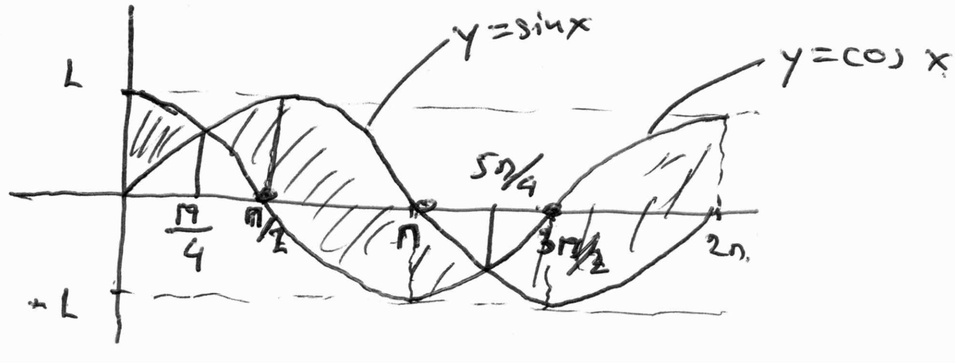
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx \quad \text{και}$$

γενικότερα

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{\gamma_1} f(x)dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x)dx + \dots + \int_{\gamma_n}^{\beta} f(x)dx},$$

όπου τα γ_i μπορεί να είναι και μικρότερα του α ή μεγαλύτερα του β.

2) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ και τις κατακόρυφες $x=0$ και $x=2\pi$



<u>Λύση</u>: Έχουμε $\cos x > \sin x \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos x < \sin x \ \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

$\cos x > \sin x \ \forall x \in \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

Στα σημεία $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$ έχουμε $\cos x = \sin x$.

Το εμβαδόν ισούται:

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\,dx =$$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4} + [\sin x + \cos x]_{5\pi/4}^{2\pi} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \sin 0 - \cos 0 - \cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} +$$

$$+ \sin 2\pi + \cos 2\pi - \sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - \cancel{1} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} +$$

$$+ 0 + \cancel{1} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$