Κανόνες υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων

1) Ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

Ισχύει το εξής:

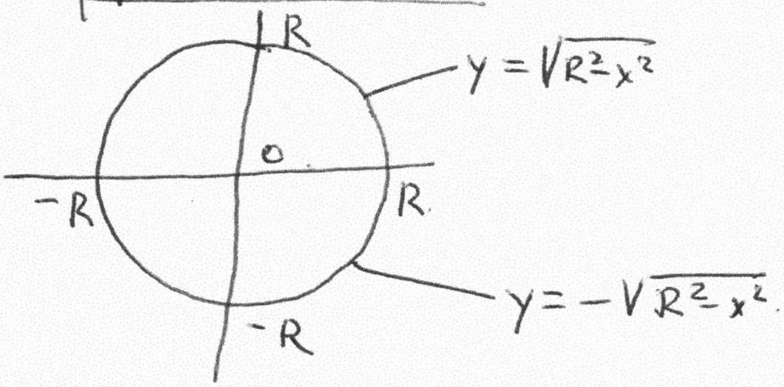
$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx}$$

2) Ολοκλήρωση με αντικατάσταση:

Ισχύει το εξής:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\,du}$$

Εφαρμογές: 1) Εμβαδόν κύκλου:



Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα R είναι: $x^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

Η καμπύλη $y=\sqrt{R^2-x^2}$ παριστάνει το πάνω ημικύκλιο και η καμπύλη $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ παριστάνει το κάτω ημικύκλιο. Τα δύο ημικύκλια έχουν ίσα εμβαδά. Άρα το εμβαδόν του κύκλου ισούται με

$$\boxed{E = 2\cdot\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx.}$$

Έχουμε: $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx = \int_{-R}^{R} R\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\,dx =$

$= R\int_{-R}^{R} \sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\,dx$. Θέτουμε $g(x) = \frac{x}{R}$, $x \in [-R, R]$.

Τότε, αν $u = g(x)$ έχουμε: $du = d\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{1}{R}\,dx \Rightarrow$ $\boxed{dx = R\,du}$

και $g(-R) = -1$ και $g(R) = 1$

Άρα $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx = R\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\cdot R\,du =$

$= R^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du$. Θέτουμε $u = \cos\vartheta$, $\vartheta \in [0, \pi]$.

Τότε $du = d(\cos\vartheta) = -\sin\vartheta\,d\vartheta$, $\cos 0 = 1$ και $\cos\pi = -1$.

Άρα $R^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du = -R^2\int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2\vartheta}\,\sin\vartheta\,d\vartheta =$

$= R^2\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2\vartheta}\,\sin\vartheta\,d\vartheta$. Αλλά $\sqrt{1-\cos^2\vartheta} =$

$= |\sin\vartheta| = \sin\vartheta$, γιατί $\sin\vartheta \geq 0$, $\forall\, \vartheta \in [0, \pi]$.

Άρα καταλήγουμε: $R^2\int_{0}^{\pi} \sin^2\vartheta\,d\vartheta = R^2\left[\frac{\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_0^{\pi} =$

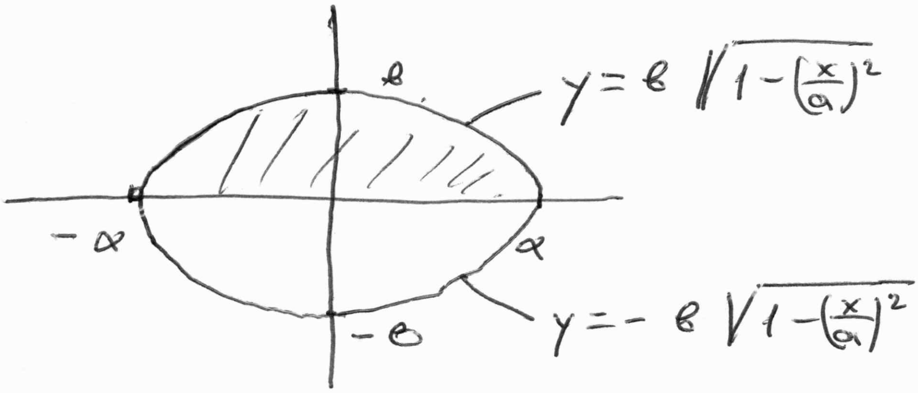
$= R^2\,\frac{\pi - \underbrace{\sin\pi}_{=0}\cos\pi - 0 + \underbrace{\sin 0}_{=0}\cos 0}{2} = \frac{\pi R^2}{2}$.

Άρα το εμβαδόν του κύκλου είναι: $E = \cancel{2}\cdot\frac{\pi R^2}{\cancel{2}} = \pi R^2$.

Εμβαδόν έλλειψης: Εξίσωση: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\pm b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$



Όπως στον κύκλο, έτσι και εδώ έχουμε:

$$E=2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx =$$

$$=2ab\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{x}{a}\right)'dx.$$

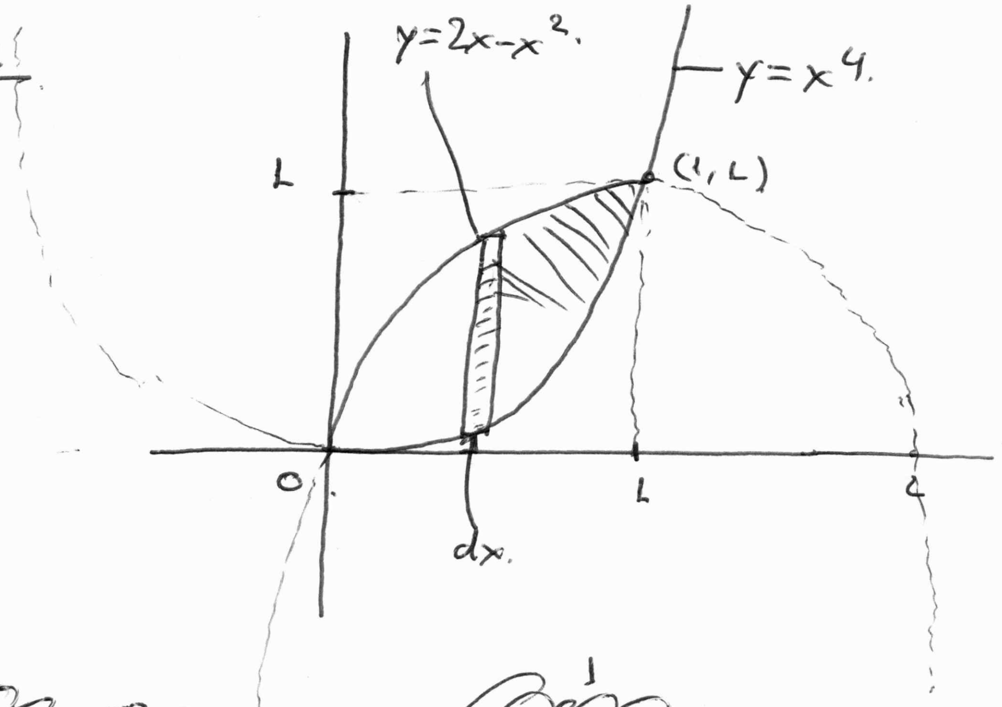
(Εδώ $g(x)=\frac{x}{a}$, $x\in[-a,a]$). Θέτουμε $u=\frac{x}{a}$.

Άρα $E=2ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du$. Το $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du$ το έχουμε υπολογίσει στο προηγούμενο παράδειγμα και το έχουμε βρει ίσο με $\frac{\pi}{2}$.

Άρα (εμβαδόν έλλειψης) $\boxed{E=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab.}$

Άλλα παραδείγματα: 1) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των καμπυλών $y=x^4$ και $y=2x-x^2$.

Λύση:



$$E=\int_0^1 (\underbrace{2x-x^2}_{\text{πάνω}}-\underbrace{x^4}_{\text{κάτω}})\,dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{15-5-3}{15}=\frac{7}{15}.$$

2) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των καμπυλών $y^2=4x$ και $4x-3y=4$.

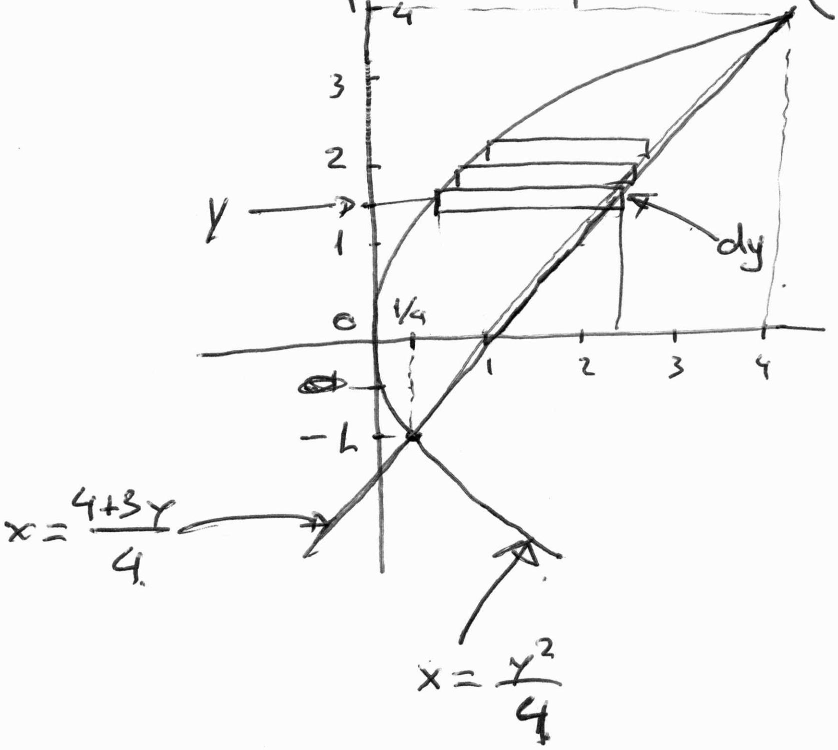
Λύση: Επειδή στην $y^2=4x$ το y είναι υψωμένο στο τετράγωνο, λύνουμε ως προς x και παίρνουμε:

$x=\frac{y^2}{4}$ και για τη δεύτερη $x=\frac{4+3y}{4}$

Σημεία τομής: λύνουμε την $\frac{y^2}{4}=\frac{4+3y}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^2-3y-4=0 \Leftrightarrow y^2-4y+y-4=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y(y-4)+y-4=0 \Leftrightarrow (y-4)(y+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{y=4 \text{ ή } y=-1}$

Για $y=-1$ παίρνουμε $x=\frac{1}{4}$ και για $y=4$ παίρνουμε

$x=4$. Σημεία τομής τα $\left(\frac{1}{4},-1\right)$ και $(4,4)$.



Είναι πιο εύκολο να θεωρήσουμε την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την x ως συνάρτηση του y. Χωρίζουμε το εμβαδόν σε μικρά ορθογώνια πλάτους dy και μήκους $\frac{4+3y}{4}-\frac{y^2}{4}$.

Το y παίρνει τιμές στο διάστημα $[-1, 4]$.
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_{-1}^{4}\left(\frac{4+3y}{4}-\frac{y^2}{4}\right)dy=\frac{1}{4}\int_{-1}^{4}(4+3y-y^2)\,dy=$$

$$=\frac{1}{4}\left[4y+\frac{3y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{4}=\frac{1}{4}\left[16+\frac{3\cdot 16}{2}-\frac{64}{3}-\right.$$

$$\left.-\left(-4+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{1}{4}\left[16+24+\frac{-64-1}{3}-\frac{3}{2}+4\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left(44-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(44-\frac{130+9}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{264-139}{6}=\frac{125}{24}.$$

3). Να βρεθεί το εμβαδόν μεταξύ των καμπυλών

α) $y=2-x^2$, $y=x$

β) $y=x+4$, $y=x^2-2$

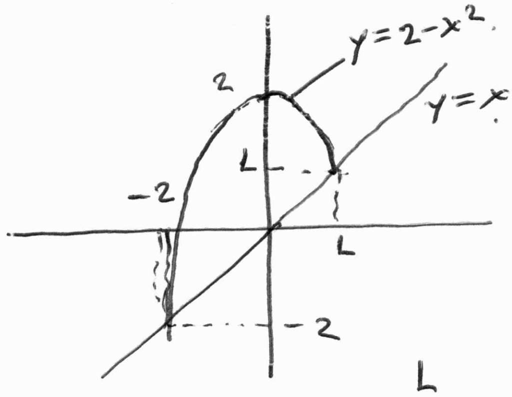
γ) $y=0$ και $y=x^3-x^2-6x$

δ) $y=-x+2$, $y=x^2$

ε) $y=x-1$, $x=3-y^2$

στ) $y=\sqrt{x}$, $y=-x+6$

Λύση: α) Σημεία τομής: $2-x^2=x \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$. Για $x=1$ έχουμε $y=1$ $(1,1)$ και για $x=-2$, $y=-2$ $(-2,2)$.



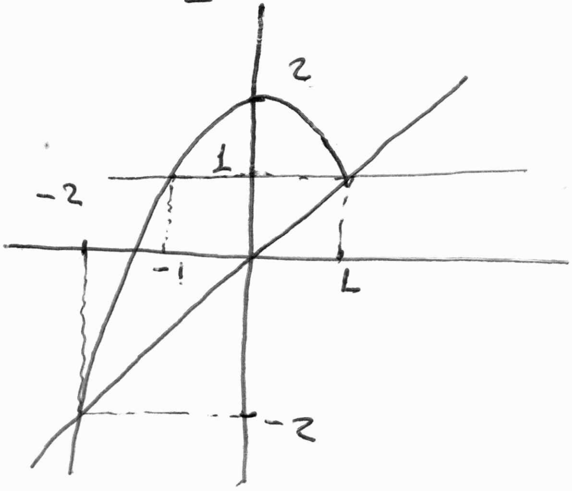
Ως προς x ολοκλήρωση: $E=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}=$

$=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\left(-4+\frac{8}{3}-2\right)=8-\frac{5}{6}-\frac{8}{3}=8-\frac{5+16}{6}=$

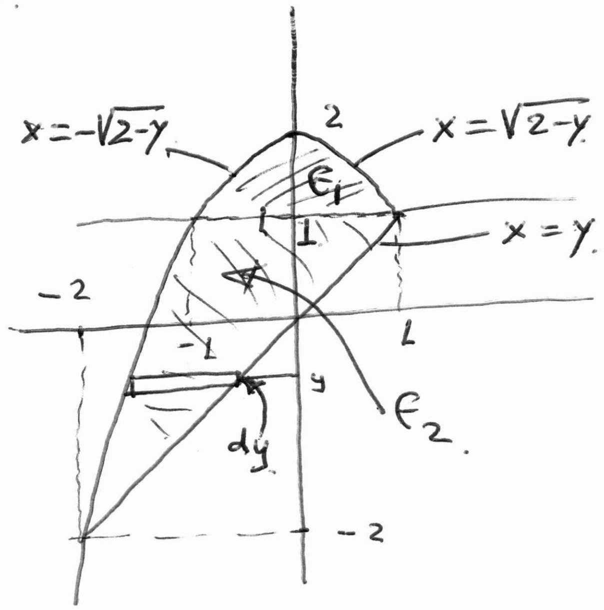
$=8-\frac{21}{6}=\frac{48-21}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$.

Ως προς y ολοκλήρωση:

Λύνουμε την $y=2-x^2$ ως προς x και παίρνουμε $\boxed{x=\pm\sqrt{2-y}}$ και την $y=x \Leftrightarrow \boxed{x=y}$.



Χωρίζουμε το εμβαδόν σε δύο μέρη με την ευθεία $y=1$.



Τεμαχίζουμε σε οριζόντια ορθογώνια πλάτους dy.

Το μήκος κάθε ορθογωνίου στο E_2 είναι

$$y-(-\sqrt{2-y}) = y+\sqrt{2-y}.$$

Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[-2,1]$.

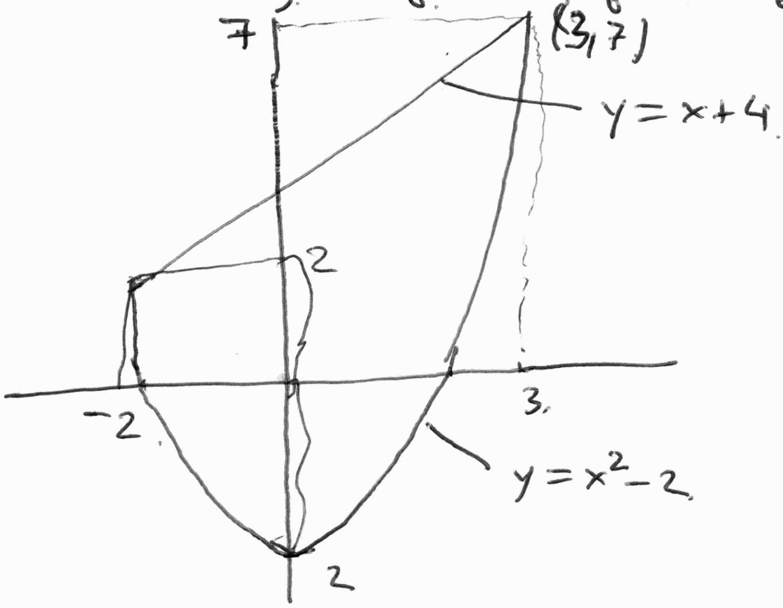
Άρα
$$E_2 = \int_{-2}^{1}\left(y+\sqrt{2-y}\right)dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2}^{1} + \int_{-2}^{1}\sqrt{2-y}\,dy =$$
$$= \frac{1}{2} - 2 + \int_{-2}^{1}\sqrt{2-y}\,dy = -\frac{3}{2} + \int_{-2}^{1}\sqrt{2-y}\,dy =$$
$$= -\frac{3}{2} - \int_{-2}^{1}\sqrt{\underbrace{2-y}_{u}}\,d(\underbrace{2-y}_{u}) = -\frac{3}{2} - \int_{4 \,\leftarrow\, y=-2}^{1 \,\leftarrow\, y=1}\sqrt{u}\,du =$$
$$= -\frac{3}{2} - \int_{4}^{1}u^{1/2}du = -\frac{3}{2} - \left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_{4}^{1} = -\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_{4}^{1} =$$
$$= -\frac{3}{2} - \frac{2}{3}(1-8) = -\frac{3}{2} + \frac{14}{3} = \frac{-9+28}{6} = \frac{19}{6}.$$

και
$$E_1 = \int_{1}^{2}\left[\sqrt{2-y}-(-\sqrt{2-y})\right]dy = 2\int_{1}^{2}\sqrt{2-y}\,dy =$$
$$= -2\int_{1}^{2}\sqrt{2-y}\,d(2-y) = -2\int_{1}^{0}\sqrt{u}\,du = 2\int_{0}^{1}\sqrt{u}\,du =$$

$$= 2\int_0^1 u^{1/2}\,du = 2\left[\frac{2u^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

Άρα $E = E_1 + E_2 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{8+19}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$.

β)



Σημεία τομής: $x+4 = x^2-2 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-2$.

Για $x=3$ παίρνουμε $y=3+4=7$. $(3,7)$

Για $x=-2$ παίρνουμε $y=-2+4=2$. $(-2,2)$

Άρα $E = \int_{-2}^{3}\left(x+4-(x^2-2)\right)dx = \int_{-2}^{3}(x-x^2+6)\,dx =$

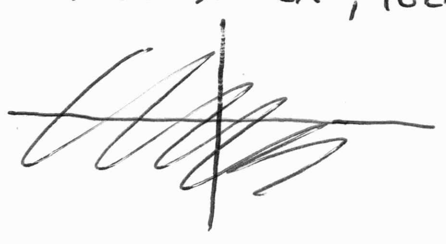
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 6x\right]_{-2}^{3} = \left(\frac{9}{2} - 9 + 18\right) - \left(2 + \frac{8}{3} - 12\right) =$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{8}{3} + 19 = \frac{27-16}{6} + 19 = \frac{11}{6} + 19 = \frac{11+114}{6} = \frac{125}{6}.$$

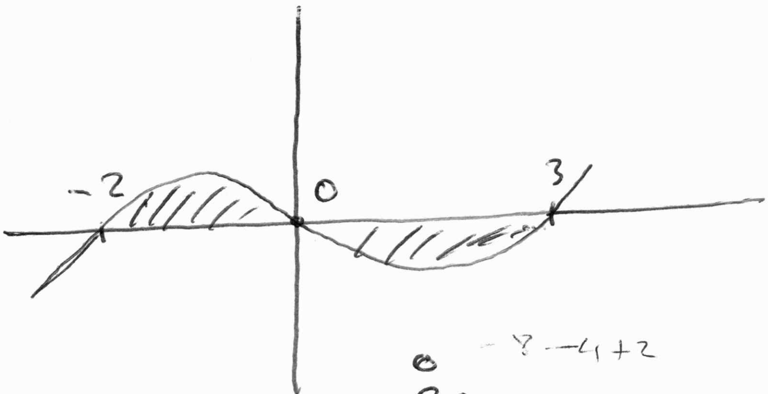
γ). $y=0$, $y=x^3-x^2-6x$.

Σημεία τομής: $x^3-x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x^2-x-6)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-2$ ή $x=3$.

Αν $f(x)=x^3-x^2-6x$, τότε $f'(x)=3x^2-2x-6$. $\Big\{$ ρίζες $\frac{1\pm\sqrt{19}}{3}$



x	$-\infty$	-2	$\frac{1-\sqrt{19}}{3}$	0	$\frac{1+\sqrt{19}}{3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
f	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\nearrow$



$-8-4+2$

$$E=\int_{-2}^{3}|x^3-x^2-6x|\,dx=\int_{-2}^{0}(x^3-x^2-6x)\,dx-\int_{0}^{3}(x^3-x^2-6x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_{-2}^{0}-$$

$$-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_{0}^{3}=$$

$$=-\left(4+\frac{8}{3}-12\right)-\left(\frac{81}{4}-9-27\right)=$$

$$=8-\frac{8}{3}+36-\frac{81}{4}=44-\frac{32+243}{12}=44-\frac{275}{12}=$$

$$=\frac{253}{12}$$

ε). $y=x-1\ ,\ x=3-y^2$

$\Updownarrow$

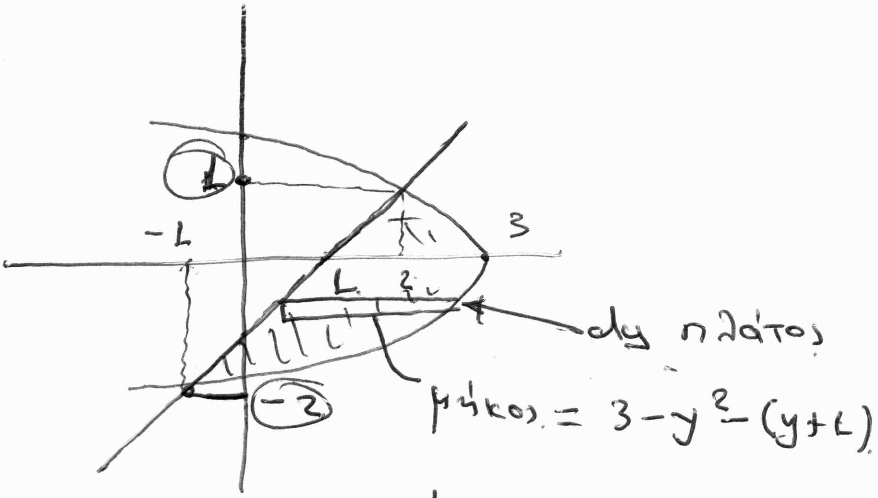
$x=y+1$

Σημεία τομής: $\begin{cases} y = x-1 \\ x = 3-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3-y^2-1 \\ x = 3-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y-2=0 \\ x = 3-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \text{ ή } y=-2 \\ x=3-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-2 \\ x=-1 \end{cases} \right.$ Τα σημεία τομής

είναι τα $(2,1)$ και $(-1,-2)$



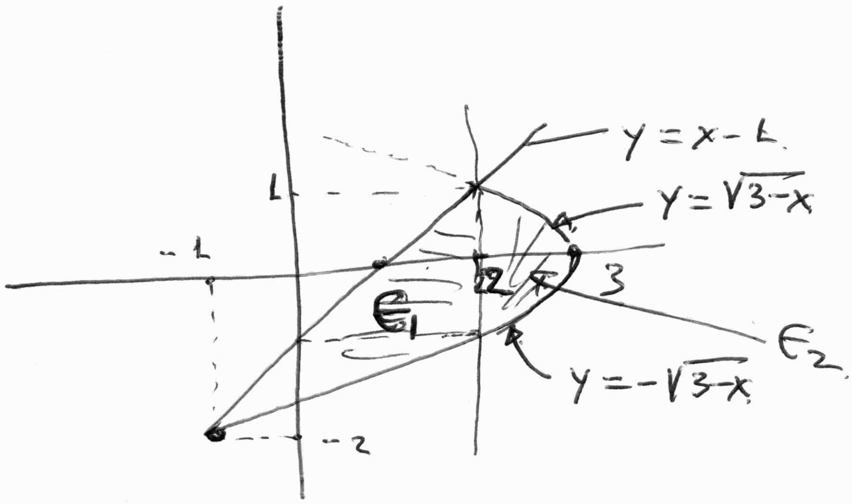
$$E = \int_{-2}^{1} (3-y^2-y-1)\,dy = \int_{-2}^{1} (-y^2-y+2)\,dy =$$

$$= \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) =$$

$$= -\frac{5}{6} + 2 - \frac{8}{3} + 6 = -\frac{5}{6} - \frac{16}{6} + 8 =$$

$$= -\frac{21}{6} + \frac{48}{6} = \frac{27}{6} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

Αν θέλαμε να ολοκληρώσουμε ως προς x θα κάναμε το εξής:



$$E_1 = \int_{-1}^{2} \left(x-1-(-\sqrt{3-x})\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(x-1+\sqrt{3-x}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2}\sqrt{3-x}\, d(3-x) = 2-2-\left(\frac{1}{2}+1\right) -$$

$$- \int_{4}^{1} u^{1/2}\,du = -\frac{3}{2} - \left[\frac{2\sqrt{u^3}}{3}\right]_{4}^{1} = -\frac{3}{2} - \frac{2}{3}(1-8) =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{14}{3} = \frac{-9+28}{6} = \frac{19}{6}$$

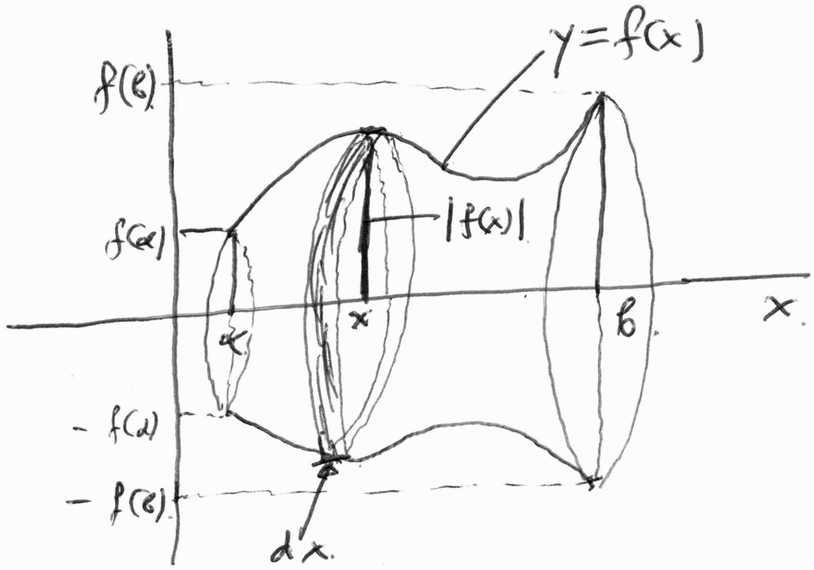
$$E_2 = \int_{2}^{3}\left[\sqrt{3-x} - (-\sqrt{3-x})\right]dx = 2\int_{2}^{3}\sqrt{3-x}\,dx =$$

$$\underset{u=3-x}{=} -2\int_{1}^{0}\sqrt{u}\,du = -\left[\frac{4\sqrt{u^3}}{3}\right]_{1}^{0} = \frac{4}{3}.$$

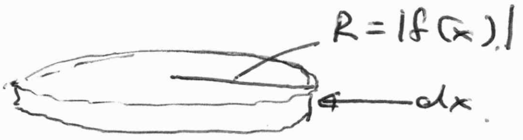
Άρα $E = E_1 + E_2 = \frac{19}{6} + \frac{4}{3} = \frac{19+8}{6} = \frac{27}{6} = \boxed{\frac{9}{2}}$

Όγκος σχημάτων εκ περιστροφής

Έστω $y=f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ η καμπύλη μιας συνάρτησης.



Περιστρέφουμε την καμπύλη $y=f(x)$ γύρω από τον άξονα $x'x$ και παράγεται ένα στερεό σώμα.
Για να υπολογίσουμε τον όγκο του V σκεπτόμαστε ως εξής: Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε "μικρούς" κυλίνδρους με ακτίνα βάσης $|f(x)|$ (το απόλυτο μπαίνει όταν $f(x)<0$) και ύψος dx.



~~Το~~ Ο όγκος κάθε κυλινδρίσκου ισούται με

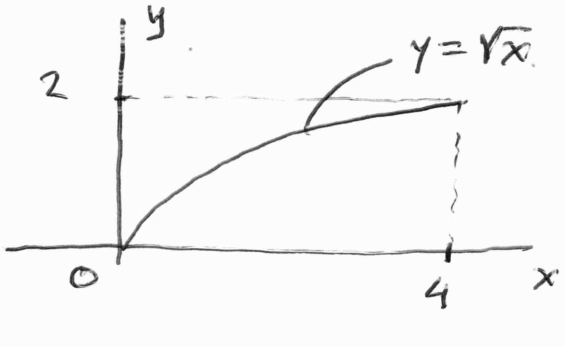
$$dV = \left(\underbrace{\text{εμβαδόν βάσης}}_{\pi R^2=\pi(f(x))^2}\right) \times \left(\underset{\substack{\downarrow \\ dx}}{\text{ύψος}}\right)$$

Ο συνολικός όγκος του σχήματος ισούται με

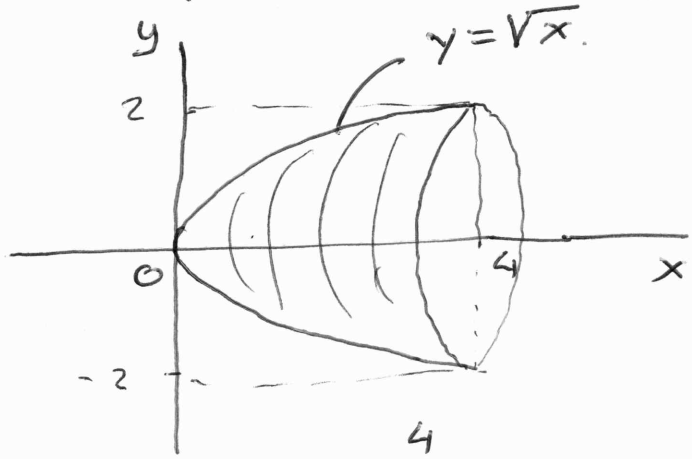
$$V = \int_\alpha^\beta dV(x) = \int_\alpha^\beta \pi (f(x))^2 dx = \boxed{\pi \int_\alpha^\beta (f(x))^2 dx}$$

Παραδείγματα: 1)

Έστω $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,4]$



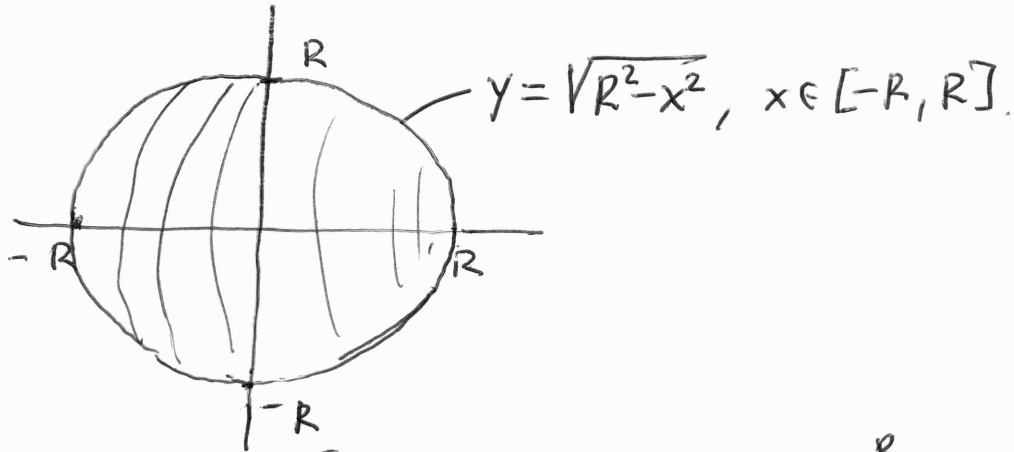
Το στερεό που θα σχηματιστεί είναι



Ο όγκος του είναι: $V=\pi\int_0^4(\sqrt{x})^2dx =$

$= \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\cdot\frac{16}{2} = 8\pi.$

2). <u>Όγκος σφαίρας ακτίνας R:</u>

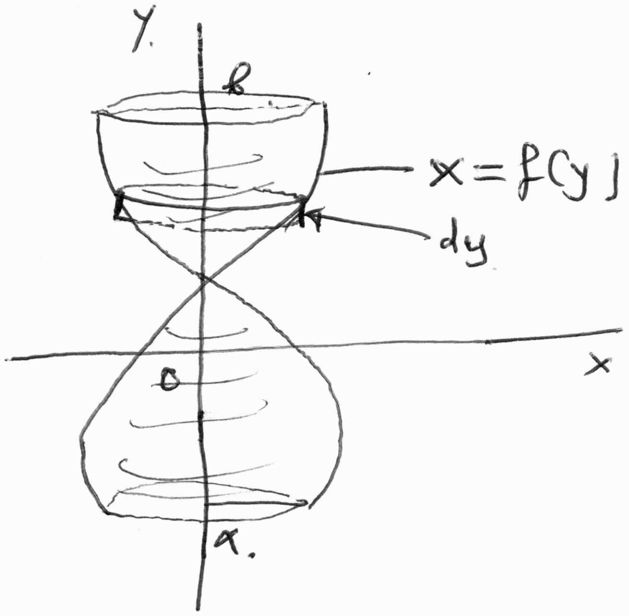


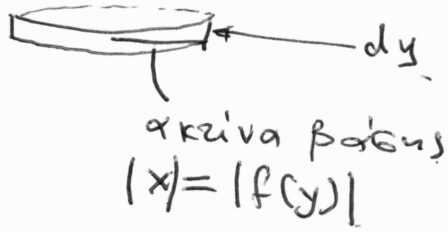
Έχουμε: $V=\pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx = \pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx =$

$=\pi R^2(2R) - \pi\int_{-R}^{R}x^2dx = 2\pi R^3 - \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} =$

$= 2\pi R^3 - \pi\left(\frac{R^3}{3} - \frac{-R^3}{3}\right) = 2\pi R^3 - 2\pi\frac{R^3}{3} = \boxed{\frac{4\pi R^3}{3}}$

3). Αν η καμπύλη είναι της μορφής $x = f(y)$ και την περιστρέψουμε γύρω από τον άξονα των y τότε παίρνουμε το στερεό.

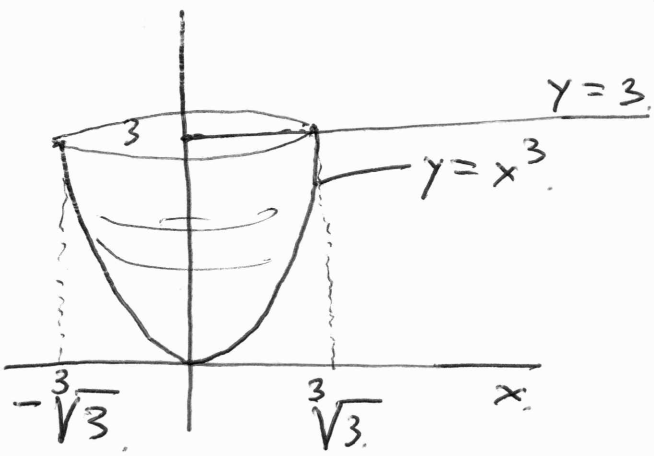




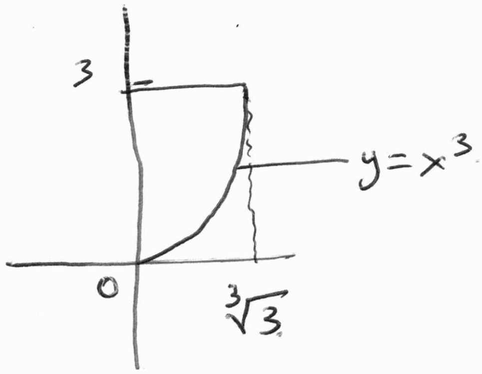
Εδώ ολοκληρώνουμε ως προς y.

Παίρνουμε $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(y))^2 \, dy$.

<u>Παράδειγμα:</u> $y = x^3$, $y = 3$.



Αν περιστρέψουμε το χωρίο που ορίζεται από την καμπύλη $y=x^3$, $y=3$ και τον άξονα $y'y$ παίρνουμε το ζητούμενο στερεό.



Μπορούμε να πάρουμε το κομμάτι της καμπύλης από $x=0$ έως $x=\sqrt[3]{3}$. Λύνουμε ως προς x και παίρνουμε: $y=x^3 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y}$, $y\in[0,3]$.

Άρα ο ζητούμενος όγκος ισούται με

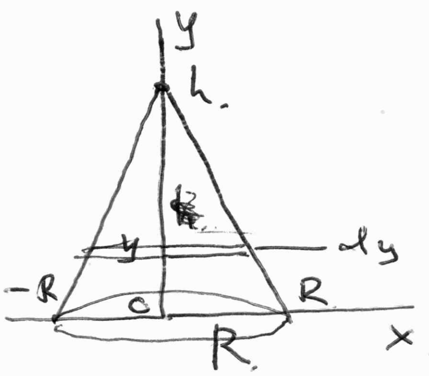
$$V=\pi\int_0^3(\sqrt[3]{y})^2\,dy=\pi\int_0^3 y^{2/3}\,dy=\pi\left[\frac{y^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right]_0^3=$$

$$=\frac{3\pi}{5}\left[\sqrt[3]{y^5}\right]_0^3=\frac{3\pi\sqrt[3]{3^5}}{5}=\frac{3\pi\sqrt[3]{3^3\cdot 3^2}}{5}=$$

$$\boxed{=\frac{9\pi\sqrt[3]{9}}{5}}$$

<u>Όγκος κώνου (ορθού):</u>

Έστω ορθός κυκλικός κώνος ακτίνας βάσεως R και ύψους h.



Για κάθε $y\in[0,h]$ η ακτίνα της βάσης του κυλινδρίσκου ύψους dy ισούται με x. Το x δίνεται με βάση την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $(R,0)$ και $(0,h)$.

Η εξίσωση της ευθείας αυτής είναι: $y=ax+b$.
Επαληθεύεται από τα $(R,0)$ και $(0,h)$ οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 0=aR+b \\ h=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aR=-h \\ b=h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{h}{R} \\ b=h \end{cases}$$

Άρα είναι η ευθεία $y=-\frac{hx}{R}+h$ και την λύνουμε ως προς x: $Ry=-hx+Rh \Leftrightarrow hx=Rh-Ry \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=\frac{R}{h}(h-y)$

Άρα ο ζητούμενος όγκος είναι:

$$V=\pi\int_0^h \frac{R^2}{h^2}(h-y)^2dy=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h (h-y)^2dy=$$

$$=-\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h (h-y)^2 d(h-y) \underset{u=h-y}{=} -\frac{\pi R^2}{h^2}\int_h^0 u^2du=$$

$$=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h u^2du=\frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi R^2 h^3}{3h^2}=\boxed{\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h}$$

Όγκος (στερεού) που προκύπτει με περιστροφή χωρίου που περικλείεται δύο καμπύλες.

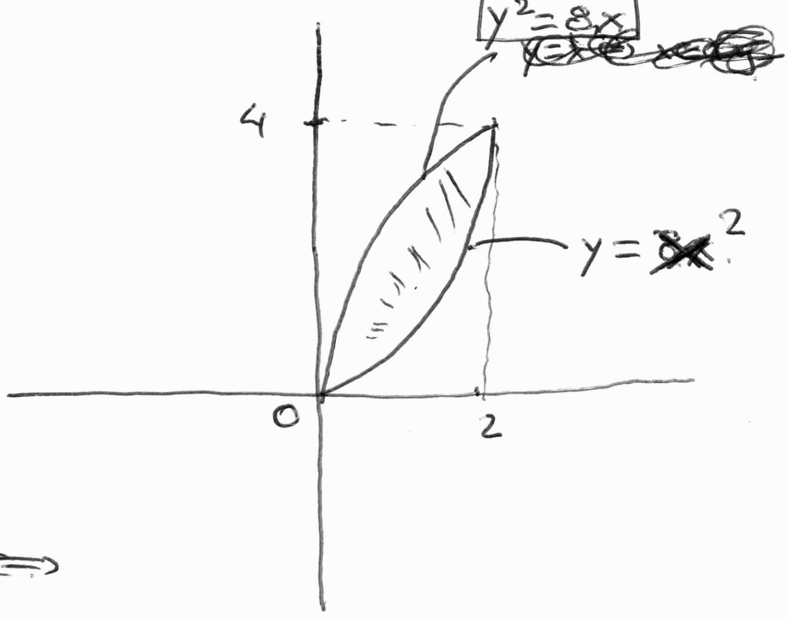
Παράδειγμα. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y=x^2$ και $y^2=8x$.

α) Γύρω από τον άξονα $x'x$.

β) Γύρω από τον άξονα $y'y$.

Λύση:

Βρίσκουμε πρώτα τα σημεία τομής



$$\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=8x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x=\frac{y^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\left(\frac{y^2}{8}\right)^2 \\ x=\frac{y^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{y^4}{64} \\ x=\frac{y^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^4-64y=0 \\ x=\frac{y^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^3-64)=0 \\ x=\frac{y^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^3-4^3)=0 \\ x=\frac{y^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

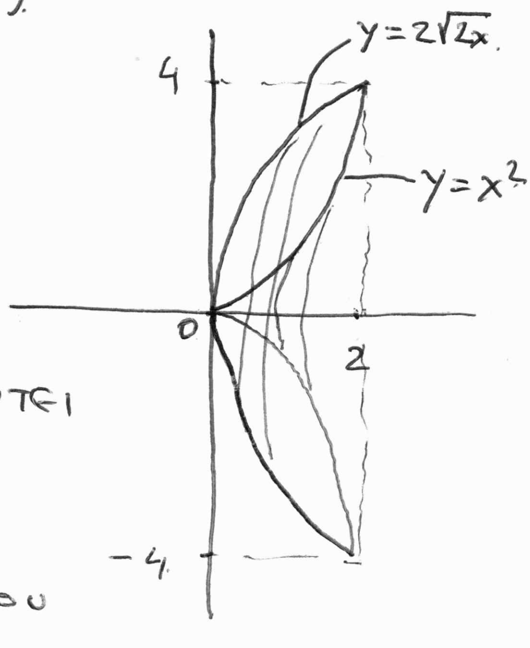
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ή } y=4 \\ x=\frac{y^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y=0 \\ x=\frac{y^2}{8}=0 \end{cases}\right) \text{ ή } \begin{cases} y=4 \\ x=\frac{4^2}{8}=2 \end{cases}$$

Σημεία τομής: $(0,0)$ και $(2,4)$

α) Περιστροφή γύρω από τον $x'\cancel{x}$.

Λύνουμε την $y^2=8x$ ως προς y και παίρνουμε $(y\geq 0)$

$y=2\sqrt{2x}$



Ο όγκος του στερεού που προκύπτει ισούται με τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της $y=2\sqrt{2x}$ μείον τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της $y=x^2$.

Άρα ο ζητούμενος όγκος είναι:

$$V_1 = \pi \int_0^2 \left(2\sqrt{2x}\right)^2 dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^2 8x\,dx - \pi \int_0^2 x^4 dx = 8\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 -$$

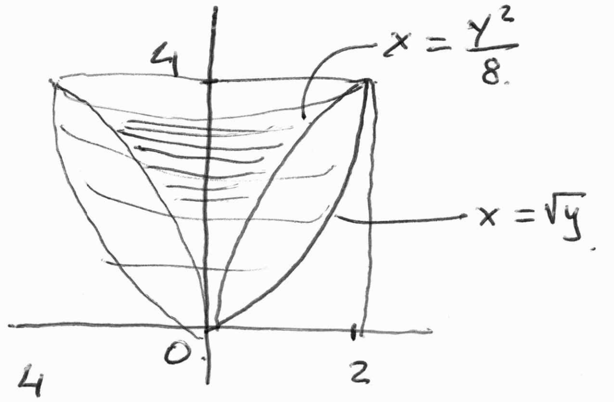
$$- \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 8\pi \cdot 2 - \pi \cdot \frac{32}{5} = 16\pi - \frac{32\pi}{5} =$$

$$= 16\pi\left(1 - \frac{2}{5}\right) = 16\pi \cdot \frac{3}{5} = \boxed{\frac{48\pi}{5}}$$

β) Περιστροφή γύρω από τον άξονα $y'y$.

Έχουμε τις καμπύλες $x = \frac{y^2}{8}$ και $y = x^2 \underset{x \geq 0}{\Longleftrightarrow} x = \sqrt{y}$

Ο ζητούμενος όγκος ισούται με:



$$V_2 = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy -$$

$$- \pi \int_0^4 \left(\frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \pi \int_0^4 y\,dy - \frac{\pi}{64} \int_0^4 y^4 dy =$$

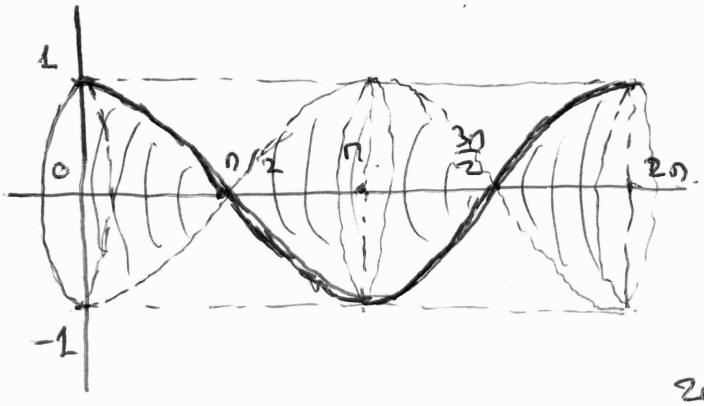
$$= \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 - \frac{\pi}{64}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{2} - \frac{\pi}{64} \cdot \frac{4^5}{5} =$$

$$= 8\pi - \frac{\pi}{4^3} \cdot \frac{4^5}{5} = 8\pi - \frac{\pi \cdot 16}{5} = \frac{40\pi - 16\pi}{5} = \boxed{\frac{24\pi}{5}}$$

Άσκηση:

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=\cos x$, τον $x'x$ και τις κατακόρυφες $x=0$ και $x=2\pi$.

Λύση:



Ο ζητούμενος όγκος είναι: $V=\pi\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx =$

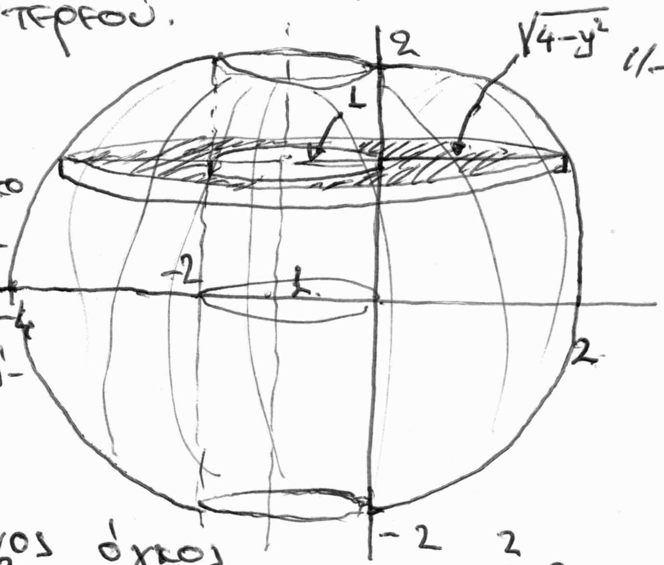
$$=\pi\left[\frac{x+\sin x\cos x}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi\,\frac{2\pi+\overset{0}{\sin 2\pi}\cos 2\pi-0-\overset{0}{\sin 0}\cos 0}{2}=$$

$=\pi^2$.

Άσκηση: Το ~~χωρίο~~ ημικύκλιο με εξίσωση $x=\sqrt{4-y^2}$, τον άξονα $y'y$, περιστρέφεται γύρω από την κατακόρυφη $x=-1$. Να βρεθεί ο όγκος του παραγόμενου στερεού.

Λύση:

Από κάθε κυλινδρίσκο ύψους dy και ακτίνας $1+\sqrt{4-y^2}$ αφαιρούμε έναν κυλινδρίσκο ακτίνας 1



"Τρύπιο μήλο"

Άρα ο ζητούμενος όγκος είναι $V=\pi\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{4-y^2}+1\right)^2dy-\pi\int_{-2}^{2}1^2\,dy=$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(4 - y^2 \cancel{+1} + 2\sqrt{4-y^2}\right) dy - \pi \cancel{\int_{-2}^{2} dy} =$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(4 - y^2 + 2\sqrt{4-y^2}\right) dy \underset{\substack{\text{λόγω} \\ \text{συμμετρίας}}}{=\!=\!=} 2\pi \int_{0}^{2} \left(4 - y^2 + 2\sqrt{4-y^2}\right) dy =$$

$$= 8\pi \int_0^2 dy - 2\pi \int_0^2 y^2 dy + 4\pi \int_0^2 \sqrt{4-y^2}\, dy =$$

$$= 16\pi - 2\pi \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 + 4\pi \int_0^2 \sqrt{4-y^2}\, dy =$$

$$= 16\pi - 2\pi \cdot \frac{8}{3} + 4\pi \cdot 2 \int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}\, dy =$$

$$= \frac{2 \cdot 16\pi}{3} + 16\pi \int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}\, d\left(\frac{y}{2}\right) =$$

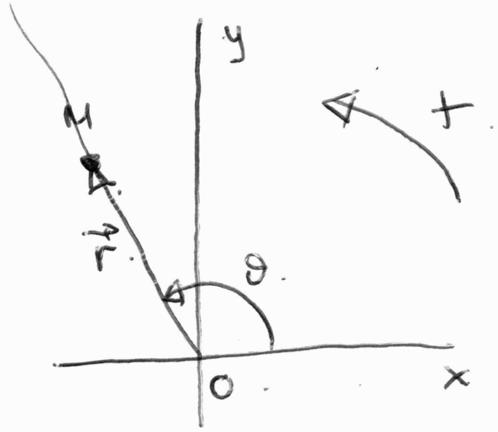
$$\underset{u = \frac{y}{2}}{=\!=} \frac{32\pi}{3} + 16\pi \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, du \underset{\substack{u = \sin\vartheta \\ \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]}}{=\!=\!=} \frac{32\pi}{3} + 16\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\vartheta} \cdot \cos\vartheta\, d\vartheta \underset{\substack{\cos\vartheta \geq 0 \\ \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]}}{=\!=\!=} \frac{32\pi}{3} + 16\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \frac{32\pi}{3} + 16\pi \left[\frac{\vartheta + \cos\vartheta \sin\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{32\pi}{3} + 16\pi \cdot \frac{\pi}{4} =$$

$$= 16\pi \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{16\pi \cdot \frac{8 + 3\pi}{12}}$$

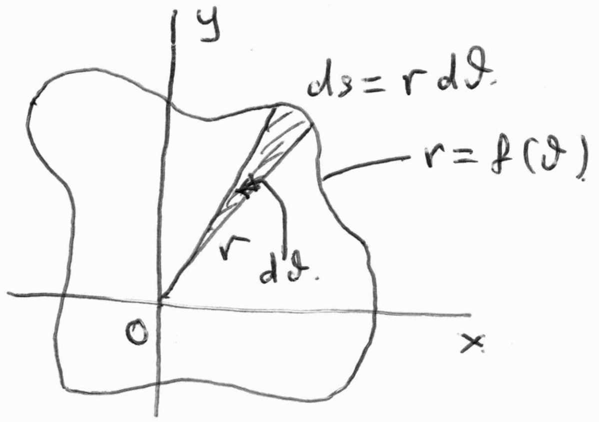
Υπολογισμός εμβαδών σε πολικές συντεταγμένες:

Θέση σημείου σε πολικές συντεταγμένες



Ένα σημείο M καθορίζεται μονοσήμαντα στο επίπεδο από δύο πράγματα: Την απόστασή του $r = OM$ από την αρχή των αξόνων και τη γωνία ϑ (κατά τη θετική φορά που σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox, δηλαδή τη γωνία κατά την οποία ο θετικός ημιάξονας Ox πρέπει να περιστραφεί κατά τη θετική φορά ώστε να συμπέσει με την ημιευθεία OM.

Μια καμπύλη μπορεί να δίνεται στη μορφή $r = f(\vartheta)$



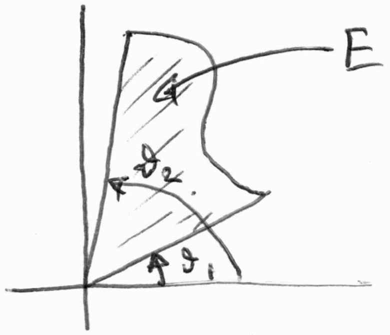
Μέθοδος: Χωρίζουμε το χωρίο σε κατά προσέγγιση τριγωνικούς τομείς με ακτίνα r και βάση το στοιχειώδες μήκος $ds = r \cdot d\vartheta$. (ϑ σε ακτίνια)

Το εμβαδόν του στοιχειώδους τριγώνου ισούται με

$$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{r\,d\vartheta}_{\text{βάση}} \cdot \underbrace{r}_{\text{ύψος}} = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta = \frac{1}{2} f(\vartheta)^2 d\vartheta .$$

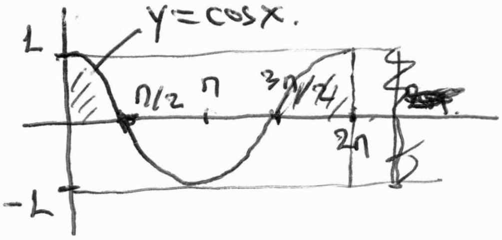
Αν η γωνία ϑ μεταβάλλεται από ϑ_1 σε ϑ_2, τότε το εμβαδόν που σαρώνει η ακτίνα r ισούται με

$$E=\frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 d\vartheta=\frac{1}{2}\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_2}(f(\vartheta))^2 d\vartheta .$$

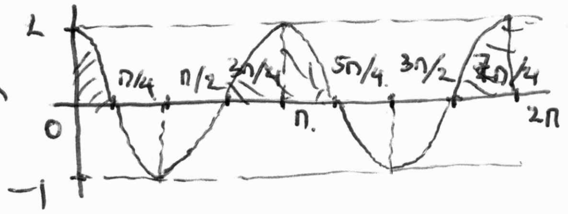


Παράδειγμα 1: Δίνεται η καμπύλη σε πολικές συντεταγμένες $r^2=a^2\cos 2\vartheta$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη αυτή.

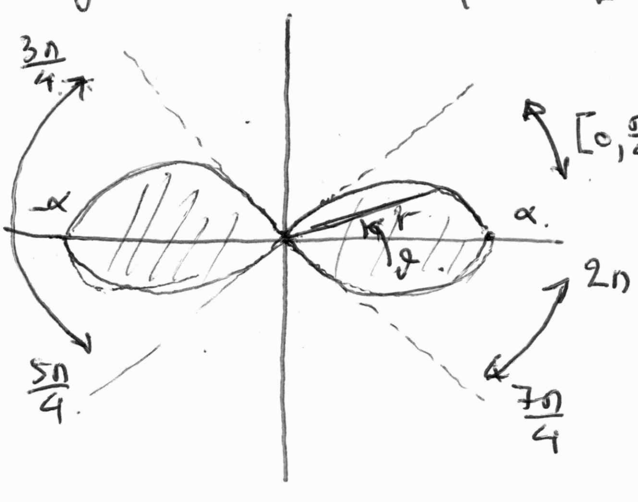
Λύση: Θα πρέπει $\cos 2\vartheta \geq 0$, γιατί $r^2, a^2 \geq 0$.



και



Τα διαστήματα στα οποία το $\cos 2\vartheta \geq 0$ στο $[0,2\pi]$ είναι: $[0,\frac{\pi}{4}]$, $[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$, $[\frac{7\pi}{4},2\pi]$, και $\cos 2\vartheta \leq 0$ στα $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$, $[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$. Επειδή $r=a\sqrt{\cos 2\vartheta}$ το εμβαδόν θα υπολογιστεί στα διαστήματα $[0,\frac{\pi}{4}]$, $[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$, $[\frac{7\pi}{4},2\pi]$



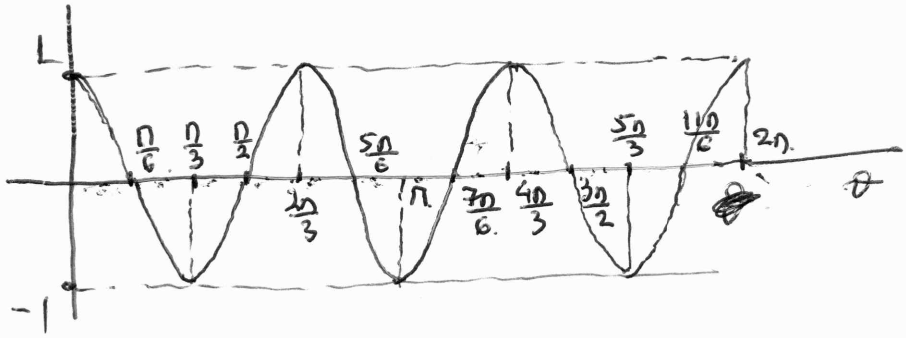
Λόγω συμμετρίας, το ~~σχήμα~~ εμβαδόν του χωρίου ισούται με το τετραπλάσιο του εμβαδού για $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

Άρα $\frac{1}{4}E = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 \, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\vartheta \, d\vartheta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/4} \cos 2\vartheta \, d(2\vartheta) =$

$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2} \cos u \, du = \frac{a^2}{4}[\sin u]_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{4}[1-0] = \frac{a^2}{4}$.

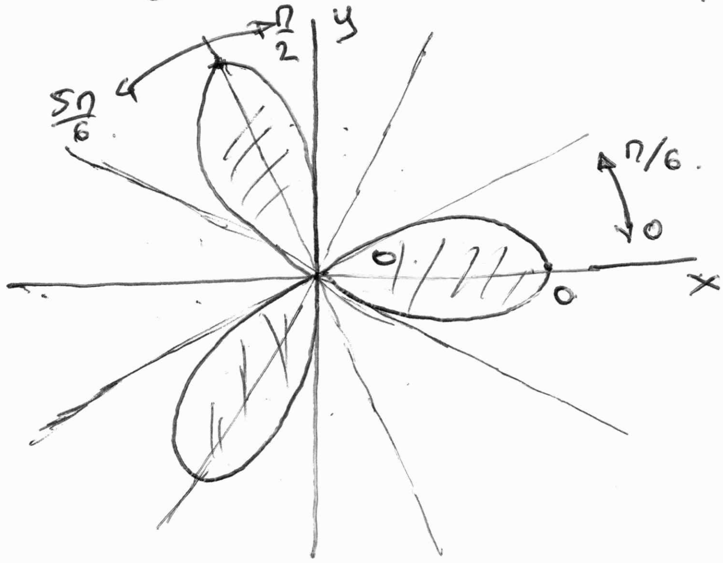
Άρα $E = 4 \cdot \frac{a^2}{4} = a^2$.

Παράδειγμα 2: $r = a\cos 3\vartheta$, $a>0$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$



Τα διαστήματα στα οποία το $\cos 3\vartheta$ είναι ≥ 0 είναι

$[0, \frac{\pi}{6}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$, $[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{11\pi}{6}, 2\pi]$



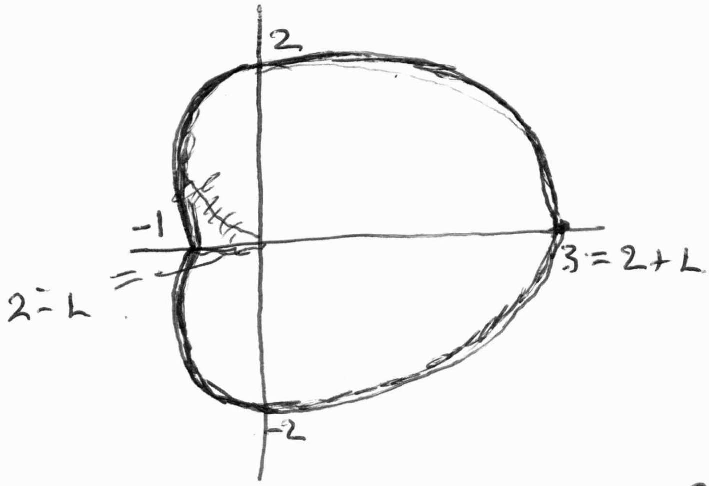
Λόγω συμμετρίας, το εμβαδόν E ισούται με:

$E = 6 \cdot \boxed{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} a^2 \cos^2 3\vartheta \, d\vartheta} = a^2 \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\vartheta \, d(3\vartheta) =$

$= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du = a^2 \left[\frac{u + \sin u \cos u}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}$

Άσκηση: Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $r=2+\cos\vartheta$, $\vartheta\in[0,2\pi]$.

Λύση:



$$E=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\vartheta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos\vartheta)^2\,d\vartheta=\int_0^{\pi}(2+\cos\vartheta)^2\,d\vartheta=$$

$$=\int_0^{\pi}(4+2\cos\vartheta+\cos^2\vartheta)\,d\vartheta=4\pi+2\int_0^{\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta+\int_0^{\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=4\pi+2\left[\sin\vartheta\right]_0^{\pi}+\left[\frac{\vartheta+\cos\vartheta\sin\vartheta}{2}\right]_0^{\pi}=4\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{2}.$$

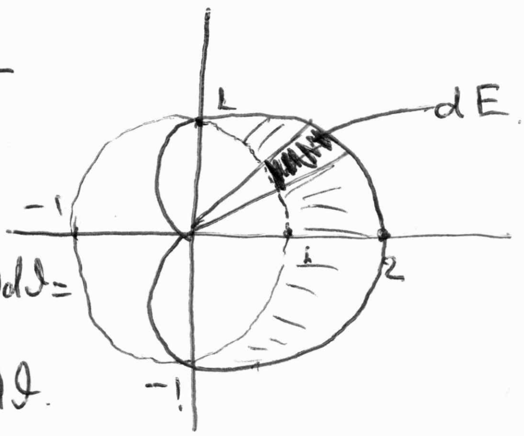
Άσκηση: Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $r=1+\cos\vartheta$ και εκτός του κύκλου $r=1$

Λύση:

$$dE=\frac{1}{2}(1+\cos\vartheta)^2\,d\vartheta-\frac{1}{2}1^2\,d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos^2\vartheta+2\cos\vartheta-1)\,d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos^2\vartheta+2\cos\vartheta)\,d\vartheta.$$

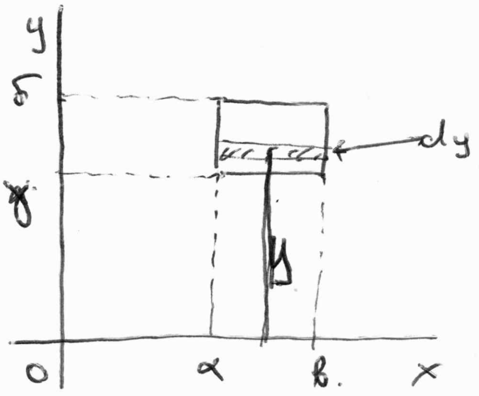


$$E=\cancel{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cancel{2}}(\cos^2\vartheta+2\cos\vartheta)\,d\vartheta=\int_0^{\pi/2}\cos^2\vartheta\,d\vartheta+2\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=\left[\frac{\vartheta+\cos\vartheta\sin\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/2}+2\left[\sin\vartheta\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}+2$$

Κέντρα μάζας ομογενών πλακών στο xy-επίπεδο:

Ροπή ορθογωνίου ως προς τον άξονα $x'x$.



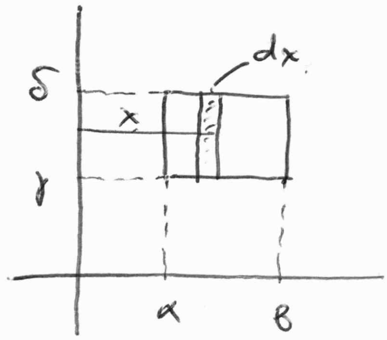
Η ροπή M_x ενός ορθογωνίου ως προς τον άξονα $x'x$ ισούται με: Στοιχειώδες εμβαδόν $\times$ απόσταση (με πρόσημο) y του χωρίου από τον άξονα $x'x$.

Άρα $M_x = (\beta-\alpha)\int_\gamma^\delta y\,dy = (\beta-\alpha)\left[\frac{y^2}{2}\right]_\gamma^\delta = (\beta-\alpha)\frac{\delta^2-\gamma^2}{2} =$

$= (\beta-\alpha)(\delta-\gamma)\frac{\gamma+\delta}{2} = E\cdot\frac{\gamma+\delta}{2}$, E το εμβαδόν του ορθογωνίου

Η μέση τιμή $\overline{y} = \frac{\gamma+\delta}{2}$ είναι η τεταγμένη του κέντρου μάζας

Η ροπή M_y ως προς τον άξονα $y'y$ ισούται με:



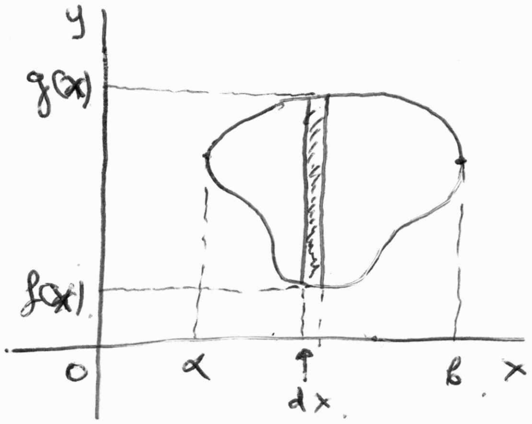
$M_y = (\delta-\gamma)\int_\alpha^\beta x\,dx =$

$= (\delta-\gamma)\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta = (\delta-\gamma)\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} = (\delta-\gamma)(\beta-\alpha)\frac{\alpha+\beta}{2} = E\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}$

Η τετμημένη $\overline{x} = \frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι η τετμημένη του κέντρου μάζας

Άρα το κέντρο μάζας ορθογωνίου έχει συντεταγμένες

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\gamma+\delta}{2}\right)$$



Για να βρω τη ροπή ενός σχήματος ως προς τον άξονα $x'x$, τεμαχίζω το σχήμα σε κατακόρυφα ορθογώνια πλάτους dx και ύψους $g(x)-f(x)$.

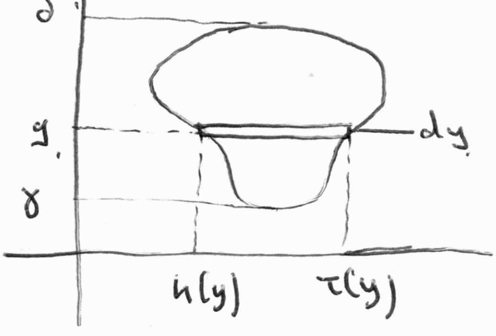
Η στοιχειώδης ροπή dM_x ως προς τον άξονα $x'x$ του λεπτού ορθογωνίου ισούται με $\frac{g(x)+f(x)}{2} \cdot dE$, όπου $dE = (g(x)-f(x))dx$ το στοιχειώδες εμβαδόν του λεπτού ορθογωνίου.

Άρα $M_x = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(g(x)+f(x))(g(x)-f(x))dx = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [(g(x))^2-(f(x))^2]dx$

Η τεταγμένη $\overline{y}$ του κέντρου μάζας ισούται με

$$\overline{y} = \frac{M_x}{E}, \text{ όπου } E = \int_\alpha^\beta (g(x)-f(x))dx$$ το εμβαδόν του σχήματος.

Αν τεμαχίσω οριζόντια το σχήμα σε λωρίδες πλάτους dy και πάρω το ολοκλήρωμα



$$M_y = \int_\gamma^\delta \frac{1}{2}(\tau(y)+h(y))(\tau(y)-h(y))dy$$

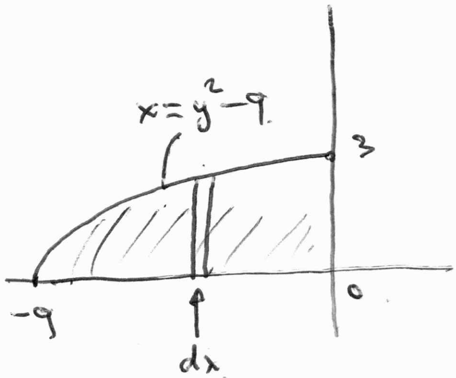
$$= \frac{1}{2}\int_\gamma^\delta [(\tau(y))^2-(h(y))^2]dy$$

παίρνω τη ροπή του σχήματος ως προς τον άξονα $y'y$.

Η τετμημένη $\overline{x} = \frac{M_y}{E}$ είναι η τετμημένη του κέντρου μάζας του σχήματος.

Ασκήσεις: 4) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του σχήματος.

Λύση:

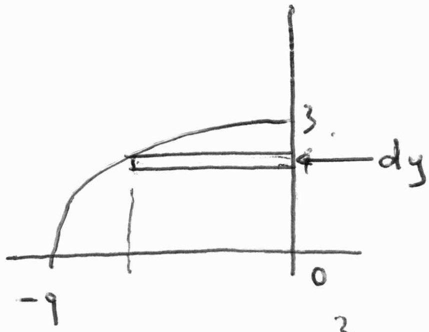


Λύνουμε ως προς y: $y^2 = x+9 \Rightarrow y = \sqrt{x+9}$
$y \geq 0$.

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-9}^{0}\left[\left(\underset{y}{\sqrt{x+9}}\right)^2 - 0^2\right]dx = \frac{1}{2}\int_{-9}^{0}(x+9)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-9}^{0} +$$

$$+\frac{9}{2}\left[x\right]_{-9}^{0} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{81}{2} + \frac{9}{2}\left(0-(-9)\right) =$$

$$= -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = \frac{81}{4}.$$



$$M_y = \frac{1}{2}\int_{0}^{3}\left[0^2 - (y^2-9)^2\right]dy = -\frac{1}{2}\int_{0}^{3}(y^2-9)^2\,dy =$$

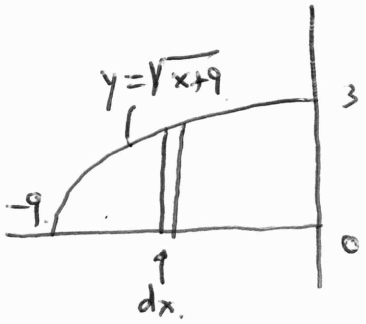
$$= -\frac{1}{2}\int_{0}^{3}(y^4 - 18y^2 + 81)\,dy = -\frac{1}{2}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^3 + 9\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 - \frac{81}{2}\left[y\right]_0^3 =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{243}{5} + 9\cdot\frac{27}{3} - \frac{81}{2}\cdot 3 = -\frac{243}{10} + \frac{243}{3} - \frac{243}{2} =$$

$$= 243\left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 243\cdot\frac{-3+10-15}{30} = \frac{243}{30}(-8) =$$

$$= -\frac{81}{5}\cdot 4 = -\frac{324}{5}.$$

Το εμβαδόν E του χωρίου ισούται με:



$$E=\int_{-9}^{0}\sqrt{x+9}\,dx=$$

$$=\int_{-9}^{0}\sqrt{x+9}\,d(x+9)\underset{u=x+9}{=\!=}$$

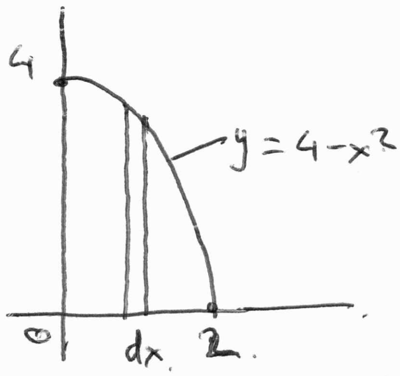
$$=\int_{0}^{9}\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^9=\frac{2}{3}\sqrt{9^3}=\frac{2}{3}\cdot 3^3=2\cdot 9=18.$$

Το κέντρο μάζας έχει συντεταγμένη $(\bar{x},\bar{y})=$

$$=\left(-\frac{324}{5\cdot 18},\ \frac{81}{4\cdot 18}\right)=\left(-\frac{18}{5},\ \frac{9}{8}\right)$$

2) Να βρεθεί το κέντρο μάζας του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y=4-x^2$, $x\in[0,2]$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση:



$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^2(4-x^2)^2dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(16-8x^2+x^4)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 32-4\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[\frac{x^5}{10}\right]_0^2=$$

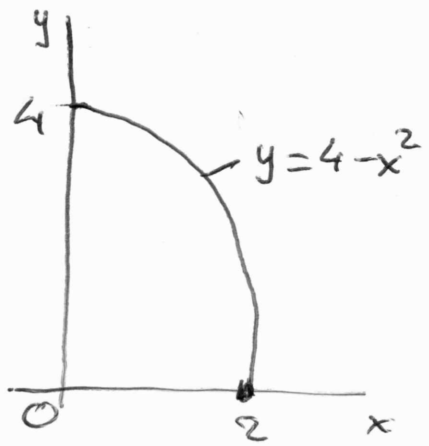
$$=16-\frac{32}{3}+\frac{32}{10}=16\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=16\cdot\frac{15-10+3}{15}=16\cdot\frac{8}{15}=\frac{128}{15}$$

$M_y=$; Λύνουμε ως προς $x\geq 0$ και παίρνουμε $x=\sqrt{4-y}$, $y\in[0,4]$.

$$M_y=\frac{1}{2}\int_0^4(\sqrt{4-y})^2dy=\frac{1}{2}\int_0^4(4-y)dy=-\frac{1}{2}\int_0^4(4-y)\,d(4-y)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_4^0 u\,du=\frac{1}{2}\int_0^4 u\,du=\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^4=\frac{4^2}{4}=4.$$

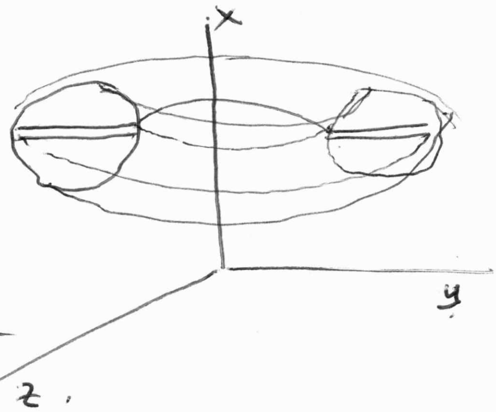
Εμβαδόν $E=\int_0^2 (4-x^2)\,dx = 8 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$



$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{E}, \frac{M_x}{E}\right) = \left(\frac{4}{\frac{16}{3}}, \frac{\frac{128}{15}}{\frac{16}{3}}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{8}{5}\right)$$

Κέντρα μάζας σωμάτων εκ. περιστροφής

Αν ένα επίπεδο σώμα περιστραφεί γύρω από τον άξονα x'x ή τον άξονα y'y, τότε το κέντρο μάζας του παραγόμενου στερεού βρίσκεται πάνω σ' αυτόν τον άξονα.



Υπολογίζουμε τον όγκο V του στερεού. Μετά υπολογίζουμε τη ροπή ως προς το επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής αθροίζοντας τους στοιχειώδεις όγκους επί την απόσταση του κέντρου μάζας τους από το επίπεδο αυτό. Την ποσότητα αυτή καλούμε M_{yz} ή M_{xz}.

~~Διαιρούμε το~~

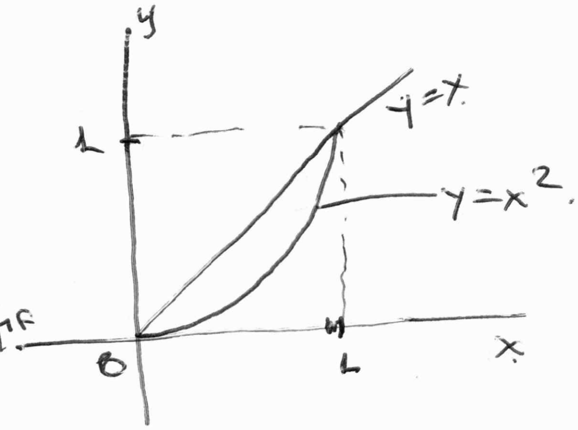
Διαιρούμε το M_{yz} ή το M_{xz} από τον όγκο και παίρνουμε τη συντεταγμένη $\bar{x}$ ή $\bar{y}$ του κέντρου μάζας.

Ακολουθούν παραδείγματα:

Άσκηση: Δίνεται το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή και την ευθεία $y=x$.

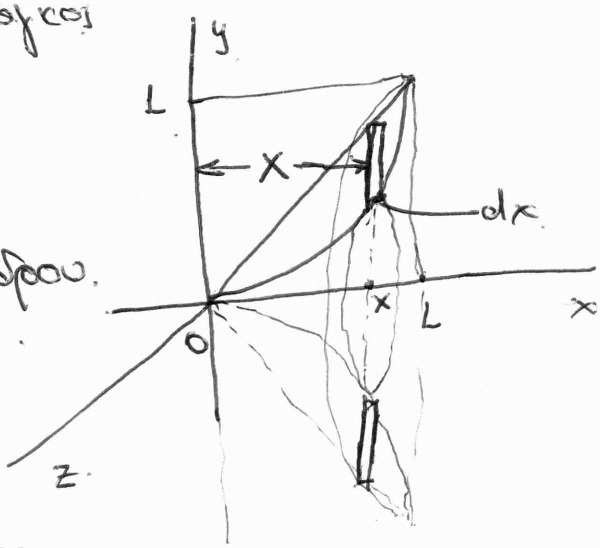
α) Να βρεθεί το κέντρο μάζας του στερεού αν το περιστρέφουμε γύρω από τον άξονα $x'x$.

β) Να βρεθεί το κέντρο μάζας του στερεού αν το περιστρέφουμε γύρω από τον άξονα $y'y$.



Λύση: α) Ο στοιχειώδης όγκος στο σημείο x ισούται με τη διαφορά $(\pi x^2-\pi x^4)dx$ των όγκων του εξωτερικού μείον του εσωτερικού κυλίνδρου.

Η απόσταση του στοιχειώδους όγκου από το επίπεδο yz είναι ίση με x.



Άρα $V=\int_0^1(\pi x^2-\pi x^4)dx=$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\pi\cdot\frac{2}{15}$$

Η ροπή ως προς το επίπεδο yz είναι $M_{yz}=$

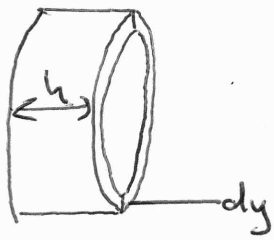
$$=\pi\int_0^1 x(x^2-x^4)dx=\pi\int_0^1(x^3-x^5)dx=\pi\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$$

Άρα η τετμημένη $\overline{x}$ του κέντρου μάζας είναι ίση με $\overline{x}=\dfrac{\frac{\pi}{12}}{\frac{2\pi}{15}}=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$.

Η ροπή ως προς το επίπεδο yz μπορεί να υπολογιστεί και διαφορετικά. Το ίδιο και ο όγκος.

Ο όγκος βρίσκεται αν αθροίσουμε τους στοιχειώδεις όγκους των κελύφων (μικροσκοπική διαφορά κυλίνδρων.)



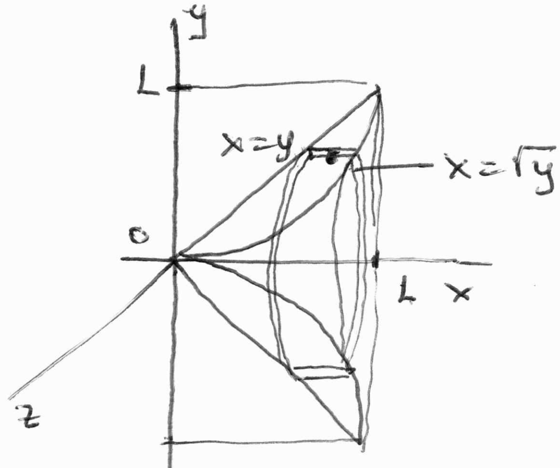
με εμβαδόν βάσης $2\pi y\,dy$ και ύψος h. Εδώ $h=\sqrt{y}-y$

Άρα $V=\int_0^1 2\pi . y(\sqrt{y}-y)\,dy =$

$=2\pi \int_0^1 y^{3/2}dy - 2\pi\int_0^1 y^2 dy =$

$=2\pi\left[\frac{2y^{5/2}}{5}\right]_0^1 - 2\pi\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 =$

$=\frac{4\pi}{5}-\frac{2\pi}{3} = 2\pi\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{15} = \frac{2\pi}{15}$



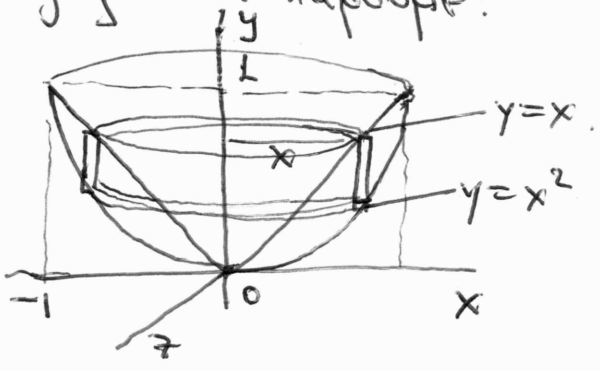
Η απόσταση του κέντρου μάζας κάθε κελύφους από το επίπεδο yz ισούται με $y+\frac{\sqrt{y}-y}{2}=\frac{\sqrt{y}+y}{2}$.

Άρα $M_{yz}=2\pi\int_0^1 y(\sqrt{y}-y)\frac{\sqrt{y}+y}{2}dy = \pi\int_0^1 y(y-y^2)\,dy =$

$=\pi\int_0^1(y^2-y^3)\,dy = \pi\left(\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1-\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1\right) = \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{12}$

Άρα $\overline{x}=\frac{M_{yz}}{V}=\frac{\pi/12}{2\pi/15}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}.$

β) Αν περιστρέψουμε τώρα το χωρίο γύρω από τον άξονα y'y θα πάρουμε:



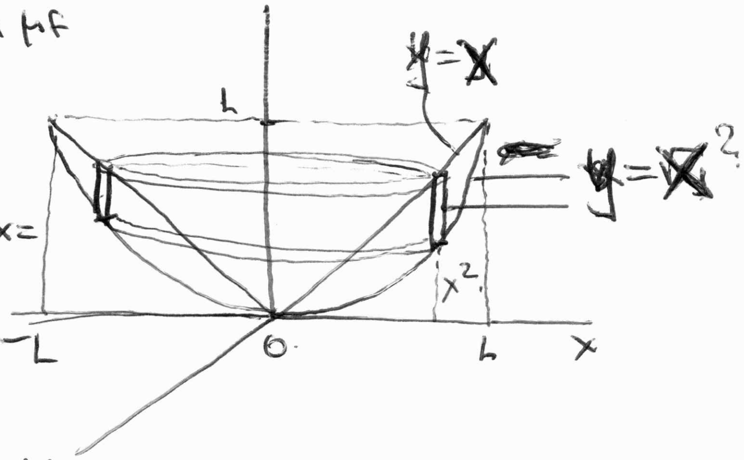
Ο στοιχειώδης όγκος dV του κελύφους ισούται με

$$dV = 2\pi x\,dx\cdot(x-x^2)$$

Άρα $V = \int_0^1 2\pi x(x-x^2)\,dx = 2\pi\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$

Η απόσταση του κέντρου μάζας κάθε κελύφους από το επίπεδο xz ισούται με

$$x^2 + \frac{x-x^2}{2} = \frac{x+x^2}{2}$$



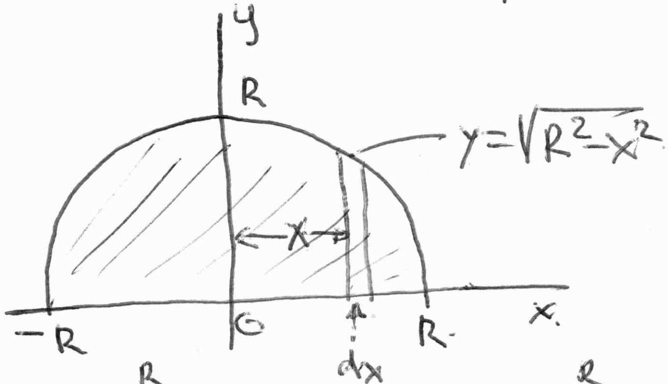
Άρα $M_{xz} = \int_0^1 2\pi x(x-x^2)\left(\frac{x+x^2}{2}\right)dx =$

$= \pi\int_0^1 x(x^2-x^4)\,dx =$

$= \pi\int_0^1 (x^3-x^5)\,dx = \pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}.$

Άρα $\bar{y} = \dfrac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Άσκηση: Να βρεθεί το κέντρο μάζας του ημικυκλίου $0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$.



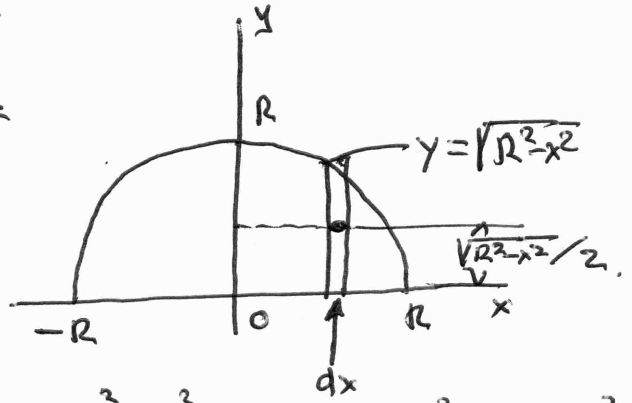
Λύση: Λόγω συμμετρίας το κέντρο μάζας θα είναι πάνω στον άξονα $y'y$.

Μπορούμε να το επαληθεύσουμε υπολογίζοντας το $M_y = \int_{-R}^{R} x\sqrt{R^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,d(R^2-x^2)$

$\underset{u=R^2-x^2}{=} -\frac{1}{2}\int_0^0 \sqrt{u}\,du = 0$. Άρα $\bar{x} = \frac{M_y}{E} = 0$. Είναι προφανές ότι το ολοκλήρωμα θα έβγαινε μηδέν γιατί η $x\sqrt{R^2-x^2}$ είναι περιττή.

Τώρα, το κέντρο μάζας κάθε ορθογωνίου απέχει από τον άξονα των x απόσταση $\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{2}$.

Άρα $M_x = \int_{-R}^{R} \frac{(\sqrt{R^2-x^2})^2}{2}\, dx =$



$$= \int_{-R}^{R} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx =$$

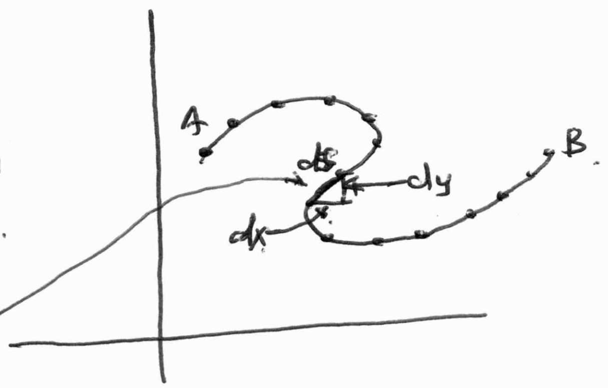
$$= \frac{2R^3}{2} - \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-R}^{R} = \frac{\cancel{2}R^3}{\cancel{2}} - \frac{R^3+R^3}{6} = R^3 - \frac{R^3}{3} = \frac{2R^3}{3}.$$

Άρα $\bar{y} = \frac{M_x}{E} = \frac{\frac{2R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$.

Άρα το κέντρο μάζας είναι το $\left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

Μήκος καμπύλης

Έστω ότι έχουμε μια καμπύλη στο επίπεδο. Χωρίζουμε την καμπύλη σε ενδιάμεσα σημεία. Από το ορθογώνιο τριγωνάκι



με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα συνάγουμε ότι το στοιχειώδες μήκος ds της καμπύλης ισούται με

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

Αν το σημείο $M(x,y)$ της καμπύλης εκφράζεται παραμετρικά μέσω μιας παραμέτρου $t \in [a,b]$, τότε έχουμε:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Άρα $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.

Επομένως το μήκος της καμπύλης ισούται με

$$S=\int_\alpha^\beta ds=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)+y'(t)}\,dt.$$

Αν η καμπύλη έχει τη μορφή $y=f(x)$, τότε παράμετρος είναι το x.

Άρα σ' αυτή την περίπτωση $S=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=$

$$=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

<u>Άσκηση:</u> Να βρείτε το μήκος του τόξου της καμπύλης $y=\sqrt{x^3}$, $x\in[0,5]$.

<u>Λύση:</u> $S=\int_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^5 \sqrt{1+\left[(x^{3/2})'\right]^2}\,dx=$

$$=\int_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx=\int_0^5 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx=$$

$$=\frac{4}{9}\int_0^5 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,d\left(1+\frac{9x}{4}\right)\underset{u=1+\frac{9x}{4}}{=}\frac{4}{9}\int_1^{49/4}\sqrt{u}\,du=$$

$$=\frac{4}{9}\left[\frac{2\sqrt{u^3}}{3}\right]_1^{\frac{49}{4}}=\frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(\frac{49}{4}\right)^3}-1\right)=\frac{8}{27}\left(\frac{7^3}{2^3}-1\right)=$$

$$=\frac{\cancel{8}}{27}\,\frac{343-8}{\cancel{8}}=\frac{335}{27}.$$

<u>Άσκηση:</u> Να βρείτε το τόξο της καμπύλης $x=t^2$, $y=t^3$, $t\in[0,4]$

<u>Λύση:</u> $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$.

Άρα $ds=\sqrt{4t^2+9t^4}\,dt=t\cdot\sqrt{4+9t^2}\,dt$.

Άρα $S=\int_0^4 t\sqrt{4+9t^2}\,dt = \frac{1}{18}\int_0^4 \sqrt{4+9t^2}\,d(4+9t^2)=$

$$=\frac{1}{18}\int_4^{148}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{18}\left[\frac{2\sqrt{u^3}}{3}\right]_4^{148} = \frac{1}{27}\left(\sqrt{2^6\cdot 37^3}-\sqrt{4^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{27}\left(2^3\cdot 37\sqrt{37}-8\right) = \frac{8}{27}\left(37\sqrt{37}-1\right)$$

Άσκηση: Βρείτε το μήκος της καμπύλης.
$x=\vartheta-\sin\vartheta$, $y=1-\cos\vartheta$, $\vartheta\in[0,2\pi]$.

Λύση: $x'(\vartheta)=1-\cos\vartheta$, $y'(\vartheta)=\sin\vartheta$.

Άρα $ds=\sqrt{(1-\cos\vartheta)^2+\sin^2\vartheta}\,d\vartheta=\sqrt{1-2\cos\vartheta+\underbrace{\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}_{1}}\,d\vartheta=$

$$=\sqrt{2-2\cos\vartheta}\,d\vartheta=$$

$$=\sqrt{2-2\left(1-2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}\,d\vartheta=\sqrt{\cancel{2}-\cancel{2}+4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\,d\vartheta=$$

$=2\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right|d\vartheta$ και $\frac{\vartheta}{2}\in[0,\pi]$, άρα $\sin\frac{\vartheta}{2}\geq 0$.

Επομένως $ds=2\sin\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta \Rightarrow$

$$\Rightarrow S=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta=+4\int_0^{2\pi}\sin\frac{\vartheta}{2}\,d\left(\frac{\vartheta}{2}\right)=$$

$$=4\left[-\cos\frac{\vartheta}{2}\right]_0^{2\pi}=4\left[-\cos\pi+\cos 0\right]=4(-(-1)+1)=8.$$